UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Instituto de Matemática e Estatística

Controlabilidade do sistema N-dimensional de Navier-Stokes com N-1 controles escalares

Dany Nina Huaman

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Juan Bautista Límaco Ferrel

Niterói, 27 de Março de 2015

Controlabilidade do sistema N-dimensional de Navier-Stokes com N-1 controles escalares

Dissertação submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Prof. Dr. Juan Bautista Límaco Ferrel
(Orientador)

Prof. Dr. Aldo Amilcar Bazan Pacoricona
(Co-orientador)

Prof. Dr. Enrique Fernández Cara

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernandéz

Prof. Dr. Haroldo Rodrigues Clark

Niterói, 27 de março de 2015

Ficha Catalográfica

Dany, N. H.

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares

Aluno: Dany Nina Huaman,

Niterói, UFF/IME, 2015

i-iv, 93 páginas

Orientador: Juan Límaco Ferrel

Dissertação de Mestrado - UFF/IME/ Programa de Pós-graduação em

Matematica,

Referências Bibliográficas: f. 82-83.

1. Introdução.

2. Resultados Básicos.

3. Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N controles escalares.

4. Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares.

Dedicatória

Aos meus pais Doris e Maximo Nina,
ao meu irmão e ao meu tio Cesar.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida e por ter me dado forças para concluir mais esta etapa de meus estudos.

Um agradecimento especial ao meu orientador, o professor Juan Límaco Ferrel, pela sua eficiente orientação, paciência, boa vontade, sabedoria, pelo exemplo de dedicação a profissão e por ter aceitado me orientar.

À coordenação de Pós-Graduação pelo apoio nos momentos difíceis .

Aos amigos do mestrado da UFF que de alguma forma me ajudaram a nunca desistir.

Aos funcionários da UFF pela atenção e convivência amiga durante a realização do curso.

A minha familia pelo apoio incondicional e por terem sido a força que faz ir em frente.

A minha amiga Jany Meirelles quem me ajudo a não desistir.

A meus amigos: Reillon Santos, Genyle Nascimentos, Israel Diaz, Miguel Nuñez, Ronald Ramos.
Ao professor Orlando Moreno Vega quem sempre me ajudou.

Aos amigos da Universidad Nacional del Callao: Kupac, Yerson, Chacal, Ronald, John Suarez, Edson Suarez, Paul, Lennin, etc.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de Ensino Superior) pelo apoio financeiro .

Resumo

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer a controlabilidade local por trajetória com N-1 controles escalares do seguinte sistema N-dimensional de Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \ \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, & \text{em } \ \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \text{sobre } \ \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \ \Omega \end{cases}$$

Onde $T > 0$, N=2 ou N=3, Ω é qualquer aberto de $\mathbb{R}^N$ limitado, conexo e com fronteira regular e $\mathcal{O}$ é um aberto que esta contido em Ω.

Palavras-chave:

Sistema de Navier-Stokes; Controlabilidade local exata por trajetórias; Desigualdade de Carleman; Teorema da função inversa

Abstract

The main objective of this work is to establish the local controllability of trajectories with N-1 scalar controls the following N-dimensional system of Navier-Stokes:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, & \text{in } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \text{on } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \text{in } \Omega \end{cases}$$

Where $T > 0$, N=2 or N=3, Ω any open $\mathbb{R}^N$, bounded, connected and regular boundary and $\mathcal{O}$ is open and which is contained in Ω

Keywords System of Navier-Stokes; Local controllability for trajectories; Carleman inequality; Inversa function theorem.

Sumário

Introdução

Consideremos o seguinte sistema de Navier-Stokes:

$$(a)\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde o domínio Ω é um aberto de $\mathbb{R}^N$ (N=2 ou N=3), com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ de classe $\mathcal{C}^2$. Dado um subdomínio $\mathcal{O} \subset \Omega$ o qual é um aberto e seja $T > 0$. Nós usaremos a notação $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,T)$ e denotaremos por $\eta(x)$ o vetor normal fora de Ω no ponto $x \in \partial\Omega$.

Em (a) a função y é a velocidade de um fluido viscoso incompressível (viscosidade igual a 1), p é a pressão, v é o controle atuando sobre o subdomínio $\mathcal{O}$, y_0 é o valor inicial e $1_{\mathcal{O}}$ é a função característica de $\mathcal{O}$.

Todas as derivadas são no sentido das distribuições de Laurent-Schwartz e $(y.\nabla)y$ denotará a função vetorial a qual tem como componente a:

$$[(y.\nabla)y]_i = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial y_j}{\partial x_j} y_i + \sum_{j=1}^{N} y_j \frac{\partial y_i}{\partial x_j}.$$

O operador laplaciano $\Delta y = (\Delta y_1, ..., \Delta y_N)$ onde

$$\Delta y_i = \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_N^2}, \;\; i = \{1, ..., N\}.$$

p é uma função real e $\nabla p = (\dfrac{\partial p}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial p}{\partial x_N})$.

Neste trabalho o que se vai estudar é controlabilidade local exata por trajetórias do sistema N-dimensional de Navier-Stokes (a) com $N-1$ controles escalares.

Dizemos que (a) é localmente exatamente controlável por trajetórias se para $(\bar{y}, \bar{p})$ uma trajetória ideal(incontrolável) começando com o valor inicial $\bar{y}_0$ e satisfazendo:

$$(b) \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\bar{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \bar{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $y_0 \in E$ e $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E \leq \delta$ se possa encontrar um controle $v1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N$ tal que se satisfaz $y(T) = \bar{y}(T)$ em Ω.

Seguindo as técnicas de Enrique Fernández Cara [6] e J.P.Puel [11] nós vamos a conseguir a controlabilidade local exata por trajetórias do problema (a) com N-controles escalares a qual vai ser desenvolvido no capítulo 2, as ideias para conseguir este resultado são as seguintes:

- Obter a desigualdade de Carleman e a desigualdade de Observabilidade do estado adjunto do sistema linearizado de (a).
- Estudar a controlabilidade local nula do sistema linearizado de (a) e obter um controle com decaimento exponencial.
- Obter a controlabilidade local exata por trajetória de (a) a partir do teorema da função inversa (Liusternik).

Finalmente fazendo uso das ideias obtidas em J. P. Puel em [11] assim como as ideias do capítulo 2 e fazendo uso das hipóteses e técnicas de Enrique Fernández Cara [5] no capitulo 3 nós vamos obter a controlabilidade local exata por trajetórias de (a) com N-1 controles escalares.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresenta-se alguns resultados necessários, para que o leitor possa ter uma melhor compreensão dos conteúdos abordados no capítulo seguinte.

1.1 Tópicos de Análise Funcional

1.1.1 Convergência Fraca e Fraca Estrela

Definição 1.1. *(**Convergência Fraca**) Sejam E um espaço de Banach e $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E. Então $u_\nu \rightharpoonup u$ se, e somente se, $\langle \varphi, u_\nu\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $\varphi \in E'$.*

Definição 1.2. *(**Convergência Fraca Estrela**) Sejam E um espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E'. Diz-se $\varphi_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi$ fraca estrela se, e somente se, $\langle \varphi_\nu, u\rangle \to \langle \varphi, u\rangle$, para todo $u \in E$.*

Proposição 1.3. *Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E. Então:*

(i) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E,E')$ então $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$;*

(ii) *Se $x_n \to x$ forte então $x_n \rightharpoonup x$ fracamente para $\sigma(E,E')$;*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E,E')$ e se $f_n \to f$ fortemente em E' (isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \to 0$) então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

Demonstração: Brezis ([2], p. 35). □

1.1.2 Espaços Separáveis e Reflexivo

Definição 1.4. *Diz-se que um espaço métrico E é separável se existe um subconjunto $D \subset E$ numerável e denso.*

Definição 1.5. *Seja E um espaço de Banach e seja J a injeção canônica de E em E''. Diz-se que E é reflexivo se $J(E) = E''$.*

Quando o espaço E é reflexivo identifica-se implicitamente E e E'' (com ajuda do isomorfismo J).

Teorema 1.6. ***(Banach-Alaoglu-Bourbaki)****. Sejam E um espaço de Banach e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \quad \text{é compacto na topologia fraca estrela}$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 42). □

Teorema 1.7. *Sejam E um espaço de Banach separável e E' o seu dual topológico. Então o conjunto*

$$B_{E'} = \{f \in E'; \|f\| \leq 1\} \quad \text{é metrizável na topologia fraca estrela.}$$

Reciprocamente, se $B_{E'}$ é metrizável na topologia fraca estrela, então E é separável.

Demonstração: Brezis ([2], p.48). □

O primeiro resultado (o corolário) é uma consequência do Teorema 1.6 e Teorema 1.7.

Corolário 1.8. *Sejam E um espaço Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E'. Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que converge na topologia fraca estrela.*

Demonstração: Brezis ([2], p. 50). □

Teorema 1.9. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e suponhamos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ é limitada. Então existe uma subsequência $(f_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E$ tal que*

$$f_{k_j} \rightharpoonup f.$$

Demonstração: Evans ([10], p. 639). □

1.2 Teoria das Distribuições Escalares

Definição 1.10. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado e* $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Denomina-se* suporte *de* φ *ao fecho em* Ω *do conjunto dos pontos* x *tais que* $\varphi(x) \neq 0$*. Simbolicamente,*

$$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\,\Omega}.$$

Definição 1.11. *Denota-se por* $C_0^\infty(\Omega)$ *o espaço vetorial das funções contínuas e infinitamente deriváveis em* Ω *com suporte compacto em* Ω*.*

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ é de grande importância para o nosso estudo, visto que estamos interessados em estudar funcionais lineares contínuos definidos em $C_0^\infty(\Omega)$.
Dado Ω como acima, considere o espaço vetorial topológico $C_0^\infty(\Omega)$. Diz-se que uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$ quando forem satisfeitas as seguintes condições:

i) Existe um conjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subset K \;\text{ e }\; \operatorname{supp}(\varphi_\nu) \subset K, \;\; \forall\, \nu \in \mathbb{N}$$

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente em K para todo multi-índice α.

O espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da noção de convergência definida acima será representada por $\mathcal{D}(\Omega)$ e denominado de *espaço das funções testes*.
Denomina-se *distribuição escalar* sobre Ω a toda forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua com respeito a topologia de $\mathcal{D}(\Omega)$. Isto significa que T satisfaz as seguintes condições:

i) $T(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha T(\varphi) + \beta T(\psi)$, $\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

ii) T é continua, isto é, se uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge, em $\mathcal{D}(\Omega)$ para φ, então,

$$T(\varphi_\nu) \longrightarrow T(\varphi) \;\text{ em } \mathbb{R}.$$

O valor da distribuição T na função teste φ será representado por $\langle T, \varphi\rangle$. Equipa-se o espaço vetorial das distribuições escalares da seguinte noção de convergência:
Considera-se o espaço de todas as distribuições sobre Ω. Neste espaço, diz-se que a sequência $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para T, quando a sucessão $(\langle T_\nu, \varphi\rangle)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

O conjunto das distribuições escalares sobre Ω é um espaço vetorial real, denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$, denominado *espaço das distribuições escalares* sobre Ω. Com o intuito de estudar os espaços de Sobolev, introduz-se o conceito de derivada distribucional para objetos de $\mathcal{D}'(\Omega)$. A motivação no conceito de derivada fraca e posteriormente o conceito de derivada distribucional dada por Sobolev, se deve a fórmula de integração por partes de Cálculo, sendo este conceito generalizado para distribuições qualesquer em $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Dada uma distribuição T em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ define-se a *derivada distribucional* de ordem α de T como sendo $D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ a forma linear e contínua dada por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Segue da definição acima que cada distribuição T sobre Ω possui derivadas de todas as ordens. Note-se que a aplicação

$$D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega) \tag{1.1}$$

é linear e continua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Isto significa que

$$\lim_{v\to\infty} T_v = T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ então } \lim_{v\to\infty} D^\alpha T_v = D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{1.2}$$

1.3 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Nesta seção, serão dadas algumas definições e propriedades elementares dos espaços $L^p(\Omega)$.

Definição 1.12. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e $p \in \mathbb{R}$ com $1 \leq p < \infty$; é definido*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}.$$

O espaço $L^p(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}.$$

Definição 1.13. *Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto; é definido*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mensurável e } \exists\, C \text{constante tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

O espaço $L^\infty(\Omega)$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C;\ |f(x)| \leq C \text{ q.s em } \Omega\}.$$

Teorema 1.14. *(Desigualdade de Hölder). Sejam as funções $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p; isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $f.g \in L^1(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 56). □

Observação 1.15. *Temos que mencionar uma consequência muito útil da desigualdade de Hölder: sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \ \ \text{para} \ \ 1 \leq i \leq k \ \ \text{com} \ \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \ldots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Demonstração: Brezis ([2], p. 57). □

Teorema 1.16. *(Teorema da convergência dominada, Lebesgue). Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em L^1 que satisfazem:*
(a) $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ em q.t.p de Ω,
(b) existe uma função $g \in L^1$ tal que, para todo n tem-se $|f_n(x)| \leq g(x)$, em q.t.p de Ω.
Então $f \in L^1(\Omega)$ e $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0$.

Demonstração: Brezis ([2], p. 54). □

Teorema 1.17. *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de L^p e $f \in L^p$, tal que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então, existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e uma função $h \in L^p$ tal que*
(a) $f_{n_k}(x) \longrightarrow f(x)$ em q.t.p de Ω
(b) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para todo k e em q.t.p de Ω.

Demonstração: Brezis ([2], p. 58). □

Definição 1.18. *Diz-se que uma função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ é localmente integrável em Ω, quando f é integrável à Lebesgue em todo compacto $K \subset \Omega$. O espaço das funções localmente integráveis é denotado por $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Em símbolos tem-se*

$$f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega) \Leftrightarrow \int_K |f|dx < \infty, \quad \text{para todo compacto} \ \ K \subset \Omega.$$

As distribuições que aparecem com mais frequência são aquelas definidas a partir de funções localmente integráveis.

Exemplo 1.19. *Seja* $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *e definamos* $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

Nestas condições T_u *é uma distribuição escalar sobre* Ω.

De fato, não é difícil mostrar a linearidade de T_u, pois segue da linearidade da integral. Resta mostrar que T_u é continua.

Seja uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções testes sobre Ω que converge em $\mathcal{D}(\Omega)$ para uma função teste φ, então

$$\begin{aligned}
|\langle T_u, \varphi_\nu \rangle - \langle T_u, \varphi \rangle| = |\langle T_u, \varphi_\nu - \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)dx \right| \\
&\leq \int_\Omega |u(x)(\varphi_\nu - \varphi)(x)|dx \\
&\leq \sup |\varphi_\nu - \varphi| \int_\Omega |u(x)|dx \to 0,
\end{aligned}$$

pois, $\varphi_\nu \to \varphi$ uniformemente.

A distribuição T_u assim definida é dita "gerada pela função localmente integrável u" e, usando o Lema de Du Bois Raymond, tem-se que T_u é univocamente determinada por u, no seguinte sentido: $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω. Neste sentido identificamos u com a distribuição T_u e o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ das funções localmente integráveis pode ser visto como parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$

Lema 1.20. *(Du Bois Raymond). Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([15], p. 12). □

Observação 1.21. *Outro resultado interessante é que a derivada de uma função* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, *não é em geral uma função de* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$.

Tal fato, motivará a definição de uma classe significativa de espaços de Banach de funções conhecidas sob a denominação de *Espaços de Sobolev.*

1.4 Espaços de Sobolev

Como vimos na seção anterior, toda função $u \in L^p(\Omega)$ possui derivadas distribucionais de todas as ordens. Entretanto, as derivadas de u nem sempre são também funções em $L^p(\Omega)$.

1.4.1 Os Espaços $W^{m,p}(\Omega)$

Chamaremos multi-índice a toda n-upla $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ de números naturais. Dado um multi-índice α, definimos a ordem $|\alpha|$ de α por $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$, e representamos por D^α o operador derivação

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Definição 1.22. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. O Espaço de Sobolev que denotamos por $W^{m,p}(\Omega)$, é o espaço vetorial das (classes de) funções em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas distribucionais de ordem α pertencem a $L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α com $|\alpha| \leq m$. Simbolicamente escrevemos:*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ para todo } \alpha \text{ tal que } |\alpha| \leq m\}.$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < \infty$ é um espaço de Banach equipado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \Big)^{1/p},$$

também $W^{m,\infty}(\Omega)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup \text{ess}_\Omega |D^\alpha u(x)|.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H^m(\Omega)$ que é um Espaço de Hilbert, cujo produto interno e a correspondente norma induzida em $H^m(\Omega)$ são dadas por

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^m(\Omega)} = \Big(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Agora vamos apresentar algumas desigualdades de Sobolev que nos ajudarão a alcançar objetivo proposto.

Corolário 1.23. *Supomos que Ω é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e de classe C^1 com Γ limitado, seja $1 \leq p \leq \infty$, então tem-se*

$$\text{Se } \ p < n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega), \ \text{onde } \tfrac{1}{p^*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n},$$

$$\text{Se } \ p = n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \text{para todo } \ q \in [p, +\infty),$$

$$\text{Se } \ p > n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega),$$

e todas estas injeções são contínuas. Além disso, se $p > n$ tem-se para todo $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leq C\|u\|_{W^{1,p}}|x-y|^{\alpha} \ q.s. \ x, y \in \Omega,$$

onde $\alpha = 1 - (N/p)$ e C dependa apenas do Ω, p e n. Em particular $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Brezis ([3], p. 285). □

Teorema 1.24 (Rellich–Kondrachov)**.** *Suponha Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ limitada e de classe C^1. Então tem-se as seguintes injeções compactas*

$$\begin{aligned}
&Se \quad p < n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ para \ todo \ q \in [1, p^*) \ com \ \tfrac{1}{p^*} = \tfrac{1}{p} - \tfrac{1}{n},\\
&Se \quad p = n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ para \ todo \ \ q \in [p, +\infty),\\
&Se \quad p > n \ \ W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Em particular, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ com injeção compacta para todo p (e para todo n).

Demonstração: Brezis ([3], p. 285). □

Observação 1.25. *Note que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$. Se $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, vale a identidade*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i}(uv)dx = \int_{\Gamma} uv\nu_i d\Gamma,$$

sendo $\nu_i = \cos(x_i, \nu)$, ν normal unitária externa a Γ. Portanto

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\Gamma} uv\nu_i d\Gamma,$$

para todo par de funções $u, v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$. Por densidade, estende-se este resultado para funções $u, v \in H^1(\Omega)$.

Demonstração: Medeiros, L. A e Milla Miranda, M. ([17], p. 126). □

1.4.2 Os Espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $W^{-m,q}(\Omega)$

Observe que, embora o espaço vetorial das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$ para $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$. Isto acontece porque a norma de $W^{m,p}(\Omega)$ é “bém maior” que a norma de $L^p(\Omega)$ é por isso que $W^{m,p}(\Omega)$ possui menos sequências convergentes. Isto motivou a definição dos espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Definição 1.26. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, é definido*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

No caso $p = 2$, o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^m(\Omega)$.

Teorema 1.27. *(Desigualdade de Poincaré). Suponhamos Ω é um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$. Então existe uma constante C (dependendo de Ω e p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver Brezis ([3], p. 290). $\square$

Observação 1.28. *Em particular a expressão $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ é uma norma no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, equivalente a norma $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$; em $H_0^1(\Omega)$ tem-se o produto interno*

$$((u,v)) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx,$$

que induz a norma $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$, equivalente a norma $\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração: Brezis ([3], p. 290). $\square$

Os espaços $W_0^{m,p}(\Omega)$ e em particular os espaços $H_0^m(\Omega)$, desempenham papel fundamental na Teoria dos Espaços de Sobolev e por conseguinte na Teoria das EDP's.
Se $1 \leq p < \infty$ e o número q é o expoente conjugado de p, isto é $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então representamos por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$ e por $H^{-m}(\Omega)$ o dual topológido de $H_0^m(\Omega)$. Em outras palavras, se f pertence a $H^{-m}(\Omega)$ é uma funcional linear limitada sobre $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.29. *Se $f \in H^{-1}(\Omega)$ a norma é definida como sendo*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle; \text{para todo } u \in H_0^1(\Omega) \text{ com } \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}.$$

Observação 1.30. *Em particular, as conclusões do Corolário 1.23 é válido para o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrário aberto Ω de $\mathbb{R}^n$. Similarmente, a conclusão do Teorema 1.24 é válido para $W_0^{1,p}(\Omega)$ com um subconjunto arbitrária Ω aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$*

Demonstração: Brezis ([3], p. 290). $\square$

1.5 Espaços $L^p(0,T;X)$

Estende-se as noções de mensurabilidade, integrabilidade, para funções

$$f : [0,T] \longrightarrow X,$$

onde $T > 0$ e X é um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.31. ***(i)*** *Uma função $s:[0,T]\to X$ é chamada simples se tem forma*

$$s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)u_i,\ \ (0\leq t\leq T),$$

onde cada E_i é um subconjunto Lebesgue mensurável de $[0,T]$ e $u_i\in X$, (i=1,2,...,m).
(ii) *Uma função $f:[0,T]\longrightarrow X$ é fortemente mensurável se existem funções simples $s_k:[0,T]\to X$ tais que*

$$s_k(t)\longrightarrow f(t);\ \textit{para q.s}\ \ 0\leq t\leq T.$$

(iii) *Uma função $f:[0,T]\longrightarrow X$ é fracamente mensurável se, para cada $u^*\in X^*$ a aplicação $t\mapsto\langle u^*,f(t)\rangle$ é Lebesgue mensurável.*

Definição 1.32. ***(i)*** *Se $s(t)=\sum_{i=1}^{m}\chi_{E_i}(t)u_i$ é uma função simple, definimos*

$$\int_0^T s(t)dt=\sum_{i=1}^{m}|E_i|u_i.$$

(ii) *Dizemos $f:[0,T]\longrightarrow X$ é somável se existe uma sequência de $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ de funções simples, tal que*

$$\int_0^T\|s_k(t)-f(t)\|dt\to 0;\ \textit{quando}\ \ k\to\infty.$$

(iii) *Se a função f é somável, definimos*

$$\int_0^T f(t)dt=\lim_{k\to\infty}\int_0^T s_k(t)dt.$$

Definição 1.33. *Denota-se por $L^p(0,T;X)$, com $1\leq p\leq\infty$ o espaço vetorial das (classes de) funções $u:(0,T)\longrightarrow X$ fortemente mensuráveis com valores em X e tais que; se $1\leq p<\infty$ a função $t\mapsto\|u(t)\|_X^p$ é integrável à* Lesbegue *em $(0,T)$; e se $p=\infty$ a função $t\mapsto\|u(t)\|_X\in L^\infty(0,T)$.*

O espaço $L^p(0,T;X)$ é um espaço completo com a norma definido por

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)}=\left(\int_0^T\|u(t)\|_X^p\,dt\right)^{1/p},\ \text{se}\ \ 1\leq p<\infty.$$

Se $p=\infty$ norma acima é substituída por

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)}=\sup_{0<t<T}\operatorname{ess}\|u(t)\|_X\,.$$

Apenas no caso em que $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno é dado por

$$\langle v, u\rangle_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_X \, dt.$$

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo e separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de *Banach* $L^{p'}(0,T;X')$, onde p e p' são índices conjugados, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. A dualidade entre esses espaços é dada na forma integral por

$$\langle v, u\rangle_{L^{p'}(0,T;X')\times L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle_{X'\times X} \, dt.$$

No caso $p = 1$, o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.

