

Universidade Federal Fluminense  
Instituto de Matemática e Estatística  
Programa de Pós Graduação em Matemática

Tese de Doutorado

Sobre biholomorfismos com órbitas finitas  
e conjuntos analíticos invariantes

Lucivanio de Lisboa Santos Matos

Orientador: Javier Ribón Herguedas  
Co-orientador: Fernando Sanz Sanchez

Niterói  
2019

# Resumo

Neste trabalho, interessamo-nos pelo estudo dos biholomorfismos com a propriedade de órbitas finitas e a sua relação com o estudo de folheações holomorfas e com a existência de curvas analíticas invariantes. Mostramos que, se um biholomorfismo  $F$  com a propriedade de órbitas finitas é o fluxo de um campo de vetores, então seu espectro  $\text{Spec}(D_0F)$  é formado por raízes da unidade. Por outro lado, construímos uma família de exemplos de biholomorfismos com a propriedade de órbitas finitas com apenas um autovalor raiz da unidade. Mostramos, ainda, que, se um biholomorfismo em dimensão dois possui a propriedade de órbitas finitas, então ao menos um de seus autovalores é raiz da unidade. Isso é uma consequência do Teorema da curva de pontos fixos, que também provaremos aqui. Mais precisamente, mostraremos que, se um biholomorfismo  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas em dimensão  $n = 2$ , então algum iterado de  $F$  possui um germe de curva analítica de pontos fixos.

Um outro fenômeno que abordamos aqui é a construção de biholomorfismos e folheações com propriedades relevantes para compor a literatura deste tema. Em particular, construímos uma família de fluxos não integráveis em dimensão  $n = 2$  com a propriedade de órbitas finitas. Estes exemplos serão usados para construir folheações de codimensão dois em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  do tipo Siegel, cuja holonomia de uma separatriz isolada é de órbitas finitas, mas que, ainda assim, não admitem uma integral primeira holomorfa sequer.

**Palavras-chave:** Biholomorfismo com órbitas finitas, curva de pontos fixos, integral primeira holomorfa.

# Abstract

In this work, we shall study biholomorphisms with finite orbits property and its relation to the study of holomorphic foliations and the existence of invariant analytical curves. We were able to show that if a biholomorphism  $F$  with the finite orbits property is the flow of a vector field, then its spectra  $\text{Spec}(D_0F)$  consists of roots of unity. On the other hand, we have built a family of examples of biholomorphisms with the finite orbits property, although possessing only one root of unity in its spectra. In addition, we have showed that, in dimension  $n = 2$ , if a biholomorphism  $F$  possesses the finite orbits property, at least one of its eigenvalue is a root of unity. This is a consequence of the fixed-point curve Theorem, which we also have proved here. More precisely, we shall show that if a biholomorphism  $F$  has the finite orbits property in dimension 2, then some iterated  $F^m$  admits an analytical fixed-point curve germ.

Another phenomenon we study here is the exhibition of examples of local biholomorphisms and foliations with relevant integrability properties to supplement the literature of this theme. Particularly, we have built a family of non-integrable flows in dimension 2 with the finite orbits property. These examples are used to build foliations of codimension 2 in  $(\mathbb{C}^3, 0)$  of Siegel kind, whose holonomy of the isolated separatrix has the finite orbits property, and yet it does not even admit a first integral.

Keywords: Biholomorphism with finite orbits, fixed-point curve, holomorphic first integral.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Definições e primeiros resultados</b>	<b>12</b>
1.1	A propriedade de órbitas finitas . . . . .	12
1.2	A propriedade de órbitas fechadas . . . . .	15
1.3	Campos de vetores e fluxos . . . . .	16
1.4	Formas normais . . . . .	18
1.5	Decomposição semisimples/nilpotente e biholomorfismos unipotentes	20
1.6	Conjuntos analíticos invariantes . . . . .	21
1.7	Teorema de Leau-Fatou . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Órbitas finitas e parte linear</b>	<b>24</b>
2.1	Caso linear . . . . .	24
2.2	Teorema da variedade estável e aplicações . . . . .	26
2.3	A propriedade de órbitas finitas para fluxos . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Biholomorfismos não racionais com órbitas finitas</b>	<b>31</b>
3.1	Definições básicas . . . . .	31
3.2	Caso bidimensional . . . . .	32
3.3	Caso n-dimensional . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Teorema da curva de pontos fixos</b>	<b>40</b>
4.1	Curvas invariantes e parabólicas . . . . .	40
4.2	Noções topológicas . . . . .	44
4.3	Conjuntos semianalíticos . . . . .	46
4.4	Teorema da curva fixa . . . . .	52
<b>5</b>	<b>Fluxos com órbitas finitas e integral primeira holomorfa</b>	<b>53</b>
5.1	Fluxo real de campos holomorfos . . . . .	53
5.2	Integrais primeiras . . . . .	55

5.3	Primeiros exemplos de fluxos de órbitas finitas . . . . .	56
5.4	Teorema da flor e estabilidade de Lyapunov . . . . .	59
5.5	Formas normais e propriedades de órbitas finitas . . . . .	66
<b>6</b>	<b>Folheações não integráveis em <math>(\mathbb{C}^3, 0)</math> com holonomia de órbitas finitas</b>	<b>71</b>
6.1	Holonomia . . . . .	72
6.2	Campos não integráveis com holonomia de órbitas finitas . . . . .	73

# Introdução

Neste trabalho, nosso interesse está centrado no estudo dos biholomorfismos com a propriedade de órbitas finitas e a sua relação com o estudo de folheações holomorfas e com a existência de curvas analíticas invariantes.

Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  um germe de biholomorfismo fixando a origem de  $\mathbb{C}^n$ . Dizemos que  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas (ou OF) se existe uma vizinhança  $U$  de 0 na qual  $F$  e  $F^{-1}$  estão definidos e, para cada  $p \in U$ , o conjunto dos iterados de  $p$  por  $F$  em  $U$  é finito (ver capítulo 1 para mais detalhes). É fácil ver que a propriedade de órbitas finitas é equivalente à propriedade de órbitas fechadas (ver Teorema 1.1).

Os biholomorfismos com órbitas finitas surgem naturalmente quando se estuda a holonomia de certas folheações. No caso unidimensional, Mattei e Moussu mostraram em [MM80] que um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^1, 0)$  tem a propriedade de órbitas finitas se, e somente se,  $F$  é periódico como elemento do grupo  $\text{Diff}(\mathbb{C}^1, 0)$ . Eles usaram esse fato para estabelecer um critério topológico para caracterizar a existência de integrais primeiras holomorfas para germes de folheações em  $(\mathbb{C}^2, 0)$ . Em dimensão  $n \geq 2$ , não é verdade que a propriedade de órbitas finitas seja equivalente à periodicidade. Por exemplo, o biholomorfismo local  $F(x, y) = (x, y + x^2)$  tem a propriedade de órbitas finitas, mas não é periódico. Acrescentando hipóteses adicionais, é possível recuperar a equivalência periodicidade  $\leftrightarrow$  órbitas finitas e obter análogos do critério topológico de Mattei-Moussu para campos de vetores locais em dimensão maior do que 2 (ver [RR15] e [CS09]).

Os exemplos que aparecem na literatura de biholomorfismos com órbitas finitas não periódicos são todos do mesmo tipo: é o fluxo  $F = \exp(X)$  em tempo 1 de um germe de campo de vetores  $X$ , cuja parte nilpotente possui uma integral primeira holomorfa não constante (ver [CS09] [RR15]). Portanto, uma questão natural seria saber se todos são dessa forma e, em caso contrário, fornecer mecanismos para identificá-los. Tendo isso em mente, substituímos a noção de integral primeira pela noção de separação perpendicular:

**Definição 0.1** (Definição 5.4). Sejam  $v, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Diremos que  $\lambda_1, \lambda_2$  são *perpendicularmente separados* por  $v$  se eles pertencem a componentes conexas distintas de  $\mathbb{C} \setminus L$ , onde  $L$  é a reta real de  $\mathbb{C}$  passando pela origem e perpendicular a  $v$ .

Usando esta definição, foi possível classificar a seguinte família de fluxos quanto à propriedade de órbitas finitas:

**Teorema 0.1** (Teorema 5.2). *Seja  $X = x^p y^q \left( \frac{1}{1 - C x^p y^q} \right) (\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  um campo de vetores com  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Suponhamos que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ . Então:*

- (i)  *$X$  não possui trajetórias reais periódicas em nenhuma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .*
- (ii) *Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ , então  $\exp(X)$  tem a propriedade (OF).*
- (iii) *Se  $\exp(X)$  tem a propriedade (OF), então  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ .*

Uma condição necessária para que os campos acima tenham integral primeira holomorfa é que  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{<0}$  (ver Lema 5.2). Assim, tomando  $\lambda_1, \lambda_2$  perpendicularmente separados com  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{<0}$ , vemos que os campos acima não possuem integrais primeiras. A ideia da prova dos resultados acima é associar a dinâmica do campo  $X$  à dinâmica de um campo de vetores unidimensional  $Z$ , através do monômio  $x^p y^q$ . Depois, usamos a classificação de campos unidimensionais para deduzir o comportamento das soluções de  $X$ .

Uma outra questão que abordaremos é a questão de normalização de campos holomorfos. Nesse sentido, mostramos o seguinte.

**Teorema 0.2** (Teorema 5.3). *Seja  $X = x^p y^q u(x, y) \left( x(\lambda_1 + h.o.t.) \frac{\partial}{\partial x} + y(\lambda_2 + h.o.t.) \frac{\partial}{\partial y} \right)$  um campo de vetores com  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  e  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{Q}_{>0}$ . Então,  $X$  é conjugado a um campo da forma*

$$x^p y^q \left( \frac{1}{1 - C x^p y^q} \right) \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

onde  $C$  é uma constante. Em particular, se  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ , então

- (i)  *$X$  não possui trajetórias reais periódicas em nenhuma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .*

- (ii) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ , então  $\exp(X)$  tem a propriedade (OF).
- (iii) Se  $\exp(X)$  tem a propriedade (OF), então  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ .

O Teorema 0.1 será utilizado para construir exemplos inesperados de folheações sem integral primeira holomorfa em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ , como explicaremos a seguir. Diremos que um campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^3, 0)$  é não degenerado se todos os autovalores de  $DX(0)$  são não nulos. Usando as definições de [CS09], diremos que uma folheação  $\mathcal{F}_X$  gerada por um campo não degenerado  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^3, 0)$  é genérica se  $DX(0)$  é diagonalizável e  $X$  deixa os planos coordenados invariantes. Neste caso, escreveremos  $X \in \text{Gen}(\mathfrak{X}(\mathbb{C}^3, 0))$ . Diremos que um campo  $X \in \text{Gen}(\mathfrak{X}(\mathbb{C}^3, 0))$  satisfaz à condição  $(\star)$  se existe uma reta real  $L \subset \mathbb{C}$  passando pela origem contendo os autovalores de  $DX(0)$ , tal que uma componente conexa de  $L \setminus \{0\}$  contém exatamente um autovalor  $\lambda(X)$  (ver [CS09]). Em particular, uma folheação não degenerada genérica satisfazendo a condição  $(\star)$  está no domínio de Siegel. Uma das questões estudada nos trabalhos de Câmara e Scárdua [CS09] e de Rebelo e Reis [RR15] é a seguinte:

*Seja  $\mathcal{F}_X$  uma folheação não-degenerada genérica em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  satisfazendo a condição  $(\star)$ . Suponha que o eixo- $z$  é uma separatriz isolada de  $\mathcal{F}$  associada com  $\lambda(X)$ . Se a holonomia  $F$  de  $\mathcal{F}$  com relação ao eixo- $z$  tem a propriedade de órbitas finitas, é verdade que  $\mathcal{F}$  possui 2 integrais primeiras holomorfas independentes?*