Definição 1.34. *Denota-se por $C([0,T];X)$, com $T > 0$ o espaço de* Banach *das funções contínuas $u : [0,T] \longrightarrow X$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|_X < \infty.$$

Podemos citar algumas propriedades importantes do espaço $L^p(0,T;X)$ que serão úteis no desenvolvimento do trabalho.

Observação 1.35. *Consideremos o intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$ e um espaço de Banach X.*
(i) *Se I é um intervalo limitada e $p \le q$, então*

$$L^q(I,X) \hookrightarrow L^p(I,X) \quad e \quad \|f\|_{L^p(I,X)} \le |I|^{\frac{q-p}{pq}} \|f\|_{L^q(I,X)}.$$

(ii) *Se Y é um espaço de Banach e se $A : X \to Y$ um operador linear e contínua, então para todo $f \in L^p(I,X)$ temos $Af \in L^p(I,Y)$ e*

$$\|Af\|_{L^p(I,Y)} \le \|A\|\|f\|_{L^p(I,X)}.$$

Em particular se $X \hookrightarrow Y$ e se $f \in L^p(I,X)$, então $f \in L^p(I,Y)$ (tomar A para ser a imersão)

Demonstração: Cazenave ([7], p. 17). $\square$

Teorema 1.36 (Aubin-Lions)**.** *Sejam B_0, B, B_1 espaços de Banach, B_0 e B_1 reflexivos, a imersão de B_0 em B é compacta, B imerso continuamente em B_1, $1 < p_0$, $p_1 < \infty$ e W o espaço*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0);\ u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$$

equipado da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)}.$$

Então W é um espaço de Banach, e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Lions ([14], p. 58). $\square$

Observação 1.37. *Uma consequência do Teorema de Aubin-Lions: se $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_0)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em $L^2(0,T;B_1)$ então $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada em W. Daí, segue-se que existe uma subsequência $(u_{\nu_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que $u_{\nu_k} \longrightarrow u$ forte em $L^2(0,T;B)$.*

Lema 1.38. *Sejam Q um subconjunto aberto limitado de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_t$, g_m e g funções de $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$, satisfazendo*

$$|g_m|_{L^q(Q)} \le C \ \ e \ \ g_m \to g, \ \ em\ q.t.p\ de\ Q.$$

Então

$$g_m \rightharpoonup g, \ \ em\ L^q(Q)$$

Demonstração: Lions ([14], p. 12). $\square$

Lema 1.39. *Sejam V, H, V' três espaços de Hilbert, sendo V' o dual de V. Se uma função u pertence ao espaço $L^2(0,T;V)$ e seu derivada u' pertence ao espaço $L^2(0,T;V')$, então u é quase sempre igual a uma função contínua de $[0,T]$ em H, e temos a seguinte igualdade no sentido de distribuição escalar em $(0,T)$*

$$\frac{d}{dt} \mid u \mid^2 = 2\langle u', u\rangle.$$

A igualdade acima faz sentido desde que as funções

$$t \mapsto \mid u(t) \mid^2 \quad e \ \ t \mapsto \langle u'(t), u(t)\rangle$$

são ambos integrável em $[0,T]$.

Demonstração: Temam ([19], p. 261). $\square$

Lema 1.40. *Sejam X um espaço de Banach, $f \in L^p(0,T;X)$ e $f' \in L^p(0,T;X)$ com $1 \le p \le \infty$, então*

$$f \in C([0,T];X).$$

(Possivelmente redefinidas sobre um conjunto de medida nula.)

Demonstração: Lions ([14], p. 7). $\square$

1.6 Distribuições Vetoriais

Seja um número real $T > 0$ e X um espaço de Banach real com a norma $\|.\|$

Definição 1.41. *Uma distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X, é uma função $f : \mathcal{D}(0,T) \to X$ linear e contínua. O conjunto dessas transformações lineares é chamado Espaço das Distribuições Vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X e é denotado por*

$$\mathcal{D}'(0,T;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(0,T);X).$$

Definição 1.42. *Seja $f \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. A* derivada *de ordem n é definida como sendo a distribuição vetorial sobre $(0,T)$ com valores em X dada por*

$$\left\langle \frac{d^n f}{dt^n}, \varphi \right\rangle = (-1)^n \left\langle f, \frac{d^n \varphi}{dt^n} \right\rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Observação 1.43. *Se a função f pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$ com $1 \leq p \leq \infty$, então define uma distribuição que denotamos pela mesma função f e é dada por*

$$f(\varphi) = \int_0^T f(t)\varphi(t)dt, \ \textit{para todo}\ \varphi \in \mathcal{D}(0,T),$$

com valores integrales em X.

Demonstração: Lions ([14], p. 7). □

1.7 Equação de Navier-Stokes

Definição 1.44. *Seja Ω aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $N = 2$ ou $N = 3$*

$$\gamma = \{\varphi \in [\mathcal{D}(\Omega)]^N,\ div(\varphi) = 0\}$$

$$H = \{\varphi \in [L^2(\Omega)]^N;\ div(\varphi) = 0,\ \gamma_\nu \varphi = 0\}$$

$$V = \{\varphi \in [H_0^1(\Omega)]^N;\ div(\varphi) = 0\}$$

Teorema 1.45. *Seja Ω aberto e limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira de classe $\mathcal{C}^1$ e $N = 2$ ou $N = 3$. Então.*

$$\overline{\gamma}^{\|\cdot\|_{L^2}} = H$$

$$\overline{\gamma}^{\|\cdot\|_{H_0^1}} = V$$

Demonstração: Temam ([19], p. 15). $\square$

Definição 1.46. *Seja* u *e* $v \in \mathbb{R}^N$*, nós vamos a definir*

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_Nv_1 & u_Nv_2 & \cdots & u_Nv_N \end{bmatrix}$$

Consideremos o seguinte problema de evolução de Stokes para (u, p)

$$(1.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f - \nabla p, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(u) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ u = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Donde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $N = 2$ ou $N = 3$, $T > 0$ e $\Gamma = \partial\Omega$. Multiplicando a primeira equação de 1.3 por $\omega \in V$ tem-se:

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t), w) + (u(t), w)_H = \langle f(t), w \rangle, & \text{em } (0,T) \text{ para todo } \omega \in V \\ u(0) = u_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Teorema 1.47. *Se* $u_0 \in H$ *e* $f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^N)$*. Então existe uma única solução* $u \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ *com* $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$ *de 1.4 mais ainda existe* $p \in \mathcal{D}'(0, T, L^2(\Omega))$ *(De fato* $p \in H^{-1}(0, T, L^2(\Omega))$*) tal que* (u, p) *satisfaz 1.3*

Demonstração: Temam ([19], p. 254). $\square$

Teorema 1.48. *Se* $u_0 \in V$ *e* $f \in L^2(0, T, H)$*, então a solução* u *de 1.3 satisfaz* $u \in \mathcal{C}(0, T, V) \cap L^2(0, T, H^2(\Omega)^N)$*,* $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T, H)$ *e* $p \in L^2(0, T, H^1(\Omega))$

Demonstração: Temam ([19], p. 268). $\square$

Consideremos o seguinte problema para (y, q)

$$(1.5) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde Ω é um aberto limitado de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ com $N = 2$ ou $N = 3$, $\omega \subset \Omega$ é um aberto e $Q = \Omega \times (0, T)$, para $T > 0$ fixo.

Lema 1.49. *Seja $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$, $g \in L^2(Q)^{N^2}$, $y_0 \in H$ e $v \in L^2(Q_\omega)^N$, então existe uma solução de 1.5 tal que $y \in \mathcal{C}([0,T], H) \cap L^2(0,T,V)$*

Demonstração: Para $\tilde{y} \in L^2(0,T,V)$, denotemos por $f_0 = \nabla.g + \nabla v 1_\omega - \nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})$ vamos provar que $f_0 \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$, vejamos primeiro o seguinte:

$$\|\widetilde{y}\|^2_{L^2(Q)^N} = \int_0^T \|\tilde{y}\|^2_{L^2(\Omega)^N}\, dt$$

Da equivalência das normas $\|.\|_{H^1(\Omega)^N}$ e $\|.\|_V$, se tem

$$\begin{aligned} \|\tilde{y}\|^2_{L^2(Q)^N} &\leq \int_0^T \|\tilde{y}(t)\|^2_V\, dt \\ &\leq c^2 \|\tilde{y}(t)\|^2_{L^2(0,T,V)} \\ &< \infty \end{aligned}$$

por tanto $\tilde{y} \in L^2(Q)^N$ e como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$ implica que $\tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(Q)^{N^2}$ e $\bar{y} \otimes \tilde{y} \in L^2(Q)^{N^2}$ agora vamos a chamar por $\tilde{f}_{ij} = (\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y})_{ij}$ o qual pertence a $L^2(Q)^{N^2}$.
$\left\langle \nabla \tilde{f}(t), w \right\rangle = -\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N (\tilde{f}_{ij}(t), \frac{\partial w_i}{\partial x_j})_{L^2(\Omega)}$ para todo $w \in [H_0^1(\Omega)]^N$ assim $\nabla \tilde{f}(t)$ é linear, agora vamos provar que é continua.

$$\begin{aligned} \left|\left\langle \nabla \tilde{f}(t), w \right\rangle\right| &\leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \left|\tilde{f}_{ij}(t)\right|_{L^2(\Omega)} \left|\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right|_{L^2(\Omega)} \\ \left|\left\langle \nabla \tilde{f}(t), w \right\rangle\right| &\leq c\,\|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} \\ \left|\left\langle \nabla \tilde{f}(t), w \right\rangle\right| &\leq c\,\|w\|_{[H_0^1(\Omega)]^N} \end{aligned}$$

e assim temos que $\nabla.\tilde{f}(t) \in [H^{-1}(\Omega)]^N$, também se tem que:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\left\langle \nabla.\tilde{f}(t), w\right\rangle\right|^2 dt &\leq \int_0^T c\,\|w\|^2_{H_0^1(\Omega)} \left\|\tilde{f}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c\,\|w\|^2_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^N} \int_0^T \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \int_0^T \left|\tilde{f}_{ij}(t)\right|^2 dxdt \\
&\leq c\,\|w\|^2_{\left[H_0^1(\Omega)\right]^N} \left\|\tilde{f}\right\|_{\left[L^2(\Omega)\right]^N} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

Por tanto $\nabla.\tilde{f} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$ isto nos leva a que $\nabla.(\bar{y}\otimes\tilde{y}+\tilde{y}\otimes\bar{y}) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$, como $\nabla.g \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$ e $v1_w \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$ nós vamos ter que $f_0 \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$

Agora consideremos o seguinte problema:

$$(1.6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y = f_0 - \nabla p & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Pelo teorema 1.47 existe uma única solução y de 1.6 com $y \in \mathcal{C}(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0,T,V')$, isto nós dize que para cada $\tilde{y} \in L^2(0,T,V)$ existe solução de 1.5 a qual vamos chamar $L_T(\tilde{y}) = y$. Vamos a definir a seguinte função:

$$\begin{aligned}
L_T : \mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V) &\longrightarrow \mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V) \\
\tilde{y} &\longrightarrow L_T(\tilde{y}) = y
\end{aligned}$$

Esta bem definido e agora nós vamos provar que é uma contração para T muito pequeno. Sejam $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2 \in \mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V)$ e denotemos por $y_1 = L_T(\tilde{z}_1)$ e $L_T(\tilde{y}_2) = y_2$ e como eles são soluções fracas de 1.6 respetivamente quando $\tilde{y}$ é igual a $\tilde{y}_1$ e $\tilde{y}_2$ respetivamente nós vamos ter que y_1 e y_2 cumprem as seguintes equações:

$$(1.7) \qquad \frac{d}{dt}(y_1(t), w) + a(y_1(t), w) = \left\langle f_0^1, w\right\rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

$$(1.8) \qquad \frac{d}{dt}(y_2(t), w) + a(y_2(t), w) = \left\langle f_0^2, w\right\rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

restando 1.7 e 1.8 nós vamos ter:

$$\frac{d}{dt}(y_1 - y_2(t), w) + a(y_1 - y_2(t), w) = \left\langle f_0^2, w \right\rangle \quad \text{para todo } w \in V$$

Fazendo $w = (y_1 - y_2)(t) \in V$ e como $f_0^1 - f_0^2 = -\nabla(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y})$

temos que

$$\frac{d}{dt}\left\|(y_1 - y_2)(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} + a\left((y_1 - y_2)(s), (y_1 - y_2)(s)\right) =$$

$$= -\left\langle \nabla.\left(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}\right), y_1 - y_2 \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left\|(y_1 - y_2)(s)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \left\|(y_1 - y_2)(s)\right\|^2_V =$$

$$\left(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla(y_1 - y_2)\right)_{L^2(\Omega)^{N^2}}$$

integrando de 0 ate T

$$\left\|(y_1 - y_2)(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^t \left\|(y_1 - y_2)(s)\right\|^2_V ds \leq$$

$$\int_0^t \left(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) + (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla.(y_1 - y_2)\right)_{L^2(\Omega)^{N^2}} =$$

$$= \int_0^t \left(\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2), \nabla.(y_1 - y_2)\right) ds + \int_0^t \left((\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}, \nabla.(y_1 - y_2)\right) ds$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$$\leq \int_0^t \left\|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\right\|_{L^2} \left\|\nabla.(y_1 - y_2)\right\|_{L^2} ds + \int_0^t \left\|(\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2) \otimes \bar{y}\right\|_{L^2} \left\|\nabla.(y_1 - y_2)\right\|_{L^2}$$

$$\leq 2\int_0^t \left\|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\right\|_{L^2} \left\|\nabla.(y_1 - y_2)\right\|_{L^2} ds$$

$$\begin{aligned} \left\|(y_1 - y_2)(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} + \int_0^t \left\|y_1 - y_2\right\|^2_V ds &\leq 2\int_0^t \left\|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\right\|_{L^2(\Omega)^{N^2}} \left\|y_1 - y_2\right\|_V ds \\ &\leq 2\int_0^t \left\|\bar{y} \otimes (\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2)\right\|^2_{L^2} ds + \frac{1}{2}\int_0^t \left\|y_1 - y_2\right\|^2_V ds \end{aligned}$$

passando a restar o segundo somando da parte direita da desigualdade

$$\|(y_1-y_2)(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}\int_0^t\|y_1-y_2\|^2_V\,ds \;\;\leq\;\; 2\int_0^t\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\,ds$$

obtemos

$$\|y_1-y_2\|_{\mathcal{C}(0,T,H)} \;\;\leq\;\; 4\int_0^T\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\,ds \tag{1.9}$$

e

$$\int_0^T\|y_1-y_2\|^2_V\,ds \;\;\leq\;\; 4\int_0^T\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2}\,ds \tag{1.10}$$

Agora vamos limitar o termino que aparece nas desigualdades 1.9 e 1.10

$$|\bar{y}_i(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j|\leq\|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^{N^2}}\,|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2|_j \;\text{ para }\; j=1,2,...,N$$

de este fato vamos ter

$$\begin{aligned}
\|\bar{y}\otimes(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)\|^2_{L^2(\Omega)^N} \;&=\; \sum_{i,j=1}^N\int_\Omega|\bar{y}_i|^2\,|(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j|^2\,dx \\
&\leq\; c\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\left(\sum_{i,j=1}^N\int_\Omega|(\tilde{y}_1-\tilde{y}_2)_j|^2\,dx\right) \\
&\leq\; c\,\|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{L^2(\Omega)^N}
\end{aligned}$$

somando 1.9 e 1.10 para depois sustituir a desigualdade de acima nós vai dar

$$\begin{aligned}
\|y_1-y_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)\cap L^2(0,T,V)} \;&\leq\; c\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\int_0^T\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{L^2(\Omega)^N}\,ds \\
&\leq\; c\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\int_0^T\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)}\,ds \\
&\leq\; cT\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)} \\
&\leq\; cT\,\|\bar{y}\|^2_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|^2_{\mathcal{C}(0,T,H)\cap L^2(0,T,V)}
\end{aligned}$$

$$\|L_T(\tilde{y}_1)-L_T(\tilde{y}_2)\|_{\mathcal{C}(0,T,H)\cap L^2(0,T,V)}\leq c\sqrt{T}\,\|\bar{y}\|_{L^\infty(Q)^N}\,\|\tilde{y}_1-\tilde{y}_2\|_{\mathcal{C}(0,T,H)\cap L^2(0,T,V)} \tag{1.11}$$

Tomando em 1.11 $T = T_0$ muito pequeno temos que L_{T_0} é uma contração e pelo teorema do ponto fixo de Banach vai existir um único $y \in \mathcal{C}(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$ tal que $L_{T_0}(\tilde{y}) = y$

Chamaremos por y^1 a solução de :

$$(P_1) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T_0) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T_0) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T_0) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $y^1 \in \mathcal{C}(0,T_0,H) \cap L^2(0,T_0,V)$ e $\dfrac{\partial y^1}{\partial t} \in L^2(0,T,V')$, desta maneira como se conseguiu solução do problema (P_1) se vai conseguir a existência de solução do problema:

$$(P_2) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (T_0,2T_0) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (T_0,2T_0) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (T_0,2T_0) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e a solução do problema P_2 chamaremos por $\widehat{y}^2 \in \mathcal{C}(T_0,2T_0,H) \cap L^2(T_0,2T_0,V)$ a qual cumpre que $\dfrac{\partial \widehat{y}^2}{\partial t} \in L^2(T_0,2T_0,V')$ e agora definamos y^2

$$y^2(x,t) = \begin{cases} y^1(x,t); \ (x,t) \in \Omega \times [0,T_0] \\ \\ \widehat{y}^2(x,t); \ (x,t) \in \Omega \times [T_0,2T_0] \end{cases}$$

e se pode ver que $y^2 \in \mathcal{C}(0,2T_0,H) \cap L^2(0,2T_0,V)$ com $\dfrac{\partial y^2}{\partial t} \in L^2(0,2T_0,V')$ e y é a única solução de 1.5 para $T = 2T_0$, então o que nos vamos fazer é utilizar o principio de indução matemática para provar que existe uma única solução de 1.5 para $T = nT_0$ para qualquer n numero natural.

Suponhamos que existe uma única solução y^n de 1.5 para $T = nT_0$, então consideremos o seguinte problema:

$$(P_{n+1})\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (nT_0, (n+1)T_0) \\ \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Da mesma como se provo que P_1 tem uma única solução se consegue obter uma única solução de P_{n+1} a qual vamos chamar por $\widehat{y}^{n+1} \in \mathcal{C}(nT_0, (n+1)T_0, H) \cap L^2(nT_0, (n+1)T_0, V)$ e $\dfrac{\partial \widehat{y}^{n+1}}{\partial t} \in L^2(nT_0, (n+1)T_0, V')$ e vamos a definir y^{n+1}

$$y^{n+1}(x,t) = \begin{cases} y^n(x,t);\ (x,t) \in \Omega \times [0, nT_0] \\ \\ \widehat{y}^{n+1}(x,t);\ (x,t) \in \Omega \times [nT_0, (n+1)T_0] \end{cases}$$

o qual é solução de 1.5 quando $T = (n+1)T_0$ e por tanto pelo principio de indução temos que para todo $n \in \mathbb{N}$ o problema 1.5 quando $T = nT_0$ tem uma única solução $y^n \in \mathcal{C}(0, nT_0, H) \cap L^2(0, nT_0, V)$ e $\dfrac{\partial y^n}{\partial t} \in L^2(0, nT_0, V')$
Agora tomemos $\widetilde{T} > 0$ como os números naturais não são limitados existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0T_0 > \widetilde{T}$, então pelo que se provo acima se sabe que existe uma única solução y^{n_0} solução de 1.5 com $T = nT_0$ devido a isto fazendo $y = y^{n_0}|_{\Omega \times [0,T]}$ vamos ter que y é a única solução de 1.5 com $T = \widetilde{T}$ qualquer e que cumpre com $z \in \mathcal{C}(0, T, H) \cap L^2(0, T, V)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in L^2(0, T, V')$

□

Lema 1.50. *Seja $k \in L^{4/3}(0, T, L^{12/11}(\Omega)^N)$. Então existe uma única solução (z, q) para o sistema de Stokes.*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & em\ \Omega \times (0,T) \\ div(z) = 0, & em\ \Omega \times (0,T) \\ z = 0, & sobre\ \Gamma \times (0,T) \\ z(T) = 0, & em\ \Omega \end{cases}$$

com $z \in \mathcal{C}(0, T, L^{4/3}(\Omega)^N) \cap L^2(0, T, W^{1,6/5}(\Omega)^N)$

Demonstração: E. Fernandez. Cara (Ver [6], p. 1538)

□

1.8 Resultados Importantes

Nesta seção, apresentamos alguns resultados importantes que serão utilizados na obtenção dos objetivos desejados.