Essa questão foi respondida positivamente por Câmara e Scárdua em [CS09]; no entanto, embora não tivesse sido explicitado pelos autores, um dos resultados utilizados na prova só é verdadeiro se a holonomia possui um ponto fixo isolado na origem. Para uma discussão dessa questão, ver as revisões do referido artigo por Y. Genzmer e M. Abate para o MathSciNet e Zentralblatt MATH, respectivamente, bem como a observação 3.3 em [CS17]. Embora acreditou-se que a hipótese sobre fixo isolado pudesse não ser necessária para o resultado principal, Rebelo e Reis mostraram em [RR15] que esse não era o caso. Mais precisamente, eles mostram que a folheação  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  gerada pelo campo

$$X = x(1 + x^2yz^3)\frac{\partial}{\partial x} + y(1 - x^2yz^3)\frac{\partial}{\partial y} - z\frac{\partial}{\partial z},$$

possui uma singularidade do tipo Siegel na origem, o eixo- $z$  é uma separatriz isolada cuja holonomia associada tem órbitas finitas, mas, mesmo assim, admite apenas uma integral primeira holomorfa não constante.



No nosso trabalho, mostramos que é possível construir uma família de exemplos sem qualquer integral primeira holomorfa.

**Teorema 0.3** (Teorema 6.3). *Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$  são perpendicularmente separados por  $\lambda_1 + \lambda_2$ , então o campo*

$$X = (2\pi ix - \lambda_1 x^2 y z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (2\pi iy - \lambda_2 x y^2 z^2) \frac{\partial}{\partial y} - 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z}$$

*é não-degenerado, genérico, satisfaz a condição  $(\star)$ , a holonomia  $H$  da transversal  $z = 1$  em relação à separatriz isolada  $\{x = y = 0\}$  tem a propriedade de órbitas finitas, mas  $X$  não possui nenhuma integral primeira holomorfa.*

Uma grande parte desta tese está preocupada em fornecer mecanismos para identificar se um biholomorfismo tem ou não a propriedade de órbitas finitas e, quando possui, quais as implicações que isso traz em termos de conjuntos analíticos invariantes. Essas questões possuem uma profunda relação com a parte linear do biholomorfismo. No caso de biholomorfismos linearizáveis, a propriedade de órbitas finitas é equivalente a possuir todos os autovalores raízes da unidade:

**Proposição 0.1** (Proposição 2.1). *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  um biholomorfismo linearizável. Então  $F$  tem a propriedade  $OF$  se e somente se os autovalores da parte linear de  $F$  são raízes da unidade. Mais ainda, se  $m$  é o menor número natural tal que  $F^m$  é unipotente, então todo ponto de uma órbita periódica é um ponto fixo de  $F^m$ .*

Para o caso de fluxos, uma das implicações é mantida:

**Teorema 0.4** (Teorema 2.3). *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo singular holomorfo e denotemos por  $S(X)$  o espectro da parte linear de  $X$ . Se  $\exp(X) \in OF$ , então  $S(X) \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ , isto é, os autovalores de  $\exp(X)$  são raízes da unidade.*

No caso de biholomorfismos com órbitas finitas em dimensão  $n = 2$ , provamos que ao menos um dos autovalores é raiz de unidade.

**Teorema 0.5** (Corolário 4.3). *Se  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  tem a propriedade de órbitas finitas, então ao menos um autovalor de  $F$  é raiz da unidade.*

O teorema anterior é ótimo. Mais precisamente, um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  será chamado de *racional* se todos os autovalores da parte linear são raízes da unidade. Um fato notável é que existem biholomorfismos não racionais com a propriedade de órbitas finitas.

**Teorema 0.6** (Teorema 3.1). *Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  satisfaz a condição de Cremer, podemos construir um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  com  $\text{Spec}(D_0F) = \{\lambda, 1\}$  tal que  $F$  está definido em  $\mathbb{C}^2$  e tem a propriedade de órbitas finitas em qualquer aberto da forma  $\mathbb{C} \times U$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto limitado.*

Outro fato notável relacionado ao exemplo acima é o seguinte:

**Teorema 0.7** (Teorema 3.2 e Corolário 3.1). *O biholomorfismo  $F(x, y) = (\lambda x, y + a(x))$ , construído no teorema anterior, é formalmente linearizável. Em particular,  $F$  tem uma integral primeira da forma  $y + b(x)$ , onde  $b(x)$  é uma série divergente com  $b(0) = 0$ .*

O significado geométrico da existência de curvas formais  $\Gamma$  invariantes por  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  é tratado em [LRRS17]. Sob a hipótese de que o multiplicador da restrição  $F|_\Gamma$  não pertence a  $e^{2\pi i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ , é possível mostrar que a curva formal  $\Gamma$  induz a existência de órbitas com um comportamento semelhante ao caso no qual a curva é convergente: ou bem porque  $\Gamma$  é convergente ou porque existem conjuntos invariantes assintóticos a  $\Gamma$ . O exemplo dado pelo Teorema 0.6 mostra que a situação não é análoga na presença de pequenos denominadores e, mais precisamente, quando o multiplicador de  $F|_\Gamma$  pertence a  $e^{2\pi i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})}$ . Em outras palavras, segue do Teorema 0.7 que, por cada ponto  $(0, y_0)$ , passa a curva invariante divergente  $y - y_0 + b(x) = 0$  e, em particular, temos que a curva formal  $C = \{y = b(x)\}$  é invariante pela origem, de modo que a restrição  $F|_C$  tem multiplicador  $\lambda \in 2\pi i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$  e  $F$  não admite variedades estáveis, pois tem órbitas finitas. Em consequência, o exemplo mostra a otimalidade da hipótese sobre o multiplicador de  $F|_\Gamma$  em [LRRS17].

Finalmente, uma outra questão importante relacionada com biholomorfismos em dimensão  $n = 2$  é a existência de curvas invariantes e de curvas parabólicas. Um resultado clássico sobre campos holomorfos em dimensão  $n = 2$  é o teorema de Camacho-Sad que afirma que todo campo de vetores  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$  admite uma curva invariante. Ribón mostra em [Rib05] que, no caso de biholomorfismos  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ , o mesmo não ocorre. De fato, ele constrói exemplos tangentes à identidade e exemplos formalmente linearizáveis sem curvas invariantes. Em [LHS15], os autores mostram que, se  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  é tangente à identidade, então  $F$  possui uma curva de pontos fixos convergente ou admite uma curva parabólica. Em particular, se  $F$  é um biholomorfismo tangente à identidade com a propriedade de órbitas finitas, então deve conter uma curva de pontos fixos.

Neste trabalho, nós mostramos que qualquer biholomorfismo  $F$  com a propriedade de órbitas finitas em dimensão  $n = 2$  sempre admite uma curva de pontos fixos para algum iterado de  $F$ .

**Teorema 0.8 (4.8).** *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  um biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas. Então, algum iterado  $F^m$  de  $F$  possui uma curva analítica de pontos fixos.*

Este resultado pode ser visto como uma versão do teorema de Camacho e Sad sobre curvas invariantes e também como uma generalização do teorema de Rebelo e Reis no contexto de subgrupos cíclicos de  $\text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$ . Mais precisamente, o Teorema A presente em [RR15] nos diz que se, para todo  $m \in \mathbb{N}$ , o conjunto de pontos fixos  $\text{Fix}(F^m)$  nunca for um germe de curva na vizinhança de qualquer um dos seus pontos, então  $F$  é periódico. O Teorema 4.8 é bem mais forte no contexto de dimensão 2: ele diz que é suficiente aplicar o critério na origem. Uma das vantagens é que, assim, podemos obter critérios algébricos para mostrar que um difeomorfismo local não tem órbitas finitas como no Exemplo 4.1.

Uma descrição resumida dos capítulos é dada a seguir. No primeiro capítulo, apresentamos os biholomorfismos com órbitas finitas e revisamos alguns fatos que serão utilizados no restante da tese. No segundo capítulo, buscamos estabelecer as relações entre a propriedade OF e parte linear dos biholomorfismos. No terceiro, estamos preocupados com a construção de biholomorfismos não unipotentes com a propriedade de órbitas finitas. O capítulo quatro é voltado para provar a existência de curvas analíticas de pontos fixos para algum iterado de um biholomorfismo local com órbitas finitas. O capítulo cinco trata da propriedade de órbitas finitas para fluxos em dimensão  $n = 2$ . Finalmente, no capítulo seis, usamos os exemplos de fluxos não integráveis em dimensão  $n = 2$  do capítulo cinco, para construir exemplos de campos holomorfos no domínio de Siegel em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  com separatriz isolada com holonomia de órbitas finitas, mas que não possuem integrais primeiras.

**Palavras-chave:** órbitas finitas, folheações holomorfas, curva parabólica, integral primeira.

# Capítulo 1

## Definições e primeiros resultados

Neste capítulo, definiremos a propriedade de órbitas finitas, fixaremos algumas notações e estabeleceremos os primeiros resultados sobre esta propriedade. As definições e resultados assumidos aqui sobre (germes de) funções holomorfas, campos de vetores e fluxos, bem como seus análogos formais, podem ser encontrados em Ebeling [Ebe07], Ilyashenko-Yakovenko [IY08] e Cerveau-Cano-Deserti [CCD13]. Usamos as seguintes convenções:

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  é o conjunto dos naturais;

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  é o conjunto dos inteiros não negativos;

$\mathcal{O}_{n,0}$  é o anel local de funções holomorfas na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ ;

$\mathfrak{m} = \{f \in \mathcal{O}_{n,0}; f(0) = 0\}$  é o ideal maximal de  $\mathcal{O}_{n,0}$ ;

$\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  é anel de germes de biholomorfismos que fixam a origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ ;

$\mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é o  $\mathcal{O}_{n,0}$ -módulo de campos de vetores holomorfos na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ ;

$\mathfrak{X}_0(\mathbb{C}^n, 0) = \{X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0); X(0) = 0\}$  é submódulo dos campos singulares na origem;

De modo análogo, podemos considerar os completamentos formais  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$

$\widehat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^n, 0), \dots$

### 1.1 A propriedade de órbitas finitas

Seja  $F : U \rightarrow V$  um biholomorfismo, onde  $U$  e  $V$  são subconjuntos abertos de  $\mathbb{C}^n$  que contêm a origem e  $F(0) = 0$ . Fixado  $p \in U$ , nós definimos  $F^0(p) = p$  e, se  $F^0(p), \dots, F^{j-1}(p) \in U$ ,  $j > 0$ , nós colocamos  $F^j(p) = F(F^{j-1}(p))$ . Analogamente, dado  $q \in V$  definimos  $F^{-j}(q) = F^{-1}(F^{-(j-1)}(q))$ , se  $j > 1$  e  $F^{-1}(p), \dots, F^{-(j-1)}(p) \in V$ , onde  $F^{-1}$  denota a inversa de  $F$ .

**Definição 1.1.** Seja  $F : U \rightarrow V$  um biholomorfismo entre vizinhanças  $U$  e  $V$  de  $0 \in \mathbb{C}^n$  com  $F(0) = 0$ . Dados  $A \subset U \cap V$  e  $p \in A$ , definimos:

1. a *órbita positiva* de  $p$  por  $F$  em  $A$  como

$$O_{F,A}^+(p) = \{F^j(p); F^k(p) \in A, 0 \leq k \leq j\};$$

2. a *órbita negativa* de  $p$  por  $F$  em  $A$  como

$$O_{F,A}^-(p) = O_{F^{-1},A}^+(p);$$

3. a *órbita* de  $p$  por  $F$  em  $A$  como  $O_{F,A}(p) = O_{F,A}^+(p) \cup O_{F,A}^-(p)$ .