Teorema 1.51. *Seja Ω aberto de $\mathbb{R}^N$ e $w \subset \Omega$, então existe $\eta^0 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ tal que $\eta^0 = 0$ sobre $\partial\Omega$, $\eta^0(x) > 0$ em Ω e $|\nabla \eta^0| > 0$ em $\Omega \setminus \overline{w}$.*

Demonstração: Fursikov ([13], p. 4). $\square$

Definição 1.52. *Seja X subconjunto de um espaço de Banach E se dize que X é convexo se e somente se para todo $t \in [0,1]$ se tem que $tx + (1-t)y \in X$ para todo $x, y \in X$*

Definição 1.53. *Seja X un subconjunto convexo de um espaço de Banach E e uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, se dize que:*

1. *f é convexa se e somente se $f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$ para todo $x, y \in X$ e $t \in [0,1]$.*

2. *f é estritamente convexa se e somente $f(tx + (1-t)y) < tf(x) + (1-t)f(y)$ para todo $x, y \in X$ e $t \in (0,1)$.*

Teorema 1.54. *Seja $\mathcal{U}_{ad}$ um subconjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{U}$ e $J : \mathcal{U}_{ad} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função estritamente convexa, diferenciável e que cumpre que $\lim\limits_{\|v\| \longrightarrow +\infty} J(v) = +\infty$ para todo $v \in \mathcal{U}_{ad}$. Então existe um único $u \in \mathcal{U}_{ad}$ satisfazendo:*

$$J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

e caracterizado por

$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \ \ \forall \ \ v \in \mathcal{U}_{ad}$$

Demonstração: Lions ([8], p. 10). $\square$

Teorema 1.55. *(Teorema de completação) Para qualquer espaço com produto interno X existe um espaço de Hilbert H e um isomorfismo $A : X \longrightarrow W \subset H$ denso. O espaço H é único excepto por isomorfismos.*

Demonstração: Kreyszig ([4], p. 139). $\square$

Teorema 1.56. *(Lax-Milgram) Seja H um espaço de Hilbert e $B : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear, para o qual existem constantes $\alpha,\ \beta > 0$ tais que:*

$$|B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\| \quad (u,\ \ v \in H)$$

e

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u,u) \ \ (u \in H)$$

Finalmente dado $f : H \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear limitado em H. Então existe um único $u \in H$ tal que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \textit{para todo} \ \ v \in H$$

Demonstração: Evans ([10], p. 297). $\square$

Capítulo 2

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N dimensional com N controles escalares

Neste capitulo, apresentaremos um resultado sobre a controlabilidade local exata por trajetórias para um sistema do tipo Navier-Stokes. Em um primeiro passo, fazendo uso do método de penalização e assumindo a desigualdade de Observabilidade para o sistema adjunto associado o problema linear do sistema de Navier-Stokes vamos conseguir a controlabilidade nula do problema linear de Navier-Stokes. Num segundo passo vamos demonstrar uma desigualdade do tipo Carleman o sistema adjunto do problema linear de Navier-Stokes e como consequência disto ultimo se vai conseguir a desigualdade de Observabilidade. Em um terceiro passo mostraremos a controlabilidade nula do problema linear de Navier-Stokes e conseguiremos que a solução do problema linear seja exponencialmente decrescente quando $t \longrightarrow T$. Ao final, graças a um teorema da função inversa provaremos que o sistema de Navier-Stokes é localmente exatamente controlável por trajetórias.

2.1 Formulação do problema

Consideremos o seguinte problema:

$$
(2.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

Donde $T > 0$, $N = 2$ ou $N = 3$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto, limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ regular. $w \subset \Omega$ é um conjunto aberto.

y = velocidade de um fluido de viscosidade incompressível

p = pressão

y_0 = valor inicial de velocidade do fluido

v = controle atuando no subconjunto ω

Nós vamos chamar por $Q = \Omega \times (0,T)$ e $Q_\omega = \omega \times (0,T)$.

Seja $(\bar{y}, \bar{p})$ uma trajetória com dato inicial $\bar{y}_0$, isto é uma solução do problema:

$$
(2.2) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\bar{y}) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \bar{y} = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \bar{y}(0) = \bar{y}_0 & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

Esta trajetória é a ideal (sem controle), o que nós queremos é obter a controlabilidade local exata por trajetórias de (2.1)

Definição 2.1. *Nos dizemos que* (2.1) *é localmente exatamente controlável por trajetórias, se para* $(\bar{y}, \bar{p})$ *uma trajetória a qual é solução de* (2.2) *existe* $\delta > 0$ *tal que se* $y_0 \in E$ *e* $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E \leq \delta$ *então podemos achar um controle* v *tal que a solução de* (2.1) *satisfaz* $y(T) = \bar{y}(T)$ *em* Ω.

O espaço E vai ser definido depois.

2.2 Resultados e estrategias

Como nós queremos achar a controlabilidade local de (2.1) o seguinte teorema nós vai a dar isso.

Teorema 2.2. *Assumindo que ω é um subconjunto aberto não vazio de Ω e que $T > 0$, suponhamos que $\bar{y} \in L^2(0,T,V) \cap [L^\infty(Q)]^N$. Então existe $\delta > 0$ tal que se $\|y_0 - \bar{y}_0\|_{[L^4(\Omega)]^N} \leq \delta$, existe um controle $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ e uma solução y de (2.1) tal que $y(T) = \bar{y}(T)$.*

Para provar o teorema 2.2 de acima nós precisamos fazer alguns passos.
Fazendo $z = y - \bar{y}$, $q = p - \bar{p}$ e $z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ assim temos:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}. \tag{2.3}$$

$$\nabla q = \nabla p - \nabla \bar{p}. \tag{2.4}$$

$$\Delta z = \Delta y - \Delta \bar{y}. \tag{2.5}$$

Como $(w.\nabla)w = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\partial w}{\partial x_i}$ e como

$$\begin{aligned}
\nabla.(u \otimes v) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1v_1 & u_1v_2 & \cdots & u_1v_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_Nv_1 & u_Nv_2 & \cdots & u_Nv_N \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_jv_1) & \cdots & \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_jv_N) \end{bmatrix} \\
[\nabla(u \otimes v)]_i &= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(u_jv_i) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i + \sum_{j=1}^{N} u_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \\
&= (div(u)v)_i + (u.\nabla v)_i \\
\nabla(u \otimes v) &= ((u.\nabla)v) + (div(u))v \ .
\end{aligned}$$

Desta última igualdade como $div(u) = 0$ temos que $\nabla(u \otimes v) = ((u.\nabla)v)$, então

$$\begin{aligned}
\nabla.(y \otimes y) &= \nabla.((z + \bar{y}) \otimes (z + \bar{y})) = \nabla.\left(z \otimes z + z \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes z + \bar{y} \otimes \bar{y}\right) \\
&= \nabla.(z \otimes z) + \nabla(z \otimes \bar{y}) + \nabla(\bar{y} \otimes z) + \nabla(\bar{y} \otimes \bar{y}) \\
\nabla.(y \otimes y) - \nabla.(\bar{y} \otimes \bar{y}) &= \nabla.(z \otimes z) + \nabla.(z \otimes \bar{y}) + \nabla.(\bar{y} \otimes \bar{y})
\end{aligned}$$

$$(y.\nabla)y - (\bar{y}.\nabla)\bar{y} = (z.\nabla)z + (z.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla)z. \tag{2.6}$$

Substituindo (2.6) junto com z em (2.1) vamos ter o seguinte:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla.(z \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes z) + (z.\nabla)z + \nabla q = v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(z) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ z = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ z(0) = z_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Definição 2.3. *Nós dizemos que* (2.7) *é localmente nulo controlável se existe* $\delta > 0$ *tal que se* $y_0 \in E$ *e* $\|y_0\|_E < \delta$ *vai implicar que existe* $v \in L^2(Q_\omega)^N$ *tal que a solução* y *de* (2.7) *satisfaz*

$$y(T) = 0 \quad em \quad \Omega.$$

Então estudar a controlabilidade local exata por trajetórias de (2.1) equivale a estudar a controlabilidade local nula de (2.7).

Nós vamos estudar o problema de controle linearizado de (2.7) e seguiremos trabalhando com a variável y, para $g = (g_{ij}) \in L^2(Q)^{N^2}$ e $y_0 \in H$ considere para todo $v \in L^2(Q_\omega)^N$, consideremos o problema linearizado de (2.7) com uma força externa $\nabla.g$

$$(2.8) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

2.3 Método de Penalização

Novamente vamos estudar o problema linearizado de (2.7) com $\nabla.g$ o qual é uma força externa.

$$(2.9) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla.(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla q = \nabla.g + v1_\omega & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0 & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0 & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Assumindo que $\bar{y} \in [L^\infty(Q_\omega)]^N$, $g \in [L^2(Q)]^{N^2}$,

$$e$$

$y_0 \in H$ nós queremos provar que existe um controle $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que seu solução y de (2.9) satisfaz que $y(T) = 0$

Para $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ e para $\epsilon > 0$ definamos:

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon}\|y_v(T)\|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} |v|^2\, dxdt.$$

Onde y_v é a solução do sistema (2.9) com dado v.

Afirmação 1: J_ϵ é diferenciável.

Com efeito como $J_\epsilon(v) = \dfrac{1}{2\epsilon} b_1(y_v(T), y_v(T)) + \dfrac{1}{2} b_2(v,v)$ para que J_ϵ seja diferenciável só precisamos provar que as formas bilineares b_1 e b_2 são continuas com efeito se prova que existe $c > 0$ tal que $|b_1(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)| \leq c\|\tilde{v}_1\|_H \|\tilde{v}_2\|_H$ e $|b_2(v_1, v_2)| \leq \|v_1\|_{L^2(Q_\omega)^N}\|v_2\|_{L^2(Q_\omega)^N}$, por tanto J_ϵ é diferenciável.

Afirmação 2 : J_ϵ é estritamente convexo.

Para $\theta \in (0,1)$ temos:

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(\theta v + (1-\theta)w) &= \frac{1}{2\epsilon}\left\|y_{\theta v + (1-\theta)w}(T)\right\|_H^2 + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \|\theta v + (1-\theta)w\|^2\, dxdt \\
&\leq \frac{1}{2\epsilon}\left(\theta\|y_v(T)\|_H + (1-\theta)\|y_w(T)\|_H\right)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\theta\|v\|_{L^2(Q_\omega)} + (1-\theta)\|w\|_{L^2(Q_\omega)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Como para $t \in \mathbb{R}$ a função $t \longrightarrow t^2$ é estritamente convexa temos na desigualdade de acima que:

$$\begin{aligned}
J_\epsilon(\theta v + (1-\theta)w) &< \frac{1}{2\epsilon}\left(\theta\|y_v(T)\|_H^2 + (1-\theta)\|y_w(T)\|_H^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\theta\|v\|_{L^2(Q_\omega)}^2 + (1-\theta)\|w\|_{L^2(Q_\omega)}^2\right) \\
&= \frac{1}{2\epsilon}\theta\|y_v\|_H^2 + \frac{1}{2}\theta\|v\|_{L^2(Q_\omega)}^2 + \frac{1-\theta}{2\epsilon}\|y_w\|_H^2 + \frac{1-\theta}{2}\|w\|_{L^2(Q_\omega)}^2 \\
&= \theta J_\epsilon + (1-\theta)J_\epsilon(w).
\end{aligned}$$

Portanto J_ϵ é estritamente convexo.

Afirmação 3: J_ϵ é coerciva.

Com efeito pois como $\frac{1}{2}\|v\|^2_{L^2(Q_\omega)} \leq J_\epsilon(v)$ vamos ter que $\lim\limits_{\|v\|\longrightarrow\infty} J_\epsilon(v) = +\infty$.
Das afirmações 1,2 e 3 vamos ter pelo teorema 1.54 que existe um único $v_\epsilon \in \left[L^2(Q_\omega)\right]^N$ tal que

$$J_\epsilon(v_\epsilon) = \inf_{v\in L^2(Q_\omega)^N} J_\epsilon(v)$$

e além disso v_ϵ satisfaz $\langle J'_\epsilon(v_\epsilon), w\rangle = 0$ para todo $w \in \left[L^2(Q_\omega)\right]^N$.
Agora vamos achar a que é igual $\langle J'_\epsilon(v), w\rangle$, em $J_\epsilon(v)$ nós podemos expressar a y_v como $\hat{y}(T) + \widetilde{L}(v)(T)$, onde $\hat{y}$ é solução de:

$$(2.10)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \hat{y}}{\partial t} - \Delta\hat{y} + (\hat{y}.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\hat{y} + \nabla q = \nabla g, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ div(\hat{y}) = 0, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ \hat{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma\times(0,T) \\ \hat{y}(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

onde $\widetilde{L}(v) = \widetilde{y}_v$ é a solução de:

$$(2.11)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \widetilde{y}}{\partial t} - \Delta\widetilde{y} + (\widetilde{y}.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\widetilde{y} + \nabla q = v1_\omega, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ div(\widetilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ \widetilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma\times(0,T) \\ \bar{y}(0) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

então do seguinte fato:

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon}\left(y_v(T), y_v(T)\right)_H + \frac{1}{2}\left(v, v\right)_{[L^2(Q_\omega)]^N}$$

$$J_\epsilon(v) = \frac{1}{2\epsilon}\left(\hat{y}(T) + \tilde{L}(v)(T), \hat{y}(T) + \tilde{L}(v)(T)\right)_H + \frac{1}{2}\left(v, v, \right)_{[L^2(Q_\omega)]^N}$$

$$\langle J'_\epsilon(v), w\rangle = \frac{1}{\epsilon}\left(\tilde{L}(w)(T), y_v(T)\right)_H + (w, v)_{[L^2(Q_\omega)]^N},$$

então nós temos que para qualquer $w \in [L^2(Q_\omega)]^N$ se tem:

$$\langle J'_\epsilon(v_\epsilon), w\rangle = \frac{1}{\epsilon}\left(\widetilde{L}(w)(T), y_{v_\epsilon}(T)\right)_H + (w, v_\epsilon)_{[L^2(Q_\omega)]^N} = 0,$$

isto nós da

$$\frac{1}{\epsilon}\left(\widetilde{L}(w)(T), y_{v_\epsilon}(T)\right)_H + \int_{Q_\omega} v_\epsilon w dx dt = 0. \tag{2.12}$$

Introduzimos o estado adjunto (φ, π) que satisfaz:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla\pi = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\varphi) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \varphi(T) = \dfrac{1}{\epsilon} y_{v_\epsilon}, & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{2.13}$$

onde $D(\varphi) = \nabla\varphi + \nabla\varphi^t$, de (2.13) multiplicando por $\widetilde{y}_w$ e integrando vamos ter:

$$\int_0^T \int_\Omega \left(-\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla\pi\right)\widetilde{y}_w dx dt = 0$$

$$-\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial\varphi}{\partial t}\widetilde{y}_w dx dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta\varphi\widetilde{y}_w dx dt - \int_0^T \int_\Omega \nabla(\bar{y}\otimes\varphi + \varphi\otimes\bar{y})\widetilde{y}_w dx dt +$$

$$+\int_0^T \int_\Omega \nabla\pi\widetilde{y}_w dx dt = 0$$

$$-\left(\varphi(T), \widetilde{y}_w(T)\right)_H + \left(\varphi(0), \widetilde{y}_w(0)\right)_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial\widetilde{y}_w}{\partial t}\right)_H dt - \int_0^T \left(\varphi, \Delta\widetilde{y}_w\right)_H dt +$$

$$+\int_0^T \left(\varphi, \nabla(\bar{y}\otimes y_w + \widetilde{y}_w\otimes\bar{y})\right)_H dt - \int_0^T \left(\pi, div(\widetilde{y}_w)\right)_H dt = 0,$$

e como $div(\widetilde{y}_w) = 0$ tem-se:

$$-(\varphi(T), \widetilde{y}_w(T))_H + (\varphi(0), \widetilde{y}_w(0))_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial \widetilde{y}_w}{\partial t} - \Delta \widetilde{y}_w + \nabla(\bar{y} \otimes \widetilde{y}_w + \widetilde{y}_w \otimes \bar{y})\right)_H dt = 0,$$

pelo fato de que $\widetilde{y}_w(0) = 0$ e $-\int_0^T (q, div(\varphi))\, dt = 0$, vamos ter:

$$-(\varphi(T), \widetilde{y}_w(T))_H + \int_0^T \left(\varphi, \frac{\partial \widetilde{y}_w}{\partial t} - \Delta \widetilde{y}_w + \nabla(\bar{y} \otimes \widetilde{y}_w + \widetilde{y}_w \otimes \bar{y}) + \nabla q\right)_H dt = 0.$$

Como $\widetilde{y}_w$ é solução de (2.11) quando em lugar de v colocamos w, então dai temos que:

$$\int_{Q_\omega} w v_\epsilon dx dt + \int_{Q_\omega} \varphi w dx dt = 0$$

$$\int_{Q_\omega} (v_\epsilon + \varphi) w dx dt = 0,$$

para qualquer $w \in [L^2(Q_\omega)]^N$ daqui se tem

$$v_\epsilon + \varphi = 0. \tag{2.14}$$

Para v_ϵ, denotemos por $y_\epsilon = y_{v_\epsilon}$ à solução de:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial y_\epsilon}{\partial t} - \Delta y_\epsilon + (y_\epsilon.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla) y_\epsilon + \nabla q = \nabla.g + v_\epsilon 1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y_\epsilon) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y_\epsilon = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y_\epsilon(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{array}\right. \tag{2.15}$$

O que nós queremos é passar ao limite em (2.15), para isso tomemos φ a solução do estado adjunto que cumpre (2.13) quando $y_{v_\epsilon} = y_\epsilon$ e dai nós temos a seguinte igualdade:

$$(Ly_\epsilon, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} = (\nabla.g + v_\epsilon 1_\omega, \varphi)_{[L^2(Q)]^N} \tag{2.16}$$

Onde $Ly_\epsilon = \dfrac{\partial y_\epsilon}{\partial t} - \Delta y_\epsilon + (y_\epsilon.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla) y_\epsilon$. Vamos a desenvolver a parte esquerda de (2.16)

$$(Ly_\epsilon,\varphi)_{[L^2(Q)]^N} = \int_0^T \left(\frac{\partial y_\epsilon}{\partial t},\varphi\right)_H dt + \int_0^T (-\Delta y_\epsilon,\varphi)_H\, dt + \int_0^T ((y_\epsilon.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla)y_\epsilon,\varphi)_H\, dt$$

Desenvolvendo a integral $\int_0^T \left(\frac{\partial y_\epsilon}{\partial t},\varphi\right)_H dt$, nós da

$$\begin{aligned}(Ly_\epsilon,\varphi)_{[L^2(Q)]^N} &= (y_\epsilon(T),\varphi(T))_H - (y_\epsilon(0),\varphi(0))_H + \int_0^T \left(y_\epsilon,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_H dt+ \\ &+ \int_0^T (y_\epsilon,-\Delta\varphi)_H\, dt - \int_0^T (y_\epsilon,(\varphi.\nabla)\bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\varphi)_H\, dt - \int_0^T (\nabla\pi, y_\epsilon)_H\, dt \\ &= (y_\epsilon(T),\varphi(T))_H - (y_\epsilon(0),\varphi(0))_H + \int_0^T (y_\epsilon, L^*\varphi)_H\,.\end{aligned}$$

Onde $L^*\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \Delta\varphi - (D\varphi)\bar{y}$ e como φ cumpre 2.13 se tem:

$$(Ly_\epsilon,\varphi)_{[L^2(Q)]^N} = (y_\epsilon(T),\varphi(T))_H - (y_\epsilon(0),\varphi(0))_H$$

substituindo este último resultado em (2.16) vamos ter:

$$(y_\epsilon(T),\varphi(T))_H - (y_\epsilon(0),\varphi(0))_H = -\sum_{i,j=1}^N \int_{Q_\omega} g_{ij}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dxdt + \int_{Q_\omega} v_\epsilon\varphi dxdt$$

$$\frac{1}{\epsilon}\|y_\epsilon(T)\|_H^2 = (y_\epsilon(0),\varphi(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dxdt + \int_{Q_\omega} v_\epsilon\varphi dxdt.$$

Da igualdade de (2.14) e da equação (2.15) temos:

$$\frac{1}{\epsilon}\|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2\, dxdt = (y_0,\varphi(0))_H - \sum_{i,j=1}^N \int_Q g_{ij}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}dxdt \tag{2.17}$$

Pelo momento vamos assumir que se cumpre a desigualdade de observabilidade:

$$\|\varphi(0)\|_H^2 + \int_Q \rho^2\, |\nabla\varphi|^2\, dxdt \le c\int_{Q_\omega} |\varphi|^2\, dxdt \tag{2.18}$$

a qual se provara na seguinte seção e com alguns pesos convenientes e assumindo que g satisfaz $\int_Q \frac{1}{\rho^2}\,|g|^2\, dxdt < +\infty$

Como por Cauchy-Schwartz tem-se:

$$(y_0,\varphi(0))_H \le \|y_0\|_H\, \|\varphi(0)\|_H$$

$$(2.19) \qquad (y_0, \varphi(0))_H \leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2c} \|\varphi(0)\|_H^2$$

$$-\sum_{i,j=1}^{N} \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \leq \int_Q |g| \, |\nabla \varphi| \, dxdt,$$

deste último temos que

$$(2.20) \qquad -\sum_{i,j=1}^{N} \int_Q g_{ij} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dxdt \leq \frac{c^{-1}}{2} \rho^2 \int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 \, dxdt,$$

de tal maneira que em (2.19) e (2.20) fique a mesma constante c, dai substituindo (2.19) e (2.20) em (2.17), tem-se:

$$\frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 \, dxdt \leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2c} \|\varphi(0)\|_H^2 + \frac{\rho^2}{2c} \int_Q |\nabla \varphi|^2 \, dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 \, dxdt,$$

aqui nós vamos fazer uso da desigualdade 2.18 e a igualdade (2.14) se tem o seguinte

$$\begin{aligned} \frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 + \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 \, dxdt &\leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 \, dxdt + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 \, dxdt \\ &\leq c \|y_0\|_H^2 + \frac{c}{\rho^2} \int_Q |g|^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

e portanto se tem que $\frac{1}{\epsilon} \|y_\epsilon(T)\|_H^2 < \tilde{c}$ e $\displaystyle\int_{Q_\omega} |v_\epsilon|^2 \, dxdt < \tilde{c}$ para todo $\epsilon > 0$.