Diremos que  $F$  tem a *propriedade de órbitas finitas* (escrevendo  $F \in (\text{OF})$ ) se existir uma vizinhança  $A \subset U \cap V$  de  $0$  tal que  $O_{F,A}(p)$  seja um conjunto finito, para todo  $p \in A$ . Neste caso, diremos também que  $F$  tem a *propriedade de órbitas finitas em  $A$* . Em particular, temos que  $F \in (\text{OF}) \Leftrightarrow F^{-1} \in (\text{OF})$ .

**Observação 1.1.** (Invariância por restrição) Se  $F : U \rightarrow V$  é um biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas sobre  $A$  e  $B \subset A$  é uma vizinhança de  $0$ , então  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas sobre  $B$ . Isso segue da inclusão  $O_{F,B}(p) \subset O_{F,A}(p)$

Denotaremos por  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  o grupo de germes de biholomorfismos fixando a origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ . A observação anterior permite-nos definir a propriedade OF para os elementos  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  sem maiores complicações.

**Definição 1.2.** Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  um biholomorfismo local. Diremos que  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas (escrevendo  $F \in (\text{OF})$  ou  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ ) se existir um representante  $F : U \rightarrow V$  e uma vizinhança  $A \subset U \cap V$  de  $0$  tal que  $F$  tenha a propriedade (OF) em  $A$ . Se, além disso,  $A$  for aberto e conexo, diremos que  $A$  é um *domínio fundamental* de  $F$ .

Vejamos algumas propriedades do conjunto  $\text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$  formado pelos biholomorfismo com órbitas finitas.

**Lema 1.1.** Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ .

- (i) (invariância por conjugação analítica) Se  $G$  é analiticamente conjugado a  $F$ , isto é, se  $F = HGH^{-1}$  para algum  $H \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ , então

$$F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0) \Leftrightarrow G \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0).$$

(ii) (invariância por iteração) São equivalentes

- (a)  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ .
- (b)  $F^m \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $\forall m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $F^m \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* (i) Suponhamos que  $H \circ G = F \circ H$ . Seja  $U$  uma vizinhança de 0 tal que todos os germes envolvidos tenham representantes definidos e injetivos em  $U$ . Existe uma vizinhança  $0 \in A \subset U$  tal que  $G(A), H(A), H(G(A)) \subset U$ . Usando a igualdade  $H \circ G = F \circ H$  sucessivas vezes, podemos mostrar que se  $x, G^\pm(x), \dots, G^{\pm k}(x) \in A$ , então  $F^l(H(x)) = H(G^l(x))$  para  $l = \pm 1, \dots, \pm k$ . Em particular, temos

$$H(O_{G,A}(x)) = O_{F,H(A)}(H(x)) \quad \text{para todo } x \in A$$

Portanto,  $G$  tem a propriedade de órbitas finitas em  $A$  se e somente se  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas em  $H(A)$ . Isso mostra (i).

(ii) Seja  $U$  uma vizinhança da origem na qual  $F$  e  $F^{-1}$  estão definidas. Dado  $m \in \mathbb{N}$ , existe uma vizinhança  $V$  de 0 tal que  $F^{\pm j}(p) \in U, \forall p \in V, \forall 0 \leq j \leq m$ . Daí temos

$$O_{F^m,V}(p) \subset O_{F,U}(p), \quad \forall p \in V.$$

Em particular, se  $F \in OF$  e  $U$  um domínio fundamental de  $F$ , então  $F^m$  tem a propriedade de órbitas finitas em  $V$ . Isso mostra que (a) $\Rightarrow$ (b). É óbvio que (b) $\Rightarrow$ (c). Vamos mostrar que (c) $\Rightarrow$ (a). Seja  $m \in \mathbb{N}$  e Seja  $V$  uma vizinhança na qual  $F$  e  $F^m$  estão definidos e  $F^m$  tem a propriedade de órbitas finitas em  $V$ . Então, para cada  $p \in V$ , ou o conjunto  $\{j \in \mathbb{Z} : F^{mj}(p) \in V\}$  é finito ou existe  $k \in \mathbb{Z}^*$  tal que  $F^{mk}(p) = p$ . Em qualquer um dos casos, vemos que  $O_{F,V}(p)$  é um conjunto finito.  $\square$

Dizemos que um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  é periódico se ele tem ordem finita no grupo  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ , isto é, se existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $F^m = \text{id}$ . Em dimensão  $n = 1$  a propriedade (OF) é equivalente a periodicidade. Mais precisamente, nós temos o seguinte:

**Teorema 1.1** ([MM80]). *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ . Então  $F \in OF$  se, e somente se,  $F$  é periódico.*

Em dimensão  $n > 1$ , a equivalência dada no teorema 1.1 está longe de ser verdadeira, como mostra o seguinte exemplo.

**Exemplo 1.1.** O biholomorfismo  $F(x, y) = (x, x + y)$  tem a propriedade (OF) em cada vizinhança limitada de  $0 \in \mathbb{C}^2$ : a reta  $\{x = 0\}$  é o conjunto de pontos fixos de  $F$  e  $F$  é uma translação não-trivial em toda reta da forma  $x = c$  com  $c \neq 0$ . Em particular,  $F$  não é periódico. O mesmo acontece com o biholomorfismo  $G = (x, y + x^2)$ .

**Observação 1.2.** Os biholomorfismos do exemplo 1.1 fazem parte de uma família mais ampla de biholomorfismos com órbitas finitas, formada por fluxos de campos holomorfos com integral primeira holomorfa (ver seções 1.3 e 5.3).