Pelo teorema 1.9 se tem que existe $v \in [L^2(Q_\omega)]^N$ tal que $v_\epsilon \rightharpoonup v$ em $[L^2(Q_\omega)]^N$, como $y_\epsilon = \hat{y} + \widetilde{L}(v_\epsilon)$ e $\widetilde{L}$ é linear e continua, então

$$\begin{aligned} \|\widetilde{y}_\epsilon\|^2_{\mathcal{C}([0,T],H) \cap L^2(0,T,V)} &\leq c \|\bar{y}\|^2_{[L^\infty(Q)]^N} + \|v_\epsilon\|^2_{[L^2(Q_\omega)]^N} \\ &\leq \hat{c}_3. \end{aligned}$$

Por isto último temos que $\widetilde{L}(v_\epsilon) \rightharpoonup \bar{y}$ em $\mathcal{C}([0,T], H) \cap L^2(0,T,V)$ e como $L(y_\epsilon) = v_\epsilon 1_\omega$ tem-se $L(y_\epsilon) \rightharpoonup v 1_\omega$ em $[L^2(Q)]^N$ portanto $L(y) = v 1_\omega$, devemos lembrar que $\widehat{L}(v)$ nós da a solução de $L(y) = v 1_\omega$ satisfazendo (2.11) e por esta razão $\widetilde{L}(v) = \bar{y}$ e como $y_\epsilon = \widetilde{y} + \widetilde{L}(v_\epsilon) \rightharpoonup \widetilde{y} + \widetilde{L}(v)$, tem-se:

$$y_\epsilon \rightharpoonup y_v \text{ em } \mathcal{C}(0,T,H)\cap L^2(0,T,V)$$

isso vai implicar que $y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ fracamente e como $\|y_\epsilon(T)\|_H \leq c\sqrt{\epsilon}$ então $y_\epsilon(T) \to 0$ forte em $[L^2(\Omega)]^N$.

Agora vamos mostrar que $y_\epsilon(T) \rightharpoonup 0$ em $[L^2(Q)]^N$, para obter isso vamos tomar $\psi = \phi\theta$ onde $\phi \in [H_0^1(\Omega)]^N$ e $\theta \in \mathcal{C}^1[0,T]$ satisfazendo $\theta(0) = 0$ e $\theta(T) = 1$.

fazendo contas se tem as seguintes igualdades:

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} \quad = \quad -\int_Q (L\psi)y_\epsilon dxdt + \int_Q \nabla.g\psi dxdt + \int_Q v_\epsilon 1_\omega \psi dxdt,$$

como a parte direita converge nós temos:

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} \longrightarrow -\int_Q (L\psi)ydxdt + \int_Q \nabla.g\psi dxdt + \int_Q v1_\omega dxdt,$$

e por meio da seguinte igualdade

$$(\psi(T), y(T))_{[L^2(\Omega)]^N} = -\int_Q (L\psi)ydxdt + \int_Q \nabla.g\psi dxdt + \int_Q v1_\omega dxdt,$$

nós temos a seguinte convergência

$$(\psi(T), y_\epsilon(T))_{[L^2(\Omega)]^N} \longrightarrow (\psi(T), y(T))_{[L^2(\Omega)]^N}$$

pelo fato de $\psi(T) = \phi$ isso nós vai dar que $(\phi, y_\epsilon(T)) \longrightarrow (\phi, y(T))$, para qualquer $\phi \in [H_0^1(\Omega)]^N$ e como $[H_0^1(\Omega)]^N$ é denso em $[L^2(\Omega)]^N$ finalmente temos a convergência que nós queríamos $y_\epsilon(T) \rightharpoonup y(T)$ em $[L^2(\Omega)]^N$.

Assim vamos ter que:

$$y_\epsilon(T) \rightharpoonup \ y(T), \text{ em } \ [L^2(\Omega)]^N$$

$$y_\epsilon(T) \rightharpoonup \ 0, \text{ em } [L^2(\Omega)]^N$$

pela unicidade do limite tem-se que $y(T) = 0$.

2.4 Desigualdade de Observabilidade

Na seção anterior nós fizemos uso da desigualdade de observabilidade do estado adjunto da equação de Navier-Stokes, agora nesta seção nós vamos provar aquela desigualdade. Para $y_0 \in V$ e $h \in [L^2(Q)]^N$, consideremos o seguinte sistema de Stokes:

$$(2.21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla q = h, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Pelo teorema 1.48 se tem que $y \in \mathcal{C}([0,T], V) \cap L^2(0,T,[H^2(\Omega)]^N)$, $\dfrac{\partial y}{\partial t} \in \left[L^2(Q)\right]^N$ e $q \in L^2(0,T,H^1(\Omega))$.

Definamos $w = rot(y)$ portanto $\nabla \times y$.

Para $N = 3$:

$$\nabla \times y = \left(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3}, \frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\nabla \times w = \nabla \times (\nabla \times y)$$

$$\nabla \times w = \left(\frac{\partial}{x_2}(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1}), \frac{\partial}{\partial x_3}(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3}) - \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2}), \right.$$
$$\left. , \frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial y_1}{\partial x_3} - \frac{\partial y_3}{\partial x_1}) - \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial y_3}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_3}) \right)$$

$$\nabla \times w = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(\frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3}) - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_3^2}, \frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_3}{\partial x_3}) - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_3^2}, \dots \right).$$

Nesta última desigualdade vamos fazer uso de fato que $div(y) = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \dfrac{\partial y_3}{\partial x_3} = 0$, para ter:

$$\nabla \times w = (-\Delta y_1,\ -\Delta y_2,\ -\Delta y_3)$$

$$\nabla \times w = -\Delta y,$$

então isto nós da:

$$\nabla \times w = -\Delta y \tag{2.22}$$

Para $N = 2$:

$$\begin{aligned} rot(y_1, y_2) &= \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = w \\ rot(w) &= \left(-\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} \right), \end{aligned}$$

e do fato de que $div(y) = \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$, se tem:

$$\begin{aligned} rot(w) &= \left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2},\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2} \right) \\ &= (\Delta y_1,\ \Delta y_2) \end{aligned}$$

$$rot(w) = \Delta y$$

Agora vamos seguir trabalhando com $N = 3$ e fazer uso de 2.22.

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla q\right) &= \nabla \times h \\ \nabla \times \left(\frac{\partial y}{\partial t} + \nabla \times w + \nabla q\right) &= \nabla \times h \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \times (\nabla \times w) + \nabla \times (\nabla q) &= \nabla \times h \end{aligned}$$

e como $rot(\nabla q) = 0$ temos:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = rot(h), \text{em } \Omega \times (0, T). \tag{2.23}$$

$$-\Delta y = rot(w), \text{ em } \ \Omega \times (0, T). \tag{2.24}$$

$$y = 0, \text{ sobre } \Gamma \times (0,T). \tag{2.25}$$

Definamos:

$$l(t) \;=\; \begin{cases} t, & t \in [0, T/4] \\ \\ l(t) \geq T/4, & t \in [T/4, 3T/4] \\ \\ T - t, & t \in [3T/4, T] \end{cases}$$

Sempre é possível achar l asi de tal maneira que $l \in \mathcal{C}^{\infty}([0,T])$, agora definamos as seguintes funções:

$$\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)}}{l^4(t)}. \tag{2.26}$$

$$\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)} - e^{\lambda(\left|\eta^0\right|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}. \tag{2.27}$$

$$\beta(x,t) = e^{\lambda(\eta^0(x)+m_1)}. \tag{2.28}$$

Onde η^0 é a função do teorema 1.51 , $\lambda \geq 1$ e $m_1 \leq m_2$, são constantes escolhidas tais que:

$$\left|\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right| \leq c\xi^{5/4} \;\text{ e }\; \left|\frac{\partial^2 \alpha}{\partial t^2}\right| \leq c\xi^{3/2}. \tag{2.29}$$

Fazendo uso das estimativas de Carleman para equações Parabólicas a qual esta provado em [9] para a equação (2.23). Se tem que existe $\lambda_0 \geq 1$, $s_0 \geq 0$ e $c > 0$ tal que para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $s \geq s_0$ temos:

$$\begin{aligned} &\int_Q \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} \left|\nabla w\right|^2 dxdt + \int_Q s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} \left|w\right|^2 dxdt \leq \\ &c\left(s^{-1/2} \left\|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\right\|^2_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} + \int_Q e^{2s\alpha} \left|h\right|^2 dxdt\right) + \\ &c\int_{Q_w} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} \left|w\right|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Para y solução do problema elítico em (2.24) e fazendo uso da estimativa para a equação elítica em [12] vamos ter que existem $\tau_0 \geq 0$ e λ_0 como acima tais que para todo $\tau \geq \tau_0$ se tem para quase todo $t \in (0, \tau)$:

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega e^{2\tau\beta} \left(|\nabla y(t)|^2 + \tau^2\lambda^2\beta^2 |y(t)|^2\right) dx \leq \\
&c\left(\tau \int_\Omega \beta e^{2\tau\beta} |w(t)|^2 dx + \tau^2\lambda^2 \int_\omega \beta^2 e^{2\tau\beta} |y(t)|^2 dx\right).
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Fazendo $\tau = \dfrac{s}{l^4(t)}$ temos que $\alpha(x,t) = \dfrac{\beta(x)}{l^4(t)} - \tilde{k}(t)$ daqui substituindo em (2.31).

$$\int_\Omega e^{\frac{2s\beta}{l^4}} \left(|y|^2 + s^2\lambda^2 \frac{\beta^2}{l^8} |y|^2\right) dx \leq c\left(\frac{s}{l^4} \int_\Omega \beta e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |w|^2 dx + \frac{s^2\lambda^2}{l^8} \int_\omega \beta^2 e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |y|^2 dx\right).$$

De (2.26) e (2.28) tem-se $\xi = \dfrac{\beta}{l^4}$ substituindo acima temos:

$$\int_\Omega e^{\frac{2s\beta}{l^4}} \left(|y|^2 + s^2\lambda^2\xi^2 |y|^2\right) dx \leq c\left(s \int_\Omega \xi e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |w|^2 dx + s^2\lambda^2 \int_\omega \xi^2 e^{\frac{2s\beta}{l^4}} |y|^2 dx\right),$$

multiplicando por λ^2 e tirando para fora o termo que só depende de t temos:

$$e^{2s\hat{k}(t)} \int_\Omega e^{2s\alpha} \left(\lambda^2 |y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2\right) dx \leq ce^{2s\hat{k}(t)} \left(s\lambda^2 \int_\Omega \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dx + s^2\lambda^4 \int_\omega \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dx\right),$$

integrando de 0 ate T

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{2s\alpha} \left(\lambda^2 |y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2\right) dxdt \;\; \leq \;\; & c\left(s\lambda^2 \int_Q \xi e^{2s\alpha} |w|^2 dxdt + \right. \\
& \left. s^2\lambda^4 \int_{Q_w} \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

somando a desigualdade 2.30 e a desigualdade 2.32 tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha} \left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2\right) dxdt \leq \\
&c\left(s^{-1/2} \left\|\xi^{-1/4} e^{s\alpha} w\right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} + \int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 dxdt\right) + \\
&c\left(\int_{Q_\omega} \xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 dxdt\right).
\end{aligned} \tag{2.33}$$

Nós vamos a eliminar o termo da fronteira, para isso devemos lembrar que:

$$\left\|\xi^{-1/4}e^{s\alpha}w\right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} = \left\|\xi^{-1/4}e^{s\alpha}rot(y)\right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}$$

(2.34) $$\left\|\xi^{-1/4}e^{s\alpha}w\right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} \leq c\left\|\xi^{-1/4}e^{s\alpha}\frac{\partial y}{\partial \nu}\right\|_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)}.$$

Definamos:

(2.35) $$\breve{\alpha}(t) = \min_{x\in\Omega}\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(\left|\eta^0\right|_\infty + m_2)}}{l^4}.$$

(2.36) $$\breve{\xi}(t) = \min_{x\in\Omega}\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4}.$$

(2.37) $$\hat{\alpha}(t) = \max_{x\in\Omega}\alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1} - e^{\lambda(\left|\eta^0\right|_\infty + m_2)}}{l^4}.$$

(2.38) $$\hat{\xi}(t) = \max_{x\in\Omega}\xi(x,t) = \frac{e^{\lambda m_1}}{l^4}.$$

$$\begin{aligned}
(u,r)(x,t) &= \breve{\xi}(t)^{-1/4}\left(y(x,t)e^{s\breve{\alpha}(t)}, q(x,t)e^{s\breve{\alpha}(t)}\right)\\
u(x,t) &= \breve{\xi}(t)^{-1/4}y(x,t)e^{s\breve{\alpha}(t)}\\
r(x,t) &= \breve{\xi}(t)^{-1/4}q(x,t)e^{s\breve{\alpha}(t)},
\end{aligned}$$

e denotemos por $c_0 > 0$ a constante tal que $\breve{\xi}(t) \geq c_0$ para todo $t \in (0,T)$ e definamos as variáveis u e q do seguinte modo:

$$y(x,t) = u\breve{\xi}^{1/4}e^{-s\breve{\alpha}(t)} \quad \text{e} \quad q(x,t) = r\breve{\xi}(t)^{1/4}e^{-s\breve{\alpha}(t)},$$

desta maneira obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial t}\check{\xi}(t)^{1/4}e^{-s\check{\alpha}} + \frac{u}{4}\check{\xi}^{-3/4}\xi'(t)e^{-s\check{\alpha}} + u\check{\xi}^{1/4}(-s\check{\alpha}'(t)e^{-s\check{\alpha}}) \\
-\Delta y &= -\check{\xi}(t)^{1/4}e^{-s\check{\alpha}} \\
\nabla q &= \check{\xi}^{1/4}e^{-s\check{\alpha}}\nabla r,
\end{aligned}
$$

somando as ultimas igualdades e fazendo uso da equação (2.21)

$$
\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r\right)\check{\xi}^{1/4}e^{-s\check{\alpha}} + \frac{u}{4}\check{\xi}^{-3/4}\check{\xi}'e^{-s\check{\alpha}} - u\check{\xi}^{1/4}\check{\alpha}'e^{-s\alpha} = h
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r = h\frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} + us\check{\alpha}'(t) - u\frac{\check{\xi}'(t)}{4\check{\xi}}
$$

$$
\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla r = h\frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} + ye^{s\check{\alpha}}s\frac{\check{\alpha}'(t)}{\check{\xi}^{1/4}} - ye^{s\check{\alpha}}\frac{\check{\xi}'(t)}{4\check{\xi}^{5/4}},
$$

de isto último junto com a equação (2.21)

$$
(2.39) \qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u + \nabla q = \dfrac{e^{s\check{\alpha}'}}{\check{\xi}^{1/4}}y - \dfrac{1}{4}\dfrac{\check{\xi}'e^{s\check{\alpha}}y}{\check{\xi}^{5/4}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\
div(u) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\
u = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\
u(0) = 0, & \text{em } \Omega
\end{cases}
$$

$$
(2.40) \qquad \frac{e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}},\quad \frac{s\check{\alpha}'e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{1/4}} \; e \; \frac{\check{\xi}'e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{5/4}} \;\; \text{são limitadas em (0,T).}
$$

Com efeito

$$
\frac{e^{s\check{\alpha}(t)}}{\check{\xi}(t)^{1/4}} = \frac{l(t)e^{s\check{\alpha}(t)}}{e^{\lambda m_1/4}} < c \text{ é limitada em } [0,T]
$$

$$
\frac{s\check{\alpha}'(t)e^{s\check{\alpha}(t)}}{\check{\xi}(t)^{1/4}} = \frac{d}{dt}(e^{s\check{\alpha}(t)})\frac{1}{\check{\xi}^{1/4}} = \frac{d}{dt}(e^{s\check{\alpha}(t)})\frac{l(t)}{e^{\lambda m_1/4}} < c \;\text{ isto é porque } e^{s\check{\alpha}(t)} \text{ é de } \mathcal{C}^\infty \text{ em [0,T]}
$$

$$\frac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}}}{\check{\xi}^{5/4}} = -\frac{4e^{\lambda m_1} l'(t)}{e^{5/4 m_1}} \quad = \quad -4\tfrac{e^{\lambda m_1} l'(t) e^{s\check{\alpha}(t)}}{e^{5/4\lambda m_1}} < c \text{ é limitado em [0,T].}$$

Agora de (2.40) vamos ter que $\hat{f} = \dfrac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}} + \dfrac{s\check{\alpha} e^{s\check{\alpha}} y}{\check{\xi}^{1/4}} - \dfrac{1}{4}\dfrac{\check{\xi}' e^{s\check{\alpha}} y}{\check{\xi}^{5/4}}$ pertence a $[L^2(Q)]^N$

Fazendo uso da regularidade da equação de Navier-Stokes ver Temam [19] tem-se:

$$\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)} \leq c\left(\left\|e^{s\check{\alpha}} h\right\|^2_{[L^2(Q)]^N} + s^2\left\|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\right\|^2_{[L^2(Q)]^N}\right) \tag{2.41}$$

Com efeito como u é uma solução fraca de (2.39) temos que cumpre com

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u(t), v) + a(u(t), v) = \left\langle \hat{f}, v\right\rangle, & \forall \ \ v \in V \\ \\ u(0) = 0, & \text{em} \ \ \Omega \end{cases}$$

Por estimações de energia da equação Navier-Stokes dados em [19] tem-se

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)} &\leq c\int_0^T \|\hat{f}(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} dt \\
\|u\|_{H^{1,2}(Q)} &\leq c\|\hat{f}\|_{[L^2(Q)]^N} \\
\|u\|_{H^{1,2}(Q)} &\leq c\left(\left\|\frac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}}\right\|_{[L^2(Q)]^N} + \left\|\left(\frac{s\check{\alpha}'}{\check{\xi}^{1/4}} - \frac{\check{\xi}'}{4\check{\xi}^{5/4}}\right)e^{s\check{\alpha}} y\right\|_{[L^2(Q)]^N}\right)
\end{aligned}$$

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c\left(\left\|\frac{e^{s\check{\alpha}} h}{\check{\xi}^{1/4}}\right\|_{[L^2(Q)]^N} + \left\|\left(\frac{\check{\alpha}'}{s\check{\xi}^{5/4}} - \frac{\check{\xi}'}{4s^2\check{\xi}^{9/4}}\right)s^2\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\right\|_{[L^2(Q)]^N}\right) \tag{2.42}$$

De (2.29) se tem que $|\check{\alpha}'| \leq c\check{\xi}^{5/4}$ e como $s \geq s_0$ vamos ter que $\dfrac{\check{\alpha}'(t)}{s\check{\xi}(t)^{5/4}} \leq c$.

Como $\check{\xi}' = -\dfrac{4e^{\lambda m_1}}{l^5}$ então $\dfrac{\check{\xi}'}{4s^2\check{\xi}^{9/4}} = -\dfrac{l^4 e^{\lambda m_1}}{s^2 e^{9/4\lambda m_1}}$ e como l é limitado em $[0, T]$ isto nós da $\left|\dfrac{\check{\xi}'(t)}{4s^2\check{\xi}(t)^{9/4}}\right| < c$. Desta maneira substituindo estos resultados em (2.42) vamos ter 2.41:

$$\|u\|_{H^{1,2}(Q)} \leq c\left(\|e^{s\check{\alpha}} h\|_{[L^2(Q)]^N} + \left\|s^2\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\right\|_{[L^2(Q)]^N}\right).$$

Do teorema do traço, ver [21] tem-se:

$$\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\|^2_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} \leq c\|u\|^2_{H^{1,2}(Q)} \tag{2.43}$$

Do fato de $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}$ e das desigualdades (2.41) e 2.43 tem-se

$$\begin{aligned}
\|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \tfrac{\partial y}{\partial \nu}\|^2_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} &\leq c\left(\|e^{s\check{\alpha}} h\|^2_{[L^2(Q)]^N} + s^2 \left\|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\right\|^2_{[L^2(Q)]^N}\right) \\
s^{-1/2}\|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \tfrac{\partial y}{\partial \nu}\|^2_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} &\leq c\left(s^{-1/2}\|e^{s\check{\alpha}} h\|^2_{[L^2(Q)]^N} + s^{3/2}\|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|^2_{[L^2(Q)]^N}\right),
\end{aligned}$$

e como $\check{\xi}(t) = \xi(x,t)$ para $x \in \Gamma$ então se tem o seguinte:

$$s^{-1/2}\|\check{\xi}^{-1/4} e^{s\check{\alpha}} \frac{\partial y}{\partial \nu}\|^2_{H^{1/4,1/2}(\Sigma)} \leq c\left(s^{-1/2}\|e^{s\check{\alpha}} h\|^2_{[L^2(Q)]^N} + s^{3/2}\|\check{\xi} e^{s\check{\alpha}} y\|^2_{[L^2(Q)]^N}\right) \tag{2.44}$$

substituindo (2.34) e (2.44) em (2.33)

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi\,|w|^2 + \lambda^2\,|\nabla y|^2 + \right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\,dxdt \leq \\
&c\left(s^{-1/2}\int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt + s^{3/2}\int_Q \xi^2 e^{2S\alpha}\,|y|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt\right) + \\
&c\left(\int_Q e^{2s\alpha} s\lambda^2\xi\,|w|^2\,dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\,dxdt\right),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

tomando $s \geq s_0$ suficientemente grande tal que $s^{-1/2} < 1$ e $\frac{\sqrt{2c}}{\lambda^2} < s$ de modo que $cs^{3/2} < \frac{s^2\lambda^4}{2}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
&\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi\,|w|^2 + \lambda^2\,|\nabla y|^2\right) dxdt + \int_Q e^{2s\alpha} s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\,dxdt \leq \\
&c\int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt + \frac{1}{2}\int_Q s^2\lambda^4\xi^2 e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt + \\
&c\left(\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s\lambda^2\xi\,|w|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha} s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\,dxdt\right).
\end{aligned}$$

desta maneira temos

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi}+s\lambda^2\xi\,|w|^2+\lambda^2\,|\nabla y|^2+s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\right)dxdt\leq$$

(2.46)

$$c\left(\int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega}e^{2s\alpha}s\lambda^2\xi\,|w|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega}e^{2s\alpha}s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\,dxdt\right).$$

Agora vamos eliminar o termo $\int_{Q_\omega}e^{2s\alpha}s\lambda^2\xi\,|w|^2\,dxdt$ que aparece na direita.