**Observação 1.3.** O subconjunto  $\text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0) \subset \text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  não é um subgrupo. Por exemplo, os biholomorfismos  $F(x) = -x$  e  $G(x) = -\frac{x}{1-x}$  são periódicos de período 2, e portanto pertencem a  $\text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ , mas a composição

$$H(x) = (F \circ G)(x) = \frac{x}{1-x}$$

não é periódica, já que  $H^n(x) = \frac{x}{1-nx}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . No entanto, é fácil ver que o subconjunto de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$  formado pelos biholomorfismos lineares com órbitas finitas formam um subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ , isomorfo ao grupo de raízes da unidade.

Para dimensão  $n \geq 2$ , veremos no próximo capítulo que  $\text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$  não é um subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ , mesmo quando consideramos apenas os biholomorfismos lineares dessa família (ver corolário 2.1)

## 1.2 A propriedade de órbitas fechadas

A propriedade (OF) é equivalente à propriedade de órbitas fechadas, a qual definimos a seguir.

**Definição 1.3.** Dizemos que  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  tem a propriedade de órbitas fechadas se existe vizinhança conexa  $U$  de 0 na qual  $F$  e  $F^{-1}$  estejam definidas e a órbita  $O_{F,U}(p)$  seja um subconjunto fechado de  $U$ , para todo  $p \in U$ .

Em princípio, não é claro que a propriedade de órbitas fechadas seja invariante por restrição. Porém, isso será uma consequência do seguinte resultado.

**Teorema 1.2.** *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas.

(ii)  $F$  tem a propriedade de órbitas fechadas.

*Demonstração.* Como todo conjunto finito em  $\mathbb{C}^n$  é fechado, segue que (i)  $\Rightarrow$  (ii). Para mostrar a recíproca, vamos assumir que  $F$  tem a propriedade de órbitas fechadas e tomar uma vizinhança  $U$  dada pela definição 1.3. Seja  $V = B_r(0)$  uma vizinhança de 0 com  $\bar{V} \subset \text{int}(U)$ . Afirmamos que  $O_{F,V}(p)$  é finito para todo  $p \in V$ , ou seja,  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas em  $V$ . Com efeito, vamos supor que existe uma órbita infinita  $O_{F,V}(p)$  (em particular, não periódica). Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $O_{F,V}^+(p)$  é infinita. Então  $O_{F,V}^+(p) = O_{F,U}^+(p)$ . Como  $\bar{V}$  é compacto em  $\text{int}(U)$ , existe um ponto de acumulação  $x \in \bar{V} \subset \text{Int}(U)$  para  $O_{F,V}^+(p)$ . Como  $O_{F,U}(p)$  é fechado em  $U$  e  $x \in U$ , segue que  $x \in O_{F,U}(p)$ . Portanto  $O_{F,U}(p) = O_{F,U}(x)$  e existe uma sequência infinita  $(p_m)_{m \geq 1} \subset O_{F,V}^+(p) \setminus \{x\}$  tal que  $p_m = F^{j_m}(p)$ ,  $1 \leq j_m < j_{m+1}$ , e  $p_m \rightarrow x$  quando  $m \rightarrow \infty$ . Agora, note que  $F(x) \in U$  e  $(F(p_m))_{m \geq 1}$  é uma sequência infinita em  $O_{F,U}(p) \setminus \{F(x)\}$  com  $F(p_m) \rightarrow F(x)$ , ou seja,  $F(x)$  é ponto de acumulação de  $O_{F,U}(p)$ . Se  $F^{-1}(x) \in U$ , então  $(F^{-1}(p_m))_{m \geq 2}$  é uma sequência infinita em  $O_{F,U}(p) \setminus \{F^{-1}(x)\}$  com  $F^{-1}(p_m) \rightarrow F^{-1}(x)$ . Prosseguindo dessa maneira, vemos que todo ponto de  $\overline{O_{F,U}(p)} \cap \bar{V}$  é um ponto de acumulação, isto é,  $\overline{O_{F,U}(p)} \cap \bar{V}$  é perfeito e, em particular (ver [Rud76], p.41), não enumerável. Mas isso é absurdo, pois  $\overline{O_{F,U}(p)} \cap \bar{V}$  está contido em  $O_{F,U}(p)$  que é enumerável.  $\square$

### 1.3 Campos de vetores e fluxos

Denotamos por  $\mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  o  $\mathcal{O}_{n,0}$ -módulo de germes de campos holomorfos na origem de  $\mathbb{C}^n$ , onde  $\mathcal{O}_{n,0}$  denota o anel local de funções holomorfas na origem  $0 \in \mathbb{C}^n$ . Dado um germe  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$ , e uma vizinhança  $U$  na qual  $X$  está definido, podemos considerar o fluxo holomorfo de  $X$ ,

$$\phi : U \times D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}^n, (z, t) \mapsto \phi^t(z),$$

onde  $D_r(0) = \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$ . Tomando  $U$  suficientemente pequeno, podemos considerar fluxos com  $r > 1$ . Se  $X$  é singular na origem ( $X(0) = 0$ ), então para cada tempo  $t \in D_r(0)$ , a aplicação  $z \mapsto \phi^t(z)$  define um biholomorfismo fixando a origem  $\phi^t \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ , chamado de fluxo de  $X$  em tempo  $t$ . Usaremos a notação  $\exp(tX)$  para denotar este biholomorfismo e escreveremos também  $\exp(1X) = \exp(X)$  para



o fluxo em tempo  $t = 1$ . Pode-se mostrar que se  $f \in \mathcal{O}_{n,0}$  então

$$f \circ \phi^t(z) = f(z) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j(f),$$

onde  $X$  agora é interpretado como uma derivação do anel de funções holomorfas  $\mathcal{O}_{n,0}$  e  $X^n = X \circ X^{n-1}$ . Tomando  $f = z_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , obtemos

$$\phi^t(z_1, \dots, z_n) = \left( z_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j(z_1), \dots, z_n + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} X^j(z_n) \right).$$

No caso em que  $X$  é o campo coordenada, a identidade acima é precisamente a fórmula de Taylor. Além disso, as identidades acima permitem-nos definir o fluxo de um campo de vetores formal  $X \in \widehat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^n, 0)$ , bem como a composição  $\phi^{f(z)}(z)$ , quando  $f \in \widehat{\mathcal{O}}_{n,0}$  for uma série de potências formais em torno de  $0 \in \mathbb{C}^n$ .