Seja $\omega_0\neq\Phi$ aberto com $\overline{\omega}_0\subset\omega$ e $\theta\in\mathcal{C}_0^\infty(\omega)$ com $0\leq\theta\leq 1$ e $\theta=1$ em ω_0, vamos ter o seguinte:

$$\begin{aligned}
s\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}}e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt &= s\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}}\theta e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt\\
&\leq s\lambda^2\int_{Q_\omega}\theta e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt\\
&= s\lambda^2\int_{Q_\omega}\theta e^{2s\alpha}\xi w rot(y)dxdt\\
&= s\lambda^2\int_{Q_\omega}\Big[\varphi w_1(\frac{\partial y_3}{\partial x_2}-\frac{\partial y_2}{\partial x_3})+\varphi w_2(\frac{\partial y_1}{\partial x_3}-\frac{\partial y_3}{\partial x_1})+\\
&\qquad \varphi w_3(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}-\frac{\partial y_1}{\partial x_2})\Big]\,dxdt.
\end{aligned}$$

Onde $\varphi=\theta e^{2s\alpha}\xi$

$$\begin{aligned}
s\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}}e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt &\leq s\lambda^2\Big[\int_{Q_\omega}-\frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_2}y_3+\frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_3}y_2-\frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_3}y_1+\\
&\qquad +\frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_1}y_3-\frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_1}y_2+\frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_2}y_1dxdt\Big]\\
&= s\lambda^2\Big[\int_{Q_\omega}(\frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_2}-\frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_3})y_1+(\frac{\partial\varphi w_1}{\partial x_3}-\frac{\partial(\varphi w_3)}{\partial x_1})y_2+\\
&\qquad (\frac{\partial(\varphi w_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial(\varphi w_1)}{\partial x_2})y_3dxdt\Big]
\end{aligned}$$

$$= s\lambda^2 \left[\int_{Q_\omega} rot(\varphi w) y dxdt \right].$$

Por tanto

$$s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi \, |w|^2 \, dxdt \leq s\lambda^2 \int_{Q_w} rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w) y dxdt \tag{2.47}$$

$$rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w) = rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w_1, \theta e^{2s\alpha}\xi w_2, \theta e^{2s\alpha}\xi w_3)$$

$$rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w) = \theta e^{2s\alpha}\xi rot(w) + \theta e^{2s\alpha} 2s\xi \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \alpha}{\partial x_2} & \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} +$$

$$+ e^{2s\alpha}\xi \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} & \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \theta}{\partial x_2} & \frac{\partial \theta}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} + \theta e^{2s\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \xi}{\partial x_1} & \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \xi}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \xi}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \xi}{\partial x_2} & \frac{\partial \xi}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}.$$

Como $\frac{\partial \alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial \xi}{\partial x_i} = \xi \lambda \frac{\partial \eta^0}{\partial x_i}$, tem-se

$$rot(\theta e^{2s\alpha}\xi w) = \theta e^{2s\alpha}\xi rot(w) + \theta e^{2s\alpha} 2s\lambda\xi^2 D\eta^0 w + e^{2s\alpha}\xi D\theta w + \theta e^{2s\alpha}\xi\lambda D\eta^0 w.$$

Onde $D\eta^0 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} & \frac{\partial \eta^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \eta^0}{\partial x_3} & 0 & -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} \\ -\frac{\partial \eta^0}{\partial x_2} & \frac{\partial \eta^0}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix}$,

isto último vamos substituir em 2.47

$$s\lambda^2 \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi \, |w|^2 \, dxdt \leq s\lambda^2 \left(\int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi rot(w) y dxdt + \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha} 2s\lambda\xi^2 (D\eta^0 w) y dxdt + \right.$$

$$\left. + \int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi (D\theta w) y dxdt + \int_{Q_\omega} \theta e^{2s\alpha}\xi\lambda (D\eta^0 w) y dxdt \right),$$

sabemos que $\lambda\xi D\eta^0$, $D\eta^0$ e $D\theta$ são limitados e também se sabe que existe $c > 0$ tal que $|rot(w)| \leq c \, |\nabla w|$

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}s\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt \;\leq\; & cs\lambda^2\int_{Q_\omega}\theta e^{2s\alpha}\xi\,|\nabla w|\,|y|\,dxdt + c\Big(\int_{Q_\omega}\lambda^3\theta e^{2s\alpha}2s^2\xi\,|w|\,|y| + \\
& +s\lambda^2 e^{2s\alpha}\xi\,|w|\,|y| + s\theta e^{2s\alpha}\lambda^3\xi\,|w|\,|y|\,dxdt\Big) \\
\leq\; & c\int_{Q_\omega}\left(\frac{e^{s\alpha}\,|\nabla w|}{s^{1/2}\xi^{1/2}}\right)\left(|y|\,\xi^{3/2}s^{3/2}\lambda^2 e^{s\alpha}\right)dxdt + \\
& c\int_{Q_\omega}\left(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}e^{s\alpha}\,|w|\right)\left(s^{3/2}\lambda^2\xi^{3/2}e^{s\alpha}\,|y|\right)dxdt + \\
& c\int_{Q_\omega}\left(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}e^{s\alpha}\,|w|\right)\left(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}e^{s\alpha}\,|y|\right)dxdt + \\
& c\int_{Q_\omega}\left(s^{1/2}\lambda\xi^{1/2}e^{s\alpha}\,|w|\right)\left(s^{1/2}\lambda^2\xi^{1/2}e^{s\alpha}\,|y|\right)dxdt \\
\leq\; & c\left(\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}\,|\nabla w|^2\,dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{Q_\omega}s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt\right)^{1/2} + \\
& c\left(\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|w|^2\,dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{Q_\omega}s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt\right)^{1/2} + \\
& c\left(\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|w|^2\,dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt\right)^{1/2} + \\
& c\left(\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|w|^2\,dxdt\right)^{1/2}\left(\int_{Q_\omega}s\lambda^4\xi e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt\right)^{1/2},
\end{aligned}
$$

como s é muito grande tal que $1 \leq s < s^3$ e fazendo uso de que sempre se cumpre $ab \leq \dfrac{a^2}{2\epsilon} + \dfrac{b^2\epsilon}{2}$, tem-se

$$
\begin{aligned}
& \tilde{c}s\lambda^2\int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi\,|w|^2\,dxdt \leq \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}\frac{e^{2s\alpha}}{s\xi}\,|\nabla w|^2\,dxdt + \\
& c_1\int_{Q_\omega}s^3\lambda^4\xi^3e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt + c_2\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt + \qquad (2.48) \\
& \frac{1}{2}\int_{Q_\omega}s\lambda^2\xi e^{2s\alpha}\,|w|^2\,dxdt,
\end{aligned}
$$

como $c_0 < \check{\xi}(t) \leq \xi(x,t)$ para qualquer $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ e $1 \leq \lambda_0 \leq \lambda$ tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda^2 s\xi &= \lambda^2 s\frac{\xi^3}{\xi^2} \leq \frac{\lambda^2 s\xi^3}{c_0^2} \leq \frac{\lambda^4 s^3 \xi^3}{c_0^2} \\
\lambda^2 s\xi &\leq \frac{1}{c_0^2}\lambda^4 s^3 \xi^3
\end{aligned}$$

devido a esto temos $c_2 \displaystyle\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt \leq \tilde{c_2} \int_{Q_\omega} s\lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt$, considerando esto em 2.48 tem-se

$$\begin{aligned}
\tilde{c}s\lambda^2 \int_{Q_{\omega_0}} e^{2s\alpha}\xi |w|^2 \, dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} |\nabla w|^2 \, dxdt + \frac{1}{2}\int_{Q_\omega} s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 \, dxdt + \\
& c\int_{Q_\omega} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt
\end{aligned}$$

como esta última desigualdade se cumpre para todo $\overline{\omega_0} \subset \omega$ então para ω também se vai cumprir, logo de 2.46 tem-se

$$\begin{aligned}
\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2\right) dxdt \leq \\
c\left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} s^2\lambda^4\xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt\right) + \frac{1}{2}\int_Q \frac{e^{2s\alpha}}{s\xi} |\nabla w|^2 \, dxdt + \\
\frac{1}{2}\int_Q s\lambda^2 \xi e^{2s\alpha} |w|^2 \, dxdt + c\int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^3 e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt \\
\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi |w|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2 |y|^2\right) dxdt \leq \\
c\left(\int_Q e^{2s\alpha} |h|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^2 e^{2s\alpha} |y|^2 \, dxdt\right)
\end{aligned}$$

este último resultado nós permite escrever o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Existe* s_0, $\lambda_0 \geq 1$ *e* $c > 0$ *tais que para* $\lambda \geq \lambda_0$ *e para toda solução da equação de Navier-Stokes (com rot(y)=w) tem-se*

$$(2.49) \qquad \int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla w|^2}{s\xi} + s\lambda^2\xi\,|w|^2 + \lambda^2\,|\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\xi^2\,|y|^2\right)dxdt \leq$$
$$c\left(\int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt + \int_{Q_\omega} s^3\lambda^4\xi^2 e^{2s\alpha}\,|y|^2\,dxdt\right).$$

Do sistema adjunto (2.13) fazendo $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(T-t)$ para $t \in (0,T)$, obtemos

$$(2.50) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial t} - \Delta\tilde{\varphi} + \nabla\pi = (\bar{y}.\nabla)\tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi}.\nabla)\bar{y}, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ div(\tilde{\varphi}) = 0, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ \tilde{\varphi} = 0, & \text{em } \Gamma\times(0,T) \\ \tilde{\varphi}(0) = \dfrac{1}{\epsilon}y_\epsilon(T), & \text{em } \Omega \end{cases}$$

e também temos

$$(2.51) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \Delta w = rot\left[(\bar{y}.\nabla)\tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi}.\nabla)\bar{y}\right], & \text{em } \ \Omega\times(0,T) \\ \Delta\tilde{\varphi}(t) = rot(w(t)), & \text{em } \Omega \text{ e quase sempre em } \ (0,T) \\ \tilde{\varphi}(t) = 0, & \text{sobre } \Gamma \text{ e quase sempre em } \ (0,T) \end{cases} .$$

Onde $w = rot(\tilde{\varphi})$ e $h = (\bar{y}.\nabla)\tilde{\varphi} + (\tilde{\varphi}.\nabla)\bar{y}$

$$\begin{aligned} \int_Q e^{2s\alpha}\,|h|^2\,dxdt \ &\leq \ 4\int_Q e^{2s\alpha}\,|\nabla(\bar{y}\otimes\tilde{\varphi})|^2\,dxdt \\ &\leq \ c\int_Q e^{2s\alpha}\,|\nabla\tilde{\varphi}|^2\,dxdt, \end{aligned}$$

substituindo isto último em (2.49) tem-se

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla rot\varphi|^2}{s\xi}+s\lambda^2\xi\,|rot\varphi|^2+\lambda^2\,|\nabla\varphi|^2+s^2\lambda^4\xi^2\,|\varphi|^2\right)dxdt \leq$$

$$c\left(\int_Q e^{2s\alpha}\,|\nabla\varphi|^2\,dxdt+s^3\lambda^4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt\right),$$

e passando o primeiro termo do lado direito para a esquerda

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla rot\varphi|^2}{s\xi}+s\lambda^2\xi\,|rot\varphi|^2+\lambda^2(1-\frac{c}{\lambda^2})\,|\nabla\varphi|^2+s^2\lambda^4\xi^2\,|\varphi|^2\right)dxdt \leq$$

$$cs^3\lambda^4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt.$$

Como λ é suficientemente grande tal que $1-\dfrac{c}{\lambda^2}>0$ na parte esquerda se toma $\min\{1,1-\dfrac{c}{\lambda^2}\}$

$$\int_Q e^{2s\alpha}\left(\frac{|\nabla rot\varphi|^2}{s\xi}+s\lambda^2\xi\,|rot\varphi|^2+\lambda^2\,|\nabla\varphi|^2+s^2\lambda^4\xi^2\,|\varphi|^2\right)dxdt \leq$$

(2.52)

$$cs^3\lambda^4\int_{Q_\omega} e^{2s\alpha}\xi^3\,|\varphi|^2\,dxdt.$$

Para $s\geq s_0$ e $\lambda\geq\lambda_0$, vamos a definir para $(x,t)\in\Omega\times[0,T]$

$$\tilde{\alpha}(x,t)=\begin{cases}\alpha(x,T/2);\ t\in[0,T/2]\\ \\ \alpha(x,t);\ t\in[T/2,T]\end{cases}\qquad \tilde{\xi}(x,t)=\begin{cases}\xi(x,T/2);\ t\in[0,T/2]\\ \\ \xi(x,t);\ t\in[T/2,T]\end{cases}\tag{2.53}$$

Fazendo estimações tipo de energia para as equações (2.50), (2.51) e pelo fato da desigualdade (2.52) junto com as funções (2.53) se vai conseguir uma desigualdade similar a (2.52) mas com os novos pesos de Carleman.

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\left(\frac{|\nabla rot\varphi|^2}{s\tilde{\xi}}+s\lambda^2\tilde{\xi}\,|rot\varphi|^2+\lambda^2\,|\nabla\varphi|^2+s^2\lambda^4\tilde{\xi}^2\,|\varphi|^2\right)dxdt \leq$$

(2.54)

$$cs^3\lambda^4\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3\,|\varphi|^2\,dxdt$$

Novamente fazendo uso das estimações de energia junto com (2.54) nós podemos obter a Desigualdade de Observabilidade para o problema de Stokes

$$(2.55)\qquad \|\varphi(0)\|_H^2+\int_Q \tilde{\xi}^2 e^{2s\tilde{\alpha}}|\varphi|^2\,dxdt+\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|\nabla\varphi|^2\,dxdt\leq c\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|\varphi|^2\,dxdt$$

Voltando ao problema de controle nulo com dato inicial $y_0 \in H$ e g satisfazendo $\int_Q e^{-2s\alpha}|g|^2\,dxdt < +\infty$. Junto com os resultados da seção anterior temos o seguinte resultado de controlabilidade para o sistema linearizado de Navier-Stokes

Lema 2.5. *Assumindo que $y_0 \in H$ e g satisfaz $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}|g|^2\,dxdt < +\infty$, então existe $v \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que a solução y de (2.9) satisfaz.*

$$y(T)=0.$$

2.5 Controle e solução de decrescimento exponencial

Nesta seção mostraremos que podemos achar um controle v o qual é exponencialmente decrescente quando $t \longrightarrow T$ e $y(T)=0$.

Definamos:

$$X_0=\{(y,q)\in\mathcal{C}^\infty(\overline{Q}),\ div(y)=0 \text{ em } \ Q,\ y=0 \text{ sobre } \Sigma,\ \int_\omega q(t)dx=0,\ \text{q. s em } \ (0,T)\}$$

X_0 é um espaço vetorial e denotemos por $L^*y=-\dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y-\bar{y}.D(y)$ e definamos a forma bilinear:

$$\widetilde{a}: X_0\times X_0 \quad\longrightarrow\quad \mathbb{R}$$

$$((y,q);(\widetilde{y},\widetilde{q})) \quad\longrightarrow\quad \widetilde{a}\left((y,q),(\widetilde{y},\widetilde{q})\right).$$

$$\widetilde{a}\left((y,q),(\widetilde{y},\widetilde{q})\right)=\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}(L^*y+\nabla q)(L^*\widetilde{y}+\nabla\widetilde{q})dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3 y\widetilde{y}dxdt.$$

Vejamos que $\widetilde{a}$ é um produto interno

Para provar que $\widetilde{a}$ é um produto interno so é preciso provar que para (y,q) elemento de X_0 tal que $\widetilde{a}\left((y,q),(y,q)\right))=(0,0)$ implique que (y,q) e igual a $(0,0)$, da hipóteses se tem que $\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}|L^*y+\nabla q|^2\,dxdt+\int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3|y|\,dxdt=0$ então $e^{2s\tilde{\alpha}}|L^*y+\nabla q|^2=0$ como $e^{2s\tilde{\alpha}}>0$ se tem que

$$(2.56)\qquad L^*y+\nabla q=0$$

e como $L^*y = -\dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y - \bar{y}.D(y)$, então $L^*y + \nabla q = h$ substituindo isto na hipóteses se tem $\displaystyle\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} |h|^2 \, dxdt + \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}} \tilde{\xi}^3 |y|^2 \, dxdt = 0$, fazendo uso da desigualdade de Carleman em 2.54 e do último resultado

$$\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \left(\frac{|\nabla rot(y)|^2}{s\tilde{\xi}} + s\lambda^2\tilde{\xi} |rot(y)|^2 + \lambda^2 |\nabla y|^2 + s^2\lambda^4\tilde{\xi}^2 |y|^2 \right) dxdt \leq 0$$

daqui obtemos

$$\int_Q s^2\lambda^4\tilde{\xi}^2 |y|^2 \, dxdt = 0$$

isto nós da $y = 0$ em Q

e de (2.56) se chega a que $\nabla q = 0$ por tanto $q = c(t)$ so depende de t mas na definição de X_0

$$\int_\omega q(t)dx = 0 \text{ quase sempre}$$

$$\int_\omega c(t)dx = 0 \text{ quase sempre}$$

$$c(t)m(\omega) = 0 \text{ quase sempre}$$

$$c(t) = 0$$

$$q = 0,$$

então $(y, q) = (0, 0)$ e portanto $\widetilde{a}(\cdot, \cdot)$ é um produto interno.

Fazendo uso do teorema 1.55 de completação o qual nós dize que existe X um espaço de Hilbert com este produto interno $\widetilde{a}(\cdot, \cdot)$ tal que $X_0 \subset X$ denso.

Pela desigualdade de Observabilidade (2.55) para y tem-se

$$\|y(0)\|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}} \left(|y|^2 \tilde{\xi}^2 + |\nabla y|^2 \right) dxdt \leq c\widetilde{a}\left((y, q), (y, q)\right) \tag{2.57}$$

Agora definamos o funcional

$l : X \longrightarrow \mathbb{R}$ para $(y,q) \in X$ se define $\langle l,(y,q)\rangle = (y_0, y(0))_H - \displaystyle\sum_{i,j=1}^{N} \int_Q g_{ij} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} dxdt$

a) l esta bem definido.

b) l é linear.

c) l é continuo, com efeito

$$\begin{aligned}
|\langle l,(y,q)\rangle| &= \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c\int_Q |g|\,|\nabla y|\,dxdt \\
&= \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c\int_Q e^{-s\tilde{\alpha}}\,|g|\,e^{2s\tilde{\alpha}}\,|\nabla y|\,dxdt \\
&\leq \|y_0\|_H \|y(0)\|_H + c\left(\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}\,|g|^2\,dxdt\right)^{1/2}\left(\int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}\,|\nabla y|^2\,dxdt\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

e como $\displaystyle\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}\,|g|^2\,dxdt < +\infty$ tem-se:

$$\begin{aligned}
|\langle l,(y,q)\rangle| &\leq c\left(\|y(0)\|_H + \left\|e^{2s\tilde{\alpha}}\nabla y\right\|_{L^2(Q)}\right) \\
|\langle l,(y,q)\rangle|^2 &\leq c\left(\|y(0)\|_H^2 + \left\|e^{2s\tilde{\alpha}}\nabla y\right\|_{L^2(Q)}^2\right) \\
|\langle l,(y,q)\rangle|^2 &\leq c\left(\|y(0)\|_H^2 + \int_Q e^{2s\tilde{\alpha}}(|\nabla y|^2 + \tilde{\xi}^2\,|y|^2)dxdt\right),
\end{aligned}$$

e por (2.57) tem-se

$$\begin{aligned}
|\langle l,(y,q)\rangle|^2 &\leq c\widetilde{a}\left((y,q),(y,q)\right) \\
|\langle l,(y,q)\rangle| &\leq c\,\|(y,q)\|_X\,,
\end{aligned}$$

e por tanto l é continua.

Como $\widetilde{a}(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear continua e coerciva e $l \in X$ então nós podemos usar o teorema de Lax Milgram e por tanto existe um único $(y,q) \in X$ tal que:

$$\tilde{a}\left((y,q),(\tilde{y},\widetilde{q})\right)=\langle l,(\tilde{y},\tilde{q})\rangle \tag{2.58}$$

Definamos:

$$\left\{\begin{array}{l}\check{y}=e^{2s\tilde{\alpha}}\left(L^{*}y+\nabla q\right)\ \text{ em } Q\\[2em] \check{v}=-e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^{3}y1_{\omega}\ \text{em }\ Q_{\omega}\end{array}\right. .$$

Como $\lim\limits_{t\longrightarrow T^{-}}\tilde{\alpha}(x,t)=-\infty$ daqui resulta que $e^{2s\tilde{\alpha}}$ e $e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^{3}$ são limitados em Q.

$$\begin{aligned}\int_{Q}e^{4s\tilde{\alpha}}\left|L^{*}y+\nabla q\right|^{2}dxdt &\leq c\int_{Q}e^{2s\tilde{\alpha}}\left|L^{*}y+\nabla q\right|^{2}\\ \int_{Q}\left|\check{y}\right|^{2}dxdt &\leq c\end{aligned}$$

Da mesma maneira se chega a que

$$\begin{aligned}\int_{Q_{\omega}}e^{4s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^{6}\left|y\right|^{2}dxdt &\leq c\int_{Q_{\omega}}e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^{3}\left|y\right|^{2}dxdt\\ \int_{Q_{\omega}}e^{4s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^{6}\left|y\right|^{2}dxdt &\leq c\\ \int_{Q_{\omega}}\left|\check{v}\right|^{2}dxdt &< c.\end{aligned}$$

Portanto $\check{y}\in\left[L^{2}(Q)\right]^{N}$ e $\check{v}\in\left[L^{2}(Q_{\omega})\right]^{N}$.
De (2.58) usando as variáveis $\check{y}$ e $\check{v}$

$$\int_{Q}\check{y}\left(L^{*}\widetilde{y}+\nabla\widetilde{q}\right)dxdt=(y_{0},\widetilde{y}(0))_{H}-\sum_{i,j=1}^{N}\int_{Q}g_{ij}\frac{\partial\widetilde{y}_{i}}{\partial x_{j}}dxdt+\int_{Q_{\omega}}\check{v}\widetilde{y}dxdt,$$

para todo $(\widetilde{y},\widetilde{q})\in X$.