**Definição 1.4.** Diremos que um campo singular  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  tem a propriedade de órbitas finitas (e escreveremos  $X \in OF$ ) quando o fluxo em tempo 1,  $F = \exp(X) \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ , tem a propriedade OF.

**Lema 1.2.** Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é singular, então são equivalentes:

- (a)  $X \in OF$ .
- (b)  $mX \in OF, \forall m \in \mathbb{N}$ .
- (c)  $mX \in OF$  para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

*Demonstração.* Ponha  $F = \exp(X) \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Então

$$F^m = \exp(mX), m \in \mathbb{Z}.$$

O resultado segue agora do Lema 1.1

□

Em outras palavras, o lema anterior nos diz que a propriedade OF para campos é invariante pela ação de  $\mathbb{Z}$ . No entanto, não é invariante pela ação de  $\mathbb{R}$ , como pode ser visto no exemplo a seguir.

**Exemplo 1.2.** O fluxo em tempo 1 de um campo unidimensional linear  $X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x}$  é  $f = e^\lambda x$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Segue do Teorema 1.1 de Matei-Moussu que

$$X \in OF \Leftrightarrow f \text{ é periódico} \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}.$$

Dois campos de vetores  $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  são analiticamente equivalentes (ou conjugados) se existe  $H \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  tal que  $H_*X = Y$ , isto é

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x) \cdot X(x) = Y(H(x)).$$

É fácil ver que essa regra define uma relação de equivalência em  $\mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Além disso, se  $H$  é uma conjugação entre  $X$  e  $Y$ , então  $H$  é uma conjugação entre os fluxos desses campos. Portanto a propriedade  $OF$  é invariante por conjugação, isto é, se  $X$  é analiticamente equivalente a  $Y$  então  $X \in OF \Leftrightarrow Y \in OF$ .

Portanto, para saber se um campo  $X$  tem a propriedade  $(OF)$ , é suficiente saber se algum campo particular, equivalente a  $X$ , tem esta propriedade. Nesse sentido, o teorema de Poincaré-Dulac será de grande utilidade.

**Definição 1.5.** Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo singular. Denotemos por  $D_0X$  a parte linear de  $X$ , ou matriz de linearização de  $X$ . O espectro de  $D_0X$  é o conjunto  $\text{Spec}(D_0X)$  dos autovalores de  $D_0X$ . O espectro de  $X$ , denotado aqui por  $S(X)$ , é o espectro da parte linear de  $X$ , isto é,  $S(X) = \text{Spec}(D_0X)$ .

## 1.4 Formas normais

**Teorema 1.3** (Frobenius). *Seja  $Y = (Y_1, Y_2) \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$  um campo regular com  $\lambda_2 = Y_2(0, 0) \neq 0$ . Existe uma mudança de coordenadas analítica  $\psi(x, y)$  tal que*

1.  $\psi^*Y = \partial_y$ .
2.  $\psi(x, y) = (\psi_1(x, y), y f_2(x, y))$ , onde  $\psi_1(x, 0) = x$  e  $f_2(0, 0) = \lambda_2$
3. se  $x = 0$  é invariante por  $Y$ , então  $x = 0$  é invariante por  $\psi$ ;
4. se  $x$  é integral primeira de  $Y$  então  $x \circ \psi = x$ .

*Demonstração.* Se  $\phi^t(x, y)$  é o fluxo de  $Y$ , defina  $\psi(x, y) = \phi^y(x, 0)$ . Por construção temos que  $\psi_*\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = Y$ . Além disso, como

$$\phi^t(x, y) = \left( x + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Y^j(x), y + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j!} Y^j(y) \right),$$

segue  $\psi_1(x, 0) = x$ ,  $\psi_2(x, y) = y(Y_2(x, 0) + y\alpha(x, y))$ . Os outros itens seguem diretamente. □

**Definição 1.6.** Um ponto  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$  é dito *ressonante* se existe  $m \in \mathbb{N}_0^n$  com  $|m| \geq 2$  e algum  $1 \leq k \leq n$  tal que

$$\langle \lambda, m \rangle = \lambda_k.$$

Esta equação é chamada de *ressonância* e o respectivo polinômio

$$F_{k,m} = x^m e_k = (0, \dots, x_1^{m_1} \cdot x_n^{m_n}, \dots, 0)$$

é chamado de *monômio ressonante*.

Note que  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  é ressonante se e somente se  $(\lambda_{\sigma(1)}, \dots, \lambda_{\sigma(n)})$  é ressonante, onde  $\sigma$  é uma permutação dos índices. Tendo isso em mente, dizemos que uma matriz  $A \in M(n, \mathbb{C})$  é ressonante se uma  $n$ -upla com seus autovalores é ressonante. Um campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é ressonante se sua matriz de linearização é ressonante. Por fim, como campos equivalentes possuem matrizes de linearização semelhantes, segue que  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é ressonante se e somente se todo campo  $Y$  equivalente a  $Y$  é ressonante.

**Definição 1.7.** Um campo  $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{C}^n, 0)$  está no domínio de Poincaré se 0 não pertence ao fecho convexo de  $S(X) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , isto é, se não existem  $t_j \in [0, 1]$  tais que

$$t_1 + \dots + t_n = 1 \quad \text{e} \quad t_1 \lambda_1 + \dots + t_n \lambda_n = 0.$$

**Teorema 1.4** (Forma normal de Poincaré-Dulac). *Se  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é um campo de vetores no domínio de Poincaré, então  $X$  possui finitas ressonâncias e é equivalente a um campo da forma*

$$Ax + \sum c_{k,m} F_{k,m},$$

onde  $A$  está na forma canônica de Jordan,  $c_{k,m} \in \mathbb{C}$  e os  $F_{k,m}$  são os monômios ressonantes de  $X$ . Em particular, se  $X$  está no domínio de Poincaré e não possui ressonâncias ele é linearizável.

Em dimensão  $n = 2$ , o teorema de Poincaré-Dulac assume a forma seguinte:

**Teorema 1.5** (Poincaré). *Seja  $X(x, y) = (\lambda_1 x + \phi_1(x, y), \lambda_2 y + \phi_2(x, y))$  um campo singular com  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$  e  $\text{ord}(\phi_j) \geq 2$ ,  $j = 1, 2$ . Se  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \{\dots, 1/3, 1/2, 2, 3, \dots\}$ , então  $X$  é analiticamente linearizável.*

Para uma demonstração, consultar [CS87]

**Exemplo 1.3.** Seja  $X \in \mathfrak{X}_0(\mathbb{C}^2, 0)$  linearizável não identicamente nulo com  $S(X) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$  e ponha  $F = \text{Exp}(X)$ . Salvo mudança de coordenadas vemos que:

- (i) Se  $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ , então  $X = x\partial_y$  e então  $F = (x, y + x) \in OF$ .
- (ii) Se  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = \lambda \neq 0$ , então  $X = \lambda y\partial_y$  e  $F = (x, e^\lambda y) \in OF \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}$ .
- (iii) Se  $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$  e  $X$  é diagonalizável então  $F = (e^{\lambda_1}x, e^{\lambda_2}y) \in OF \Leftrightarrow \lambda_j \in 2\pi i\mathbb{Q}, j = 1, 2$ .
- (iv) Se  $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$  e  $X$  não é diagonalizável então  $F = (e^\lambda x, e^\lambda y + e^\lambda x) \in OF \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}$ .

Logo

$$X \in OF \Leftrightarrow \text{Spec}X \subset 2\pi i\mathbb{Q}.$$

Veremos no próximo capítulo que a equivalência acima vale para campos linearizáveis em geral (ver Proposição 2.1). No caso (iv), tomando  $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$ , obtemos um campo sem integral primeira, cujo fluxo é não periódico, mas que possui a propriedade OF.

## 1.5 Decomposição semisimples/nilpotente e biholomorfismos unipotentes

Diremos que um campo singular  $X \in \hat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^n, 0)$  é semisimples se ele for conjugado a um campo da forma  $\sum_1^n \lambda_j x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ . Dizemos que  $X$  é nilpotente se a parte linear de  $X$  é nilpotente. Dizemos que uma decomposição

$$X = X_S + X_N$$

é uma decomposição semisimples/nilpotente se  $X_S$  é semisimples,  $X_N$  é nilpotente e  $[X_N, X_S] = 0$ . Todo campo  $X$  admite uma única decomposição Semisimples/Nilpotente (ver [Mar81]). Denotaremos por  $\hat{\mathfrak{X}}_N(\mathbb{C}^n, 0)$  o subconjunto de  $\hat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^n, 0)$  formado pelos campos de vetores nilpotentes.

Um biholomorfismo formal  $F \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$  é dito unipotente se

$$\text{Spec}(D_0F) = \{1\}.$$

Denotaremos por  $\widehat{\text{Diff}}_u(\mathbb{C}^n, 0)$  o subconjunto de  $\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^n, 0)$  formado pelos difeomorfismos unipotentes. Temos o seguinte:

**Teorema 1.6.** *A imagem de  $\widehat{\mathfrak{X}}_N(\mathbb{C}^n, 0)$  pela aplicação exponencial é  $\widehat{\text{Diff}}_u(\mathbb{C}^n, 0)$  e a aplicação  $\exp : \widehat{\mathfrak{X}}_N(\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow \widehat{\text{Diff}}_u(\mathbb{C}^n, 0)$  é uma bijeção.*

Para uma demonstração, consultar [Rib15].

## 1.6 Conjuntos analíticos invariantes

Nesta seção, a fim de simplificar as considerações sobre domínios de funções para conjuntos invariantes, usaremos a notação de germes para funções e conjuntos analíticos invariantes.

**Definição 1.8.** Uma subvariedade analítica  $W \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é invariante por  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  se o germe de  $F(W)$  coincide com o germe de  $W$  na origem. Ela será estável quando for invariante e a origem for um atrator de  $F|_W$ .

Em outras palavras,  $W$  é estável para  $F$  se existe uma vizinhança  $U$  de 0 onde  $F$  e  $W$  estão definidas e as duas propriedades valem:

1.  $F(U \cap W) \subset U \cap W$  e
2. Para qualquer  $x \in U \cap W$ , a órbita positiva  $(F^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge a zero.

**Definição 1.9.** Uma subvariedade  $W \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é invariante por um campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  quando  $X(x)$  é tangente a  $W$  em  $x$ , para todo ponto regular  $x \in (W, 0)$ . Em particular,  $W$  será invariante para  $\exp(X)$ . Diremos que  $W$  é estável se for estável para  $\exp(X)$ .

Recordamos ainda que que uma curva analítica (singular)  $S \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  é um conjunto analítico complexo de dimensão 1 nos seus pontos suaves. Temos o seguinte:

**Teorema 1.7.** *O germe de curva analítico irredutível  $S \subset (\mathbb{C}^n, 0)$  admite uma aplicação holomorfa injetiva  $\gamma : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ ,  $t \rightarrow \gamma(t) \in S$ . A aplicação  $\gamma$  é chamada de uniformização ou parametrização local da curva  $S$ .*

Sem perda de generalidade, podemos assumir que  $\gamma'(t) \neq 0$  se  $t \neq 0$ . Finalmente, parametrizações são definidas unicamente, módulo um biholomorfismo: para qualquer outra parametrização injetiva  $\tilde{\gamma}$ , existe  $h \in \text{Diff}(\mathbb{C}^1, 0)$  tal que  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ h$ .

Se  $X$  é um germe de campo de vetores holomorfo  $(\mathbb{C}^n, 0)$ , uma separatriz