Consideremos o problema :

$$(2.59)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla(y \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y) + \nabla p = \nabla g + \check{v}1_\omega, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Dizemos que y junto com p é a única solução por transposição de (2.59) em $\left[L^2(Q)\right]^N$ se cumpre que para todo $b \in \left[L^2(Q)\right]^N$

$$\int_Q ybdxdt = (y_0, y(0))_H - \sum_{i,j=1}^{N} \int_Q g_{ij} \frac{\partial \widetilde{y}_i}{\partial x_j} dxdt + \int_{Q_\omega} \check{v}\widetilde{y}dxdt,$$

onde $\widetilde{y}$ junto com $\widetilde{q}$ são solução de:

$$\begin{cases} L^*\widetilde{y} + \nabla\widetilde{q} = b, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(\widetilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ \widetilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ \widetilde{y}(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Como nosso $\check{y}$ junto com p é solução por transposição de (2.59) a qual é única, mas o problema (2.59) tem uma única solução fraca em $\mathcal{C}\left([0,T], H\right) \cap L^2\left(0,T,V\right)$ que também é uma solução por transposição então $\check{y} \in \mathcal{C}\left([0,T], H\right) \cap L^2\left(0,T,V\right)$ e das propriedades de $\check{y}$ se tem $\displaystyle\int_Q e^{-2\tilde{\alpha}} \left|\check{y}\right|^2 dxdt = c < +\infty$.

Afirmação: $\check{y}(T) = 0$.

Suponhamos que $\check{y}(T) \neq 0$ então $\|\check{y}(T)\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} > c_1 > 0$, como $(T-t)e^{-2s\check{\alpha}(t)} \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow T^-$ então para $\dfrac{4c}{c_1}$ se tem que existe $\epsilon > 0$ tal que $\dfrac{4c}{c_1} < (T-t)e^{-2s\check{\alpha}(t)}$ para todo $t \in [\epsilon, T]$

$$
\begin{aligned}
\frac{4c}{c_1}\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} &\leq (T-t)e^{-2s\check{\alpha}(t)}\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} \\
\frac{4c}{c_1}\int_\epsilon^T \frac{\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}}{T-t}dt &\leq \int_\epsilon^T e^{-2s\check{\alpha}(t)}\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{L^2(\Omega)^N} dt \\
\frac{4c}{c_1}\int_\epsilon^T \frac{\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}}{T-t}dt &\leq c \\
\frac{4c}{c_1}\int_\delta^T \frac{\left\|\check{y}(t)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N}}{T-t}dt &\leq c, \text{ onde, } \delta \in [\epsilon, T] \\
\frac{4}{c_1}\frac{1}{T-\delta}\int_\delta^T \left\|\check{y}(t)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} dt &\leq 1, \text{ fazendo } \delta \longrightarrow T^- \\
\frac{4}{c_1}\left\|\check{y}(T)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} &\leq 1 \\
4 &\leq 1
\end{aligned}
$$

Isto ultimo é absurdo. Por tanto $\left\|\check{y}(T)\right\|^2_{[L^2(\Omega)]^N} = 0$ então $\check{y}(T) = 0$ em Ω.
E do fato que $\int_{Q_\omega} \frac{e^{-2s\tilde{\alpha}}}{\tilde{\xi}^3}\left|\check{v}\right|^2 dxdt = \int_{Q_\omega} e^{2s\tilde{\alpha}}\tilde{\xi}^3\left|y\right|^2 dxdt < +\infty$ e portanto $\check{v}$ é exponencialmente decrescente quando $t \longrightarrow T^-$.

Tudo isto nós leva a enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.6. *Se $y_0 \in H$ e g satisfazendo $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}\left|g\right|^2 dxdt < +\infty$, então existe um controle v e uma solução y de* (2.9) *tal que $y(T) = 0$ e $\int_Q e^{-2s\tilde{\alpha}}\left|y\right|^2 dxdt < +\infty$ e $\int_{Q_\omega} \frac{e^{-2s\tilde{\alpha}}}{\tilde{\xi}^3}\left|v\right|^2 dxdt < +\infty$*

2.6 Problema Não Linear

Nós vamos a seguir chamando $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\xi}$ por α e ξ onde em $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$

$$
\hat{\alpha}(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} \alpha(x,t) = \frac{e^{\lambda(\left|\eta^0\right|_\infty + m_1)} - e^{\lambda(\left|\eta^0\right|_\infty + m_2)}}{l^4(t)}
$$

$$\hat{\xi}(t)=\max_{x\in\overline{\Omega}}\xi(x,t)=\frac{e^{\lambda(|\eta^0|_\infty+m_1)}}{l^4(t)}$$

Consideremos o seguinte problema não linear a estudar:

$$(2.60)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t}-\Delta y+\nabla.(y\otimes\bar{y}+\bar{y}\otimes y)+\nabla.(y\otimes y)+\nabla q=v1_\omega, & \text{em } \Omega\times(0,T)\\ div(y)=0, & \text{em } \Omega\times(0,T)\\ y=0, & \text{sobre } \Gamma\times(0,T)\\ y(0)=y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Queremos achar um controle v e uma correspondente solução y de (2.60) tal que $y(T)=0$ para isso definamos o seguinte conjunto que é um espaço vetorial:

$$\begin{aligned} E &= \{(y,v), e^{-s\alpha}y\in\left[L^2(Q)\right]^N,\ \frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v\in\left[L^2(Q_\omega)\right]^N,\ e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y\in L^4\left(0,T,\left[L^{12}(\Omega)\right]^N\right)\\ &\quad \cap L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H),\ \exists q,\ \exists k,\ e^{-s\alpha}k\in L^2\left(0,T,[L^6(\Omega)]^{N^2}\right),\\ &\quad Ly+\nabla q-v1_\omega=\nabla k,\ y(0)\in H\cap L^4(\Omega)^N\} \end{aligned}$$

Neste espaço vetorial definamos a seguinte norma, para $(y,v)\in E$

$$\begin{aligned} \|(y,v)\|_E^2 &= \left\|e^{-s\alpha}y\right\|^2_{L^2(Q)^N}+\left\|\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v\right\|^2_{L^2(Q_\omega)^N}+\left\|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y\right\|^2_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)}+\\ &\quad \left\|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y\right\|^2_{L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H)}+\left\|e^{-s\alpha}k\right\|^2_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})}+\|y(0)\|^2_{L^4(\Omega)^N}, \end{aligned}$$

é fácil provar que $\|.\|_E$ é uma norma, agora nós vamos a provar que E é um espaço de Banach com esta norma, seja $(y_m,v_m)_{m=1}^\infty\subset E$ uma sequencia de Cauchy, então pela norma de E se tem que $\dfrac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v_m$ é uma sequencia de Cauchy em $L^2(Q_\omega)^N$ e como este espaço es de Banach então existe $\tilde{v}\in L^2(Q_\omega)^N$ tal que $\dfrac{e^{-s\alpha}v_m}{\xi^{3/2}}\longrightarrow\tilde{v}$ em $L^2(Q_\omega)^N$

$$\begin{aligned} \|v_m-\tilde{v}\xi^3e^{s\alpha}\|_{L^2(Q_\omega)^N} &= \|\left(\xi^{3/2}e^{s\alpha}\right)\left(\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v_m-\tilde{v}\right)\|_{L^2(Q_\omega)^N}\\ &\le \|\xi^{3/2}e^{s\alpha}\|_{L^\infty(Q_\omega)^N}\|\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v_m-\tilde{v}\|_{L^2(Q_\omega)^N}\\ &\le c\|\frac{e^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}}v_m-\tilde{v}\|_{L^2(Q_\omega)^N}. \end{aligned}$$

Fazendo $m \longrightarrow +\infty$ se vai ter que:

$$v_m \longrightarrow v, \ \text{em} L^2(Q_\omega)^N. \tag{2.61}$$

Onde $v = \tilde{v}\xi^{3/2}e^{s\alpha}$, de igual maneira $e^{-s\alpha}y_m$ é de Cauchy em $L^2(Q_\omega)^N$, então existe $\tilde{y} \in L^2(Q_\omega)^N$ tal que $e^{-s\alpha}y_m \longrightarrow \tilde{y}$ em $L^2(Q_\omega)^N$ daqui obtemos que

$$y_m \longrightarrow y \text{ em } L^2(Q_\omega)^N, \tag{2.62}$$

onde $y = e^{s\alpha}\tilde{y}$. Da mesma maneira se consegui provar que existe $k \in L^2(Q)^N$ tal que $k_m \longrightarrow k$ em $L^2(Q)^N$, então por isto último junto com 2.61 e 2.62 tem-se $(y_m, v_m) \longrightarrow (y, v)$ em $(E, \|.\|_E)$. Por tanto E é um espaço de Banach.

Definamos o seguinte conjunto:

$$G = \{(\nabla k, y_0); \ e^{-s\alpha}k \in L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}), y_0 \in H \cap L^4(\Omega)^N\}$$

G é um espaço vetorial. Definamos uma norma para G para $(\nabla k, y_0) \in G$

$$\|(\nabla k, y_0)\|_G^2 = \|e^{-s\alpha}\|^2_{L^2\left(0,T,L^6(\Omega)^{N^2}\right)} + \|y_0\|^2_{L^4(\Omega)^N},$$

é fácil ver que é uma norma, vejamos que $(G, \|.\|_G)$ é um espaço de Banach.
Com efeito, tomemos $(\nabla k_m, y_{0m})_{m=1}^{\infty}$ uma sucessão de Cauchy em $(G, \|.\|_G)$ então (y_{0m}) é uma sequencia de Cauchy em $H \cap L^4(\Omega)^N$ (devido á norma de G e a que $L^4(\Omega) \subset L^2(\Omega)$) e portanto existe $y_0 \in H \cap L^4(\Omega)^N$ tal que $y_{0m} \longrightarrow y_0$.

Também $e^{-s\alpha}k_m$ é uma sequencia de Cauchy em $L^2\left(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}\right)$ e como ele é completo existe $\tilde{k} \in L^2\left(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}\right)$ tal que $e^{-s\alpha}k_m \longrightarrow \tilde{k}$ em $L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}$ devido a isto tem-se $k_m \longrightarrow k$ em $L^2(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}$, onde $k = e^{s\alpha}\tilde{k}$ logo $(G, \|.\|_G)$ é um espaço de Banach.
Definamos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} A: & E & \longrightarrow & G \\ & (y, v) & \longrightarrow & A(y, v) = (Ly + \nabla.(y \otimes y) + \nabla p - v1_\omega, y(0)) \end{array}$$

A esta bem definida, com efeito para $(y, v) \in E$ vamos a garantir que $A(y, v) \in G$.
Da definição de E se sabe que existe $\tilde{k}$ tal que $Ly + \nabla p - v1_\omega = \nabla\tilde{k}$ então temos que $A(y, v) = (\nabla.k + \nabla(y \otimes y), y(0))$ e de E temos

$$e^{-s\alpha}\tilde{k} \in L^2\left(0, T, L^6(\Omega)^{N^2}\right), \tag{2.63}$$

e $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y \in L^4\left(0,T,L^{12}(\Omega)^N\right) \cap L^2\left(0,T,V\right) \cap L^\infty\left(0,T,H\right)$

$$\int_0^T \|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y(t)\|^4_{L^{12}(\Omega)}dt = \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y(t)\right|^2 dx\right) dt < +\infty. \tag{2.64}$$

A partir daqui obtemos que $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y\otimes y) \in L^2\left(0,T,L^6(\Omega)^{N^2}\right)$, com efeito

$$\begin{aligned}
\int_0^T \|e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}\left(y\otimes y\right)\|^2_{L^6(\Omega)^{N^2}}dt &= \int_0^T \left(\int_\Omega \left|e^{-9s\hat{\alpha}}\right| \left|y\otimes y\right|^6 dx\right)^{1/3} dt \\
&= \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y_i\right|^6 \left|y_j\right|^6 dx\right)^{1/3} dt \\
&\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y_i\right|^{12} dx\right)^{1/2}\right. \\
&\qquad \left.\left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y_j\right|^{12} dx\right)^{1/2}\right]^{1/3} dt \\
&\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N \frac{1}{2}\left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y_i\right|^{12} + \int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y_j\right|^{12} dx\right)\right]^{1/3} dt \\
&\leq c\int_0^T \left(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\left|y\right|^{12} dx\right)^{1/3} dt \\
&\leq c\int_0^T \left\|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y(t)\right\|_{L^{12}(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

De (2.64) tem-se $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}(y\otimes y) \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2}) < +\infty$ e por tanto $e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}}\left(y\otimes y\right) \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$e como $-\alpha \leq -\breve{\alpha} \leq -\dfrac{3}{2}\hat{\alpha}$, então

$$e^{-s\alpha}\left(y\otimes y\right) \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2}). \tag{2.65}$$

Chamemos $k = \tilde{k} + y\otimes y$ e por (2.63) e (2.65) tem-se $e^{-s\alpha}k \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$ e como $A(y,v) = (\nabla k, y(0))$.

De acima e junto ao fato de que $y(0) \in H \cap L^4(\Omega)^N$ tem-se $A(y,v) \in G$.

Agora nós vamos provar que $A \in \mathcal{C}^1(E,G)$

$$A(y,v) \;=\; (Ly + \nabla.(y\otimes y) + \nabla p - v1_w, y(0))$$

$$A(y,v) \;=\; (Ly + \nabla p - v1_w, y(0)) + (\nabla.(y\otimes y), 0)\,,$$

como a parte linear é de classe $\mathcal{C}^1$, então nós só devemos provar que $\nabla(y\otimes y)$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Como a aplicação $((y,v),(\tilde{y},\tilde{v})) \longrightarrow (\nabla(y\otimes\tilde{y}),0)$ é uma aplicação bilinear so precisamos provar que é continua de $E\times E$ em G.

$$\begin{aligned}
\|(\nabla(y\otimes\tilde{y}),0)\|_G^2 &= \left\|e^{-s\alpha}(y\otimes\tilde{y})\right\|^2_{L^2\left(0,T,L^6(\Omega)^{N^2}\right)} \\
&\leq \int_0^T \left(\sum_{i,j=1}^N \int_\Omega e^{-6s\alpha}\,|y_i|^6\,|\tilde{y}_j|^6\,dx\right)^{1/3} dt \\
&\leq \int_0^T \left[\sum_{i,j=1}^N (\int_\Omega e^{-6s\alpha}\,|y_i|^{12}\,dx)^{1/2}(\int_\Omega e^{-6s\alpha}\,|\tilde{y}_j|^{12}\,dx)^{1/2}\right]^{1/3} dt
\end{aligned}$$

$$\leq \; c\int_0^T \left[(\int_\Omega e^{-6s\alpha}\,|y|^{12}\,dx)^{1/6}(\int_\Omega e^{-6s\alpha}\,|\tilde{y}|^{12}\,dx)^{1/6}\right] dt,$$

e como $-6s\alpha \leq -9s\hat{\alpha}$

$$\begin{aligned}
\|(\nabla(y\otimes\tilde{y}),0)\|_G^2 &\leq c\int_0^T \left[(\int_\Omega \hat{e}^{-9s\hat{\alpha}}\,|y|^{12}\,dx)^{1/6}(\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\,|\tilde{y}|^{12}\,dx)^{1/6}\right] dt \\
&\leq c\left[\int_0^T (\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\,|y|^{12}\,dx)^{1/3} dt\right]^{1/2} \left[\int_0^T (\int_\Omega e^{-9s\hat{\alpha}}\,|\tilde{y}|^{12}\,dx)^{1/3} dt\right]^{1/2} \\
&\leq c\left\|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y\right\|^2_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)} \left\|e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}\tilde{y}\right\|^2_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)} \\
&\leq c\,\|y\|_E^2\,\|\tilde{y}\|_E^2\,.
\end{aligned}$$

Portanto $A \in \mathcal{C}^1(E,G)$.
Para $(y,v)\in E$

$$A'(0,0)\,[y,v] = (Ly + \nabla p - v1_\omega, y(0))$$

Vamos provar que $A'(0,0) : E \longrightarrow G$ é sobrejetiva. Seja $(\nabla h, y_0) \in G$ pelo teorema 2.6 existe (y, v) tal que:

$$(2.66) \qquad \begin{cases} Ly + \nabla p = v1_\omega + \nabla h, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases} .$$

Com $y(T) = 0$, $y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$, $e^{-s\alpha} y \in L^2(Q)^N$ e $\dfrac{e^{-s\alpha} v}{\xi^{3/2}} \in L^2(Q_\omega)^N$.

O que nós vamos mostrar agora é que $(y, v) \in E$, mas para isso so fica provar que $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \cap L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)$.

Definamos:

$$(2.67) \qquad \tilde{y} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y,\ \tilde{h} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} h,\ \tilde{p} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} p \text{ e } \tilde{v} = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} v$$

Agora vamos a ver a regularidade das funções de acima.

Como $e^{-s\alpha} h \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$ então

$$(2.68) \qquad \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |h|^6 \, dx\right)^{1/3} dt < +\infty$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{h}\|^2_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})} &= \int_0^T \left(\int_\Omega |\tilde{h}|^6 dx\right)^{1/3} dt \\ &= \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-\frac{9}{2}s\hat{\alpha}} |h|^6 \, dx\right)^{1/3} dt, \end{aligned}$$

e como $-\dfrac{9}{2}s\hat{\alpha} \leq -6s\alpha$,

$$\|\tilde{h}\|^2_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})} \leq \int_0^T \left(\int_\Omega e^{-6s\alpha} |h|^6 \, dx\right)^{1/3} dt$$

de isto último junto com a desigualdade (2.68) tem-se

$$\|\tilde{h}\|^2_{L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})} < +\infty$$

Portanto $\tilde{h} \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$ e como $(y,v) \in E$ tem-se que $\dfrac{ve^{-s\alpha}}{\xi^{3/2}} \in L^2(Q_\omega)^N$.

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}\|^2_{L^2(Q_\omega)^N} &= \int_0^T \|\tilde{v}\|^2_{L^2(\omega)} dt \\
&= \int_0^T \int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} |v|^2 \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\omega (\frac{e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} |v|}{\xi^{3/2}})(\xi^{3/2} e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} |v|) dxdt \\
&\leq \int_0^T (\int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx)^{1/2} (\int_\omega e^{-\frac{3}{2}s\hat{\alpha}} |v|^2 \xi^3 dx)^{1/2} dt,
\end{aligned}$$

e como $-\dfrac{3}{2}s\hat{\alpha} \leq -2s\alpha$

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}\|^2_{L^2(Q_\omega)^N} &\leq \int_0^T (\int_\omega e^{-2s\hat{\alpha}} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx)^{1/2} (\int_\omega e^{\frac{s}{2}\hat{\alpha}} e^{-2s\hat{\alpha}} |v|^2 \xi^3 dx)^{1/2} dt \\
&\leq c \int_0^T \left[\int_\omega (e^{\frac{s}{2}\hat{\alpha}} \xi^6)(e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3}) dx \right]^{1/2} dt,
\end{aligned}$$

é possível limitar $e^{\frac{s}{2}\hat{\alpha}}\xi^6$ assim tem-se

$$\begin{aligned}
\|\tilde{v}\|^2_{L^2(Q_\omega)^N} &\leq c \int_0^T (\int_\omega e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3} dx)^{1/2} dt \\
&\leq c + c \int_0^T \int_\omega e^{-2s\alpha} \frac{|v|^2}{\xi^3} dxdt \\
&\leq c + \|e^{-s\alpha} \frac{v}{\xi^{3/2}}\|^2_{L^2(Q_\omega)^N} \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Por tanto $\tilde{v} \in L^2(Q_\omega)$

Da equação (2.66) e das funções em (2.67) vamos ter:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \tilde{p} = \nabla.\tilde{h} + \tilde{v}1_\omega - \dfrac{3s}{4}\dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}\tilde{y} & ,\text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \tilde{y}(0) = e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

$$\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}\tilde{y} = \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}} y = (\frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}})(e^{-s\hat{\alpha}} y)$$

De (2.29)

$$\left| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right| \;\; \leq \;\; c\hat{\xi}^{5/4} \left| e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right|$$

Verifica-se que $\hat{\xi}^{5/4} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}}$ é limitado e portanto:

$$\left| \frac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \right| \;\; \leq \;\; c,$$

e logo $\dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t} e^{\frac{s}{4}\hat{\alpha}} \in L^\infty(Q)^N$ e do fato se tem $e^{-s\hat{\alpha}} y \in L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)$ por isto tem-se que $\dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}\tilde{y} \in L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)$.

Chamemos por $\tilde{k} = \tilde{v}1_\omega - \dfrac{3}{4}s\dfrac{\partial \hat{\alpha}}{\partial t}\tilde{y} \in L^2(0,T,L^2(\Omega)^N)$ e consideremos o seguinte sistema:

$$(2.69) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla.(\bar{y} \otimes \tilde{y} + \tilde{y} \otimes \bar{y}) + \nabla \tilde{p} = \nabla \tilde{h} + \tilde{k}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \tilde{y}(0) = y_0 e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}(0)}, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Pelos resultados de existência e unicidade de se tem-se que

$$(2.70) \qquad \tilde{y} \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$$

pelo fato de $L^2(0,T,V) \hookrightarrow L^2(0,T,L^6(\Omega)^N)$ e como $\bar{y} \in L^\infty(Q)^N$ vai implicar $\bar{y} \otimes \tilde{y},\ \tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$, chamemos por $\bar{h} = \tilde{h} - \bar{y} \otimes \tilde{y} - \tilde{y} \otimes \bar{y} \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^{N^2})$ assim substituindo em (2.69)

$$
(2.71) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - \Delta \tilde{y} + \nabla \tilde{p} = \nabla . \bar{h} + \tilde{k}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \tilde{y}(0) = y_0 e^{-\frac{3}{4} s \hat{\alpha}(0)}, & \text{em } \Omega \end{cases} .
$$

Mostraremos que $\tilde{y} \in L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)$, com efeito seja $k \in L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^N)$ pelo lema 1.50 existe uma única solução de

$$
\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

Desta última equação junto com (2.71) tem-se

$$
(2.72) \qquad \int_\Omega z(0)\tilde{y}(0)dx - \int_Q \tilde{h} \nabla z dxdt + \int_Q z\tilde{k} dxdt = \int_Q k\tilde{y} dxdt,
$$

o que vemos aqui é que $\tilde{y}$ é a solução por transposição de (2.71). Definamos

$$
\begin{array}{rcl} F : L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^N) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ k & \longrightarrow & \langle F, k \rangle , \end{array}
$$

onde $\langle F, k \rangle = \displaystyle\int_\Omega z(0)\tilde{y}(0)dx - \int_Q \bar{h} \nabla z dxdt + \int_Q z\tilde{k} dxdt$, $\tilde{y}$, $\bar{h}$ e $\tilde{k}$ são fixos tem-se F é linear, vejamos agora que F é continua

$$
\begin{aligned} |\langle F, k \rangle| &\leq c(\|z_0\|_{L^{4/3}(\Omega)^N} + \|\nabla z\|_{L^2(0,T,L^{6/5}(\Omega)^N)} + \|z\|_{L^2(Q)^N}) \\ |\langle F, k \rangle| &\leq c \, \|k\|_{L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^N)} \end{aligned}
$$

Portanto pela unicidade de solução por transposição tem-se $F = \tilde{y}$, portanto $\tilde{y} \in (L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^N))' \equiv L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)$, de isto junto com 2.70 vamos ter $e^{-\frac{3}{4}s\hat{\alpha}}y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H) \cap L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^N)$ e portanto $A'(0,0)$ é sobrejetiva de E em G.

Fazendo uso do seguinte teorema o qual é provado em [20] vamos ter a controlabilidade local nula do problema.

Teorema 2.7. *Seja B_1 e B_2 dois espaços de Banach e $A : B_1 \longrightarrow B_2$ satisfazendo $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$. Assumindo que $e_0 \in B_1$, $A(e_0) = h_0$ e $A'(e_0) : B_1 \longrightarrow B_2$ é sobrejetiva. Então existe $\delta > 0$ tal que para todo $h \in B_2$ satisfazendo $\|h - h_0\|_{B_2} < \delta$ existe solução da equação*

$$A(e) = h, \;\; e \in B_1$$

.

Tome $e_0 = (0,0)$ e $h_0 = (0,0)$ tal que este teorema nós vai dar a controlabilidade local nula de (2.60)

Capítulo 3

Controlabilidade do sistema de Navier-Stokes N-dimensional com N-1 controles escalares

Neste capitulo, apresentamos um resultado sobre a controlabilidade local exata por trajetórias para um sistema do tipo Navier-Stokes N-dimensional. Em um primer passo, enunciaremos uma nova desigualdade do tipo Carleman para o sistema adjunto associado ao problema linear de Navier-Stokes e como consequência de isso vamos ter a desigualdade de Observabilidade. Em seguida, obteremos um resultado sobre a controlabilidade nula para o sistema linearizado com N-1 controles escalares. Ao final, devido a um teorema da função inversa, conseguiremos a controlabilidade local exata por trajetórias do sistema N-dimensional de Navier-Stokes com N-1 controles escalares.

3.1 Formulação do problema

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (N=2 ou N=3) é aberto, limitado e conexo com fronteira $\partial\Omega$ de $\mathcal{C}^2$ e $\mathcal{O} \subset \Omega$ é um subconjunto aberto e dado $T > 0$ chamemos por $Q = \Omega \times (0,T)$, $\Sigma = \partial\Omega \times (0,T)$, $\partial\Omega = \Gamma$ e $\eta(x)$ é o vetor normal unitário de Ω em um ponto $x \in \partial\Omega$. Nós estudaremos a controlabilidade local exata por trajetórias do problema de Navier-Stokes.

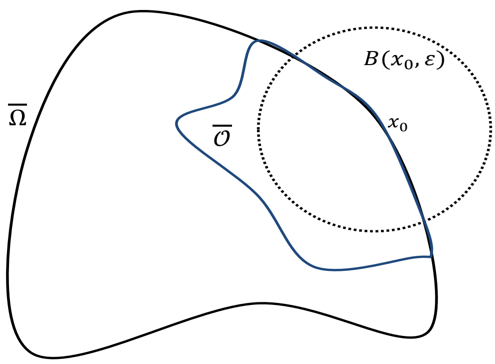
$$
(3.1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (y.\nabla)y + \nabla p = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

chamemos por $E = \begin{cases} H, & \text{se } N = 2 \\ [L^4(\Omega)]^3 \cap H, & \text{se } N = 3 \end{cases}$

Para nosso problema 3.1 assumiremos que a região de controle $\mathcal{O}$ é adjacente á fronteira $\partial\Omega$, isto é:

$$
(3.2) \qquad \exists \ x_0 \in \partial\Omega \ \ e \ \ \exists \ \epsilon > 0 \text{ tal que } \ B(x_0, \epsilon) \cap \partial\Omega \subset \overline{\mathcal{O}} \cap \partial\Omega
$$

Aqui um esboço ilustrado de como $\mathcal{O}$ é adjacente na fronteira de Ω



Consideremos o problema:

$$
(3.3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \bar{y}}{\partial t} - \Delta \bar{y} + (\bar{y}.\nabla)\bar{y} + \nabla \bar{p} = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\bar{y}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \bar{y} = 0, & \text{sobre } \ \Gamma \times \times (0,T) \\ \bar{y} = \bar{y}_0, & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

Nós queremos provar que o problema 3.1 é localmente exatamente controlável por trajetórias isto é para $(\bar{y}, \bar{p})$ solução fraca do problema 3.3 satisfazendo :

$$\text{(3.4)} \qquad \bar{y} \in L^\infty(Q)^N \;\; e \;\; \frac{\partial \bar{y}}{\partial t} \in L^2(0, T, L^\sigma(\Omega)^N); \;\; \begin{pmatrix} \sigma > 1, \;\; \text{se N=2} \\ \sigma > 6/5, \;\; \text{se N=3} \end{pmatrix}$$

é possível achar $\delta > 0$ tal que para qualquer $y_0 \in E$ que cumpre $\|y_0 - \bar{y}_0\|_E < \delta$ isso vai implicar que exista $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^N$ com $v_k = 0$ associado a (y, p) (solução de 3.1) satisfazendo $y(T) = \bar{y}(T)$.
O teorema que nós vai dar a controlabilidade local exata por trajetórias de (3.1) é o seguinte:

Teorema 3.1. *Assumindo que $\mathcal{O}$ satisfazendo* (3.2). *Então para qualquer $T > 0$* (3.1) *é localmente exatamente controlável no tempo T pela trajetória $(\bar{y}, \bar{p})$ satisfazendo* (3.3) *com controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^N$ tendo uma componente nula.*

Para conseguir provar este teorema nós precisamos alguns resultados prévios, primeiro denotando:

$z = y - \bar{y}, \;\; q = p - \bar{p}, \;\; z_0 = y_0 - \bar{y}_0$ tem-se de (3.1) e (3.3)

$$\text{(3.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + (\bar{y}.\nabla)z + (z.\nabla)\bar{y} + (z.\nabla)z + \nabla q = v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ z(0) = z_0, & \text{em} \end{cases}$$

Tem-se que a controlabilidade local nula de (3.5) equivale a controlabilidade local por trajetórias de (3.1).

3.2 Resultados

Para obter a prova do teorema 3.1 vamos a estudar o problema linear de (3.5) adicionando uma função f na parte direita para ter o seguinte problema:

$$
(3.6)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y}.\nabla)y + (y.\nabla)\bar{y} + \nabla p = f + v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

Para $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$ aberto tal que $\overline{\mathcal{O}}_0 \subset\subset \Omega$ vamos ter pelo teorema 1.51 de Fursikov existe $\eta^0 \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ tal que $\eta^0 = 0$ sobre Γ, $\eta^0 > 0$ em Ω e $|\nabla \eta^0| > 0$ em $\Omega \setminus \overline{\mathcal{O}_0}$
Definamos as seguintes funções:

$$
\alpha^*(x,t) = \frac{e^{\frac{5}{4}\lambda m \left|\eta^0\right|_\infty} - e^{\lambda(m\left|\eta^0\right|_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4}.
$$

$$
\xi^*(x,t) = \frac{e^{\lambda(m\left|\eta^0\right|_\infty + \eta^0(x))}}{t^4(T-t)^4}.
$$

O estado adjunto de 3.6 é:

$$
(3.7)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial \varphi}{\partial t} - \Delta \varphi - (D\varphi)\bar{y} + \nabla \pi = g, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(\varphi) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ \varphi = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ \varphi(T) = \varphi_0, & \text{em } \Omega \end{cases}
$$

onde $D\varphi = (D\varphi)_{ij} = (\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i})$.

3.3 Desigualdade de Carleman

Lema 3.2. *Assumindo que $N = 3$, $\eta_1(x_0) \neq 0$ com $\mathcal{O}$ satisfaz* (3.2) *e $\bar{y}$ satisfaz* (3.3). *Então existem constantes positivas c, $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ com $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha} > 0$ dependendo* *de* Ω*,* $\mathcal{O}$*,* T*, e* $\bar{y}$ *tal que para qualquer* $g \in L^2(Q)^3$ *e* $\varphi_0 \in H$ *a solução* φ *associada a* (3.7) *satisfaz*

$$(3.8)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_Q e^{-2\frac{\tilde{\alpha}}{l^4}}(l^{-12}|\varphi|^2 + l^{-4}|\nabla\varphi|^2)dxdt \le c\left(\int_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-30}|g|^2\, dxdt + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-132}(|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2)dxdt\right) \end{aligned} \right.$$

onde

$$(3.9)\qquad l(t) = \begin{cases} \dfrac{T^2}{4} & \textit{para todo } 0 \le t \le T/2 \\ t(T-t) & \textit{para todo } T/2 \le t \le T \end{cases}$$

Demonstração: Ver E.F.Cara-S.Guerrero([5], p. 151).

□

Lema 3.3. *Assumindo que* $N = 2$*,* $\eta_1(x_0) \neq 0$*,* $\mathcal{O}$ *satisfaz* (3.2) *e* $\bar{y}$ *satisfaz* (3.3)*. Então existem constantes positivas* c*,* $\bar{\alpha}$ *e* $\tilde{\alpha}$ *com* $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ *e* $8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha} > 0$ *dependendo so de* Ω*,* $\mathcal{O}$*,* T *e* $\tilde{y}$ *tais que para qualquer* $g \in L^2(Q)^2$ *e* $\varphi_0 \in H$ *a solução* φ *associada a* (3.7) *satisfaz*

$$(3.10)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\int_Q e^{-2\frac{\tilde{\alpha}}{l^4}}(l^{-12}|\varphi|^2 + l^{-4}|\nabla\varphi|^2)dxdt \le c\left(\int_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-30}|g|^2\, dxdt + \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-132}|\varphi_2|^2\, dxdt\right) \end{aligned} \right.$$

onde l *é a função definida em* (3.9)

Demonstração: Ver E.F.Cara-S.Guerrero([5], p. 154).

□

observação 3.4. *Na prova do lema 3.2 os* $\bar{\alpha}$ *e* $\tilde{\alpha}$ *são da forma:*

$$\overline{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_0 m|\eta^0|_\infty} - e^{\lambda_0 m|\eta^0|_\infty}).$$

$$\widetilde{\alpha} = s_0(e^{5/4\lambda_0 m|\eta^0|_\infty} - e^{\lambda(m+1)|\eta^0|_\infty}).$$

Fazendo λ_0 *muito grande se consegue que* $\widetilde{\alpha}$ *e* $\overline{\alpha}$ *satisfaçam que* $0 < \widetilde{\alpha} < \overline{\alpha}$ *e* $8\widetilde{\alpha} - 7\overline{\alpha} > 0$*, além disso também se pode assumir que* $16\widetilde{\alpha} - 15\overline{\alpha} > 0$

observação 3.5. *(Desigualdade de Observabilidade) Assumindo que se satisfazem as condições do lema 3.2 e sendo* φ *a solução de 3.7, então se consegue provar que:*

$$\begin{aligned}\int_Q e^{\frac{-2\bar{\alpha}}{l^4}}(l^{-12}|\varphi|^2 + l^{-4}|\nabla\varphi|^2)dxdt + \|\varphi(0)\|_H^2 \;\; \leq \;\; & c\left(\int_Q e^{\frac{-4\tilde{\alpha}+2\overline{\alpha}}{l^4}} l^{-30}|g|^2\, dxdt + \right.\\ & \left.\int_{\mathcal{O}\times(0,T)} e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\overline{\alpha}}{l^4}} l^{-132}(|\varphi_2|^2 + |\varphi_3|^2)dxdt\right).\end{aligned}$$

3.4 Controlabilidade Nula do Problema Linear

Consideremos o seguinte problema:

$$(3.11) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y}.\nabla)y + (y.\nabla)\bar{y} + \nabla p = f + v1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ div(y) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \\ y = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ \\ y(0) = y_0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Onde $\mathcal{O}$ satisfaz (3.2) e $\bar{y}$ satisfaz (3.3). O que nós queremos é achar um controle v com uma componente nula tal que a solução de (3.11) cumpre com $y(T) = 0$ sobre Ω e para isso vamos introduzir algumas funções de peso.

$$\begin{aligned} \beta_2 &= e^{\frac{\tilde{\alpha}}{l^4}} l^6 \\ \\ \beta_3 &= e^{\frac{2\tilde{\alpha}-\bar{\alpha}}{l^4}} l^{15} \\ \\ \beta_4 &= e^{\frac{8\tilde{\alpha}-7\bar{\alpha}}{l^4}} l^{66}, \end{aligned}$$

onde l é como em (3.9), $\bar{\alpha}$ e $\tilde{\alpha}$ são constantes como no lema 3.2 e o 3.3 e devemos lembrar que $0 < \tilde{\alpha} < \bar{\alpha}$ e $0 < 8\tilde{\alpha} - 7\bar{\alpha}$.

Nós precisamos algumas condições especificas de f e y_0 para ter a controlabilidade nula de (3.11)

$$(3.12) \qquad Ly = \frac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + (\bar{y}.\nabla)y + (y.\nabla)\bar{y}.$$

Definamos os seguintes espaços:

$$E_0 = \{(y,v) : \ \beta_3 y, \ \beta_4 v 1_{\mathcal{O}} \in L^2(Q)^N, \ v_1 = 0, \ l^{-2}\beta_2^{1/2} y \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)\}$$

Para $N = 2$

$E_2 = \{(y,p,v):\ (y,v)\in E_0,\ l^{-4}\beta_2(Ly+\nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2)\}$

Para $N=3$

$E_3 = \{(y,p,v):\ (y,v)\in E_0,\ l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^3),\ \ l^{-4}\beta_2(Ly+$
$\nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)\}$

E_N é um espaço de Banach com a norma:

$$\|(y,p,v)\|_{E_2} = \Big(\|\beta_2 y\|^2_{L^2(Q)^2} + \|\beta_4 v1_{\mathcal{O}}\|^2_{L^2(Q)^2} + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|^2_{L^2(0,T,V)} + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|^2_{L^\infty(0,T,H)} + \|l^{-4}\beta_2(Ly+\nabla p - v1_{\mathcal{O}})\|^2_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2)}\Big)^{1/2}$$

e

$$\|(y,p,v)\|_{E_3} = \Big(\|\beta_3 y\|^2_{L^2(Q)^3} + \|\beta_4 v1_{\mathcal{O}}\|^2_{L^2(Q)^3} + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|^2_{L^2(0,T,V)} + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|^2_{L^\infty(0,T,H)} + \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y\|^2_{L^4(0,T,L^{12}(\Omega))} + \|l^{-4}\beta_2(Ly+\nabla p - v1_{\mathcal{O}})\|^2_{L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)}\Big)^{1/2}$$

Proposição 3.6. *Assumindo que* $\eta_1(x_0)\neq 0$, $\mathcal{O}$ *satisfaz* (3.2) *e* $\bar{y}$ *satisfaz* (3.3). *Dado* $y_0 \in E$ *e assumindo que*

$$l^{-4}\beta_2 f \in \begin{cases} L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2), & se\ \ N=2 \\ L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3), & se\ \ N=3 \end{cases}$$

Então podemos achar um controle v *tal que a solução associada de* (3.11) *satisfaz* $(y,p,v)\in E_N$. *Em particular* $v_1 = 0$ *e* $y(T)=0$.

Demonstração: Sô vamos considerar o caso $N=3$, quando $N=2$ resulta mais fácil

$$\begin{cases} inf\dfrac{1}{2}\Big(\displaystyle\int_Q |\beta_3 y|^2\,dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} |\beta_4 v|^2\,dxdt\Big) \\ \\ \text{restrita a}\ \ v\in L^2(Q)^3,\ \ supp(v)\subset \mathcal{O}\times(0,T),\ \ v_1=0\ \ e \\ \\ \begin{cases} Ly+\nabla p = f + v1_{\mathcal{O}}, & \text{em}\ \ \Omega\times(0,T) \\ div(y)=0, & \text{em}\ \ \Omega\times(0,T) \\ y=0, & \text{sobre}\ \ \Gamma\times(0,T) \\ y(0)=y_0,\ \ y(T)=0, & \text{em}\ \ \Omega \end{cases} \end{cases} \tag{3.13}$$

Nós vemos que uma solução $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v})$ de (3.13) é um bom candidato para que $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$. Assumindo que (3.13) tem uma solução $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v})$. Então pelo principio de Lagrange existem $\hat{z}$ e $\hat{q}$ tais que

$$
(3.14) \qquad \begin{cases} \hat{y} = \beta_3^{-2}(L^*\hat{z} + \nabla\hat{q}), & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(\hat{z}) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ \hat{v}_1 = 0, \;\; \hat{v}_i = -\beta_4^{-2}\hat{z}_i \;\; (i = \{2,3\}), & \text{em } \mathcal{O} \times (0,T) \\ \hat{z} = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \end{cases}
$$

Seja:

$$
P_0 = \{(w,h) \in \mathcal{C}^2(\overline{Q})^4; \;\; div(w) = 0 \;\text{ em Q}, \;\; w = 0 \;\text{ sobre } \Gamma \times (0,T), \;\; \int_{\mathcal{O}} h(x,t)dx = 0\}
$$

Para todo (z,q) e (w,h) que pertencem a P_0

$$
a\left((z,q),(w,h)\right) = \int_Q \beta_3^{-2}(L^*z + \nabla q)(L^*w + \nabla h)dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_4^{-2}(z_2w_2 + z_3w_3)dxdt
$$

P_0 é um espaço vetorial e para que $a(\cdot,\cdot)$ seja um produto interno em P_0 so fica provar que para $(w,h) \in P_0$ tal que $a\left((w,h),(w,h)\right) = 0$ implique que $(w,h) = (0,0)$

Com efeito se $a\left((w,h),(w,h)\right) = 0$ então

$\int_Q \beta_3^{-2}\left|L^*w + \nabla h\right|^2 dxdt + \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_4^{-2}(w_2^2 + w_3^2)dxdt = 0$ daqui tem-se $\beta_3^{-2}\left|L^*w + \nabla h\right|^2 = 0$, mas como $\beta_3^{-2} = e^{\frac{2\bar{\alpha}-4\hat{\alpha}}{l^4}} l^{-30} > 0$ para todo $t \in (0,T)$ portanto

$$
(3.15) \qquad L^*w + \nabla h = 0
$$

pela desigualdade de Carleman no lema 3.2 tem-se

$$
\begin{aligned}
\int_Q e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{l^4}}(l^{-12}\left|w\right|^2 + l^{-4}\left|\nabla w\right|^2)dxdt \;\; &\leq \;\; c\Bigg(\int_Q \beta_3^{-2}\left|L^*w + \nabla h\right|^2 dxdt + \\
&\qquad \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_4^{-2}(\left|w_2\right|^2 + \left|w_3\right|^2)dxdt\Bigg) \\
\int_Q e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{l^4}}(l^{-12}\left|w\right|^2 + l^{-4}\left|\nabla w\right|^2)dxdt \;\; &\leq \;\; ca\left((w,h),(w,h)\right) = 0,
\end{aligned}
$$

então $e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-12} |w|^2 = 0$ em Q e como $e^{-\frac{2\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-12} > 0$ em $(0, T)$ dai tem-se $w = 0$ quase sempre em Q e substituindo em (3.15) se vai ter que $\nabla h = 0$ como consequência de isto se vai ter que $h = c(t)$ mas como $\int_{\mathcal{O}} h(t)dx = 0$ então $h = 0$ e portanto $(w, h) = (0, 0)$.
Portanto $a(\cdot, \cdot)$ é um produto interno.
Pelo teorema 1.55 (completação) existe um espaço de Hilbert P com o produto interno $a(\cdot, \cdot)$ tal que $P_0 \subset P$

$$\text{Seja} \quad \begin{array}{rcl} G : P & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (w, h) & \longrightarrow & \langle G, (w, h) \rangle \end{array},$$

onde $\langle G, (w, h) \rangle = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} dt + \int_\Omega y_0 w(0) dx.$

Esta bem definido pois $f \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \subset L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$ e y_0, $w(0) \in L^2(Q)^N$ é fácil ver que G é linear.

Vejamos que G é continua

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \int_0^T \left| \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} \right| dt + \int_\Omega |y_0 w(0)| \, dx,$$

como $l^{-4} \beta_2 f \in L^2(0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ devido ha isto $l^{-4} \beta_2 f \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \left\| l^{-4} \beta_2 f \right\|_{L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)} \left\| l^4 \beta_2^{-1} w \right\|_{L^2(0,T,H_0^1(\Omega)^3)} + \|y_0\|_{L^2(\Omega)^3} \|w(0)\|_{L^2(\Omega)^3}$$

$$\begin{aligned} |\langle G, (w, h) \rangle|^2 &\leq c \left(\left\| l^{-4} \beta_2^{-1} w \right\|^2_{L^2(0,T,H_0^1)} + \|w(0)\|^2_{L^2(\Omega)^3} \right) \\ &= c(\int_0^T \int_\Omega e^{-2\frac{\bar{\alpha}}{l^4}} l^{-4} |\nabla w|^2 \, dxdt + \int_\Omega |w(0)|^2 \, dx) \end{aligned}$$

Da Desigualdade de Observabilidade tem-se

$$|\langle G, (w, h) \rangle|^2 \leq c(\int_Q \beta_3^{-2} |L^* w + \nabla h|^2 \, dxdt + \int_{\mathcal{O} \times (0,T)} \beta_4^{-2} (|w_2|^2 + |w_3|^2) dxdt)$$

$$|\langle G, (w, h) \rangle| \leq \tilde{c} \, \|(w, h)\|_P,$$

então G é continua.

Agora fazendo uso do teorema 1.56 de Lax Milgram pois $a(\cdot,\cdot)$ é uma forma bilinear continua e coerciva e $G \in P'$. Então existe um único $(\hat{w},\hat{h}) \in P$ tal que

$$a\Big((\hat{w},\hat{h}),(w,h)\Big) = \langle G,(w,h)\rangle \ \text{ para todo } \ (w,h) \in P \tag{3.16}$$

$$\begin{cases} \hat{y} = \beta_3^{-2}(L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}), \ \ div(\hat{w}) = 0 & \text{em } \ \Omega \times (0,T) \\ \hat{v}_1 = 0, \ \ \hat{v}_i = -\beta_4^{-2}\hat{w}_i, \ \ i = 2,3 & \text{em } \ \mathcal{O} \times (0,T) \\ \hat{w} = 0 & \text{sobre } \ \Gamma \times (0,T) \end{cases}$$

$$\int_Q |\hat{y}|^2 dxdt = \int_Q \beta_3^{-2}\beta_3^{-2}|L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}|^2 dxdt,$$

como $\beta_3^{-2} = e^{-\frac{2\tilde{\alpha}}{l^4}} l^6$ é limitado em $[0,T]$

$$\begin{aligned} \int_Q |\hat{y}|^2 dxdt \ &\leq \ c\int_Q \beta_3^{-2}|L^*\hat{w} + \nabla\hat{h}|^2 dxdt \\ &< \ +\infty. \end{aligned}$$

Por tanto $\hat{y} \in L^2(Q)^N$, da mesma maneira como $\beta_4^{-2} = e^{\frac{-16\tilde{\alpha}+14\tilde{\alpha}}{l^4}}$ é limitado em $[0,T]$ tem-se $\hat{v} \in L^2(Q)^N$ e consequentemente

$$\int_Q \beta_3^2 \left|\hat{y}\right|^2 dxdt < +\infty \ \ e \ \ \int_{\mathcal{O}\times(0,T)} \beta_4^2 \left|\hat{v}\right|^2 dxdt < +\infty, \tag{3.17}$$

e de (3.17) como $\beta_3^2 \longrightarrow +\infty$ quando $t \longrightarrow T^-$ tem-se $\hat{y}(T) = 0$.

De (3.16) vamos ter a seguinte igualdade

$$\int_Q \hat{y}(L^*w + \nabla h)dxdt = \int_0^T \langle f(t), w(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega)^3}\, dt + \int_\Omega y_0 w(0)dx + \int_Q \hat{v}1_{\mathcal{O}} w dxdt. \tag{3.18}$$

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} L\tilde{y} + \nabla\tilde{p} = f + \hat{v}1_{\mathcal{O}}, & \text{em } \ \Omega \times (0,T) \\ div(\tilde{y}) = 0, & \text{em } \ \Omega \times (0,T) \\ \tilde{y} = 0, & \text{sobre } \ \Gamma \times (0,T) \\ \tilde{y}(0) = y_0, & \text{em } \ \Omega \end{cases} \tag{3.19}$$

Dizemos que $(\tilde{y}, \tilde{p})$ é solução por transposição de 3.19 se $\tilde{y} \in L^2(Q)^N$ e

$$\int_Q \tilde{y} b dx dt = \int_0^T \langle f(t), w(t) \rangle_{H^{-1} \times H_0^1} dt + \int_Q \hat{v} 1_{\mathcal{O}} w dx dt + \int_\Omega y_0 w(0) dx. \tag{3.20}$$

Para todo $b \in L^2(Q)^N$ e w junto h solução de

$$\begin{cases} L^* w + \nabla h = b, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(w) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ w = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ w(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

De (3.18) se vê que $\hat{y}$ satisfaz (3.20) e como so existe uma única solução por transposição temos que $\tilde{y} = \hat{y}$ e por teorema 1.47, como $y_0 \in H$ e $f + \hat{v} 1_{\mathcal{O}} \in L^2(0, T, H^{-1}(\Omega)^3)$. Então existe uma única solução fraca de (3.19) que fica em $L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$ isto nós leva a que $\hat{y} \in L^\infty(0,T,H) \cap L^2(0,T,V)$.

Vamos provar que $(\hat{y}, \hat{p}, \hat{v}) \in E_3$, se sabe que $\hat{v} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^N)$, $f = (l^{-4}\beta_2 f)(l^4 \beta_2^{-1}) \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3) \subset L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$ e $y_0 \in E$ e de (3.17) temos $\beta_3 \hat{y} \in L^2(Q)^3$

$$\beta_4 \hat{v} \in L^2(Q)^3 \;\; e \;\; \hat{v}_1 = 0 \tag{3.21}$$

A continuação mostraremos que $l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y} \in L^2(0,T,V) \cap L^\infty(0,T,H)$ consideremos $y^* = l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y}$, $\;p^* = l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{p}$ e $f^* = l^{-2}\beta_2^{1/2}(f + \hat{v}1_{\mathcal{O}})$ verifica-se cumpre

$$\begin{cases} Ly^* + \nabla p^* = f^* + (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t \hat{y}, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(y^*) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ y^* = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y^*(0) = l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0) y_0, & \text{em } \Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

Como $l^2\beta_2^{-1/2} \in L^\infty(Q)^3$ e $l^{-4}\beta_2 f \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$. Então $l^{-2}\beta_2^{1/2} f = (l^{-4}\beta_2 f)(l^2\beta_2^{-1/2}) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$ da mesma maneira $l^{-2}\beta_2^{1/2}\beta_4^{-1} \in L^\infty(Q)^3$ e $\beta_4\hat{v} \in L^2(Q)^3$ e como consequência de isto $l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{v} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$ por tudo isto $f^* \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$.

Também

$$\begin{aligned} (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t &= (l^{-5} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}})_t \\ &= \underbrace{-5l^{-6} l' e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}}}_{limitado} + \underbrace{l^{-10} 2\bar{\alpha} e^{-\frac{\bar{\alpha}}{2l^4}} l'}_{limitado} \end{aligned}$$

daqui temos $(l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t\hat{y} \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^3)$. Então pelo teorema 1.47 a solução de (3.22) pertence a $L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H)$ portanto

$$l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y} \in L^2(0,T,V)\cap L^\infty(0,T,H), \tag{3.23}$$

também

$$l^{-4}\beta_2(L\hat{y}+\nabla\hat{p}-\hat{v}1_{\mathcal{O}}) = l^{-4}\beta_2 f \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3) \tag{3.24}$$

De (3.22) , (3.23) e (3.24) so falta provar que $l^{-2}\beta_2^{1/2}\hat{y} \in L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^3)$ para dizer que $(\hat{y},\hat{p},\hat{v}) \in E_3$

Definamos $B : L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^3) \longrightarrow \mathbb{R}$, onde

$\langle B,k\rangle = \displaystyle\int_\Omega l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0 z(0)dx + \int_0^T \langle F,z\rangle_{W^{-1,6}\times W_0^{1,6}}\,dt$, donde pelo lema 1.50 z é a única solução de:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em}\Omega\times(0,T) \\ div(z) = 0, & \text{em } \Omega\times(0,T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma\times(0,T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Com $z \in \mathcal{C}(0,T,L^{4/3}(\Omega)^3 \cap L^2(0,T,W_0^{1,6/5}(\Omega)^3)$ e $F = f^* + (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t\hat{y} - \nabla.(y^*\otimes\bar{y}+\bar{y}\otimes y^*)$, $y^* \in L^2(0,T,V) \subset L^2(0,T,L^6(\Omega)^9)$ então $\nabla(\bar{y}\otimes y^*+y^*\otimes\bar{y}) \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e devido a que $f^*,\ \hat{y} \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)$.

B esta bem definida, linear e continua. Vejamos que é continua

$$\begin{aligned} |\langle B,k\rangle| &\leq \|l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0)\|_{L^4(\Omega)}\,\|z(0)\|_{L^{4/3}(\Omega)^3} + \\ &\quad \|F\|_{L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)}\,\|z\|_{L^2(0,T,W_0^{1,6}(\Omega)^3)} \\ &\leq c(\|z\|_{\mathcal{C}(0,T,L^{4/3}(\Omega)^3)} + \|z\|_{L^2(0,T,W_0^{1,6}(\Omega)^3)}) \\ &= c\,\|z\|_{\mathcal{C}(0,T,L^{4/3}(\Omega)^3)\cap L^2(0,T,W^{1,6}(\Omega)^3)} \\ &\leq c\,\|k\|_{\mathcal{C}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^3)} \end{aligned}$$

Portanto B é continua.

Nós sabemos que y^* é solução de

$$(3.25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial t} - \Delta y + \nabla p = f^* + (l^{-2}\beta_2^{-1/2})_t \hat{y} - \nabla(y^* \otimes \bar{y} + \bar{y} \otimes y^*), \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ div(y) = 0, \text{ em } \Omega \times (0,T) \\ y = 0, \text{ sobre } \Gamma \times (0,T) \\ y(0) = l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0, \text{ em } \Omega \end{cases}$$

e do fato de ser y^* é também solução por transposição de (3.25), se cumpre

$$(3.26)\qquad \int_Q y^* k dx dt = \int_\Omega l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y_0 z(0) dx + \int_0^T \langle F, z\rangle_{W^{-1,6}\times W_0^{1,6}} dt$$

Para todo $k \in L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^3)$ onde z e q são solução de

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial z}{\partial t} - \Delta z + \nabla q = k, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ div(z) = 0, & \text{em } \Omega \times (0,T) \\ z = 0, & \text{sobre } \Gamma \times (0,T) \\ z(T) = 0, & \text{em } \Omega \end{cases}$$

Da definição de B e de (3.26) se tem que

$$\langle B, k\rangle = \int_Q y^* k dx dt, \text{ para todo } k \in L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^3)$$

daqui temos $y^* \in (L^{4/3}(0,T,L^{12/11}(\Omega)^3))'$ então $y^* \in L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^3)$ e como consequência de todo isto $(\hat{y},\hat{p},\hat{v}) \in E_3$.

□

3.5 Problema Não Linear

O teorema que nós vai a dar la controlabilidade local nula do sistema (3.5) é o seguinte:

Teorema 3.7. *Assumindo que $\mathcal{O}$ satisfaz (3.2). Então para todo $T > 0$ (3.5) é localmente nulo controlável com um controle $v \in L^2(\mathcal{O} \times (0,T))^N$ tendo uma componente nula.*

Demonstração: Para provar o teorema de acima vamos fazer uso do teorema 2.7(Liusternik), nosso caso $B_1 = E_N$ e

$$B_2 = \begin{cases} L^2(l^{-4}\beta_2; 0,T,H^{-1}(\Omega)^2) \times H, & \text{se } N = 2 \\ L^2(l^{-4}\beta_2; 0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3) \times (H \cap L^4(\Omega)^3), & \text{se } N = 3 \end{cases}$$

$A: B_1 \longrightarrow B_2$ onde $A(y,p,v) = (Ly + (y.\nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}, y(0))$, vejamos que satisfazem as condições do teorema 2.7(Liusternik)

Caso N=3:

Vamos provar que A esta bem definida isto é para todo $(y,p,v) \in E_3$ se deve implicar que $A(y,p,v) \in B_2$, por o que so devemos provar que $Ly + (y.\nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e $y(0) \in H \cap L^4(\Omega)^3$

Como $(y,p,v) \in E_3$ então $l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0) \in H$ de aqui tem-se $y(0) \in H$ da mesma maneira $l^{-4}\beta_2(Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0,T,W^{-1,6}(\Omega)^3)$ e $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^4(0,T,L^{12}(\Omega)^3)$ então $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0,T,L^6(\Omega)^3)$ e como $l^{-4}\beta_2(y.\nabla)y = \nabla.(l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y) \in L^2(0,T,W^{1,6}(\Omega)^3)$, se vai ter que $l^{-4}\beta_3(Ly)$ e por tanto $A(y,p,v) \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, W^{-1,6}(\Omega)^3) \times (H \cap L^4(\Omega)^3)$

Agora como em $A(y,p,v)$ aparecem partes lineares as quais são de classe $\mathcal{C}^1(B_1, B_2)$ por isto so é preciso provar que $B: B_1 \times B_1 \longrightarrow B_2$, com $B((y^1,p^1,v^1);(y^2,p^2,v^2)) = (\nabla.(y^1 \otimes y^2), 0)$ é continuo.

Com efeito vamos provar que a aplicação bilinear B é continua. Para $y^1, y^2 \in B_1$ se tem que:

$$
\begin{aligned}
\left\|B((y^1,p^1,v^1);(y^2,p^2,v^2))\right\|_{B_2}^2 &= \int_0^T \|l^{-4}\beta_2\nabla(y^1 \otimes y^2)\|_{W^{-1,6}(\Omega)^3}^2 dt \\
&= \int_0^T \|\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2)\|_{W^{-1,6}(\Omega)^3}^2 dt \\
&\leq c_1 \int_0^T \left\|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\right\|_{L^6(\Omega)^3}^2 dt \\
&\leq c_1c_2 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^{12}(\Omega)^3}^2 dt \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^{12}(\Omega)^3}^2 dt \\
&= c_1c_2\|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^2(0,T,L^{12}(\Omega)^3)}^2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(0,T,L^{12}(\Omega)^3)}^2
\end{aligned}
$$

Pelo de acima temos que

$$\|B((y^1,p^1,v^1);(y^2,p^2,v^2))\|_{B_2} \leq c\|(y^1,p^1,v^1)\|_{B_1}\|(y^2,p^2,v^2)\|_{B_1}$$

Por tanto B é continua e como consequência de isso $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$

Caso N=2:

Em este caso $B_1 = E_2$. Vamos provar que A esta bem definido, seja $(y,p,v) \in E_2$ devemos provar que $Ly + (y.\nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$, como (y,p,v) estão em E_2 então $l^{-2}(0)\beta_2^{1/2}(0)y(0) \in H$ de aqui se tem que $y(0) \in H$.

Como (y,p,v) esta em E_2 então se cumpre que $l^{-4}\beta_2(Ly+\nabla p - v1_{\mathcal{O}}) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2)$ e como $l^{-4}\beta_2(y.\nabla)y = \nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y)$ e pelo fato de $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0,T,V) \cap L^{\infty}(0,T,H)$ como consequência de isto se tem $l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y \in L^2(0,T,L^2(\Omega)^4)$. então $\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y) \in L^2(0,T,H^{-1}(\Omega)^2)$ tem-se $Ly + (y.\nabla)y + \nabla p - v1_{\mathcal{O}} \in L^2(l^{-4}\beta_2; 0, T, H^{-1}(\Omega)^2)$ por o que $A(y,p,v) \in B_2$ por tanto A esta bem definida.

Agora vamos a provar que $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$. De maneira muito similar ao caso 3 nos so devemos provar que a forma bilinear $B : B_1 \times B_1 \longrightarrow B_2$ com $B((y^1,p^1,v^1);(y^2,p^2,v^2)) = (\nabla.(y^1 \otimes y^2), 0)$ seja continua. Sejam $(y^1,p^1,v^1),(y^2,p^2,v^2) \in B_1$.

$$\begin{aligned}
\|B((y^1,p^1,v^1);(y^2,p^2,v^2))\|_{B_2}^2 &= \|(\nabla.(y^1 \otimes y^2), 0)\|_{B_2}^2 \\
&= \int_0^T \|l^{-4}\beta_2 \nabla(y^1 \otimes y^2)\|_{H^{-1}(\Omega)^2}^2 dt \\
&= \int_0^T \|\nabla(l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes L^{-2}\beta_2^{1/2}y^2)\|_{H^{-1}(\Omega)^2}^2 dt \\
&\leq c_1 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1 \otimes l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(\Omega)^4}^2 \\
&\leq c_1 c_2 \int_0^T \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^4(\Omega)^2}^2 dt \int_0^T \left\| l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2 \right\|_{L^4(\Omega)^2}^2 dt \\
&= c_1 c_2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^1\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega)^2)}^2 \|l^{-2}\beta_2^{1/2}y^2\|_{L^2(0,T,L^4(\Omega)^2)}^2 \\
&\leq c_1 c_2 \|(y^1,p^1,v^1)\|_{B_1}^2 \|(y^2,p^2,v^2)\|_{B_1}^2
\end{aligned}$$

y por tanto tem-se $\|B((y^1,p^1,v^1),(y^2,p^2,v^2))\|_{B_2} \leq c\,\|(y^1,p^1,v^1)\|_{B_1}\,\|(y^2,p^2,v^2)\|_{B_1}$ desta maneira B é continua e assim $A \in \mathcal{C}^1(B_1, B_2)$

Dos casos quando $N = 2$ ou $N = 3$ vamos agora provar que $A'(0,0,0) : B_1 \longrightarrow B_2$ é sobrejetiva. Fazendo conta se consegue que $A'(0,0,0)(y,p,v) = (Ly + \nabla p - v1_{\mathcal{O}}, y(0))$ para todo $(y,p,v) \in B_1$. Seja $(f_0, y_0) \in B_2$ pela proposição 3.6 existe $(y,p,v) \in E_N$ tal que satisfaz $A'(0,0,0)(y,p,v) = (f_0, y_0)$ e por tanto $A'(0,0,0)$ é sobrejetiva, então por o

teorema 2.7 de Liusternik, se tem que existe $\delta > 0$ tal que $\|(f_0, y_0)\|_{B_2} < \delta$ então existe uma solução da equação $A(y, p, v) = (f_0, y_0)$ com $(y, p, v) \in B_1$.
Isto dos dize que (3.5) é localmente nulo controlável com um controle v que tem uma componente nula.

$\square$

Finalmente como a controlabilidade local nula de (3.5) tendo o controle uma componente nula vai implica a controlabilidade local exata por trajetórias de (3.1) com um controle v tendo uma componente nula temos provado o teorema 3.1

Bibliografia

[1] Adams, R. A., - *Sobolev Spaces*, New York, Academic Press (1975).

[2] Brezis, H., - *Análisis funcional, Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial (1980).

[3] Brezis, H., - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and partial Differential Equations*, Rutgers University, March (2010).

[4] E. Kreyszig., - *Introductory Functional Analysis with Applications* , University of Windsor, (1978).

[5] Fernandez Cara, Sergio Guerrero, O.Y.Imanuvilov. & Jean-Pierre Puel, - *Some controllability for the N-dimensional Navier-Stokes and Bussinesq Systems with N-1 scalar controls*, SIAM J.Control Optim. v. 45, n.1, (2006), p. 146-173.

[6] E. Fernández Cara, S. Guerrero, O. Yu. Imanuvilov.& J.-P.Puel, - *Local exact controllability of the Navier Stokes System*, J. Math. Pures Appl. 83 (2004), p. 1501-1542.

[7] Cazenave, T., - *An introduction to nonlinear Schrodinger equations*, Textos de Metodos Matematicos numero 26, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1996).

[8] J.-LIONS, *Optimal Control of Systems Governed by Partial Differentia Equations*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York (1971).

[9] O. Imanuvilov, J.-P. Puel, & M. Yamamoto., - *Carleman estimates for second order non homogenous parabolic equations*, to appear.

[10] Evans, L. C., - *Partial Differential Equations*, Berkeley Mathematics Lecture Notes, (1993).

[11] Jean-Pierre Puel.,-*Controllability of Navier-Stokes Equations*, Laboratoire de Mathematiques de Versailles, (2012)

[12] O. Yu. Imanuvilov, J-P. Puel., - *Global Carleman estimates for weak elliptic non homogeneous Dirichlet problem*, Int. Math. Research Notices, 16 (2003), p.883-913.

[13] A. Fursikov., O. Yu. Imanuvilov,*Controllability of Evolution Equations*, lecture Notes 34, Seoul National University, Korea, 1996.

[14] Lions, J. L., - *Quelques Méthodes de Résolutions des Problèmes aux Limites non Linéaires*, Dunod Gauthier-Villars, Paris, (1969).

[15] Medeiros, L. A. & Milla Miransa, M., - *Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogêneos)*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (1999).

[16] Medeiros, L. A e Milla Miranda, M., - *Introdução às Equações Diferenciais Parciais Não Lineares*, Instituto de Matemática-UFRJ, (1997).

[17] Medeiros, L. A. & Milla Miranda, M., - *Introdução aos Espaços de Sobolev e às Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, (2011).

[18] Medeiros, L. A., Rivera, P. H., - *Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais,* Textos de Métodos Matemáticos, Instituto de Matemática-UFRJ, número 9, (1975).

[19] Temam, R., - *Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis*, North-Holland, Amsterdam, (1977).

[20] V. M. Alekseev, V. M Tikhomirov, S. V. Fomin, Optimal Control, Translated from the Russiam by V. M. Volosov, Contemporary Soviet Mathematics. Consultants Bureau, New York, 1987.

[21] J.-L. Lions, E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, Vol. 2, Paris, Dunod, 1968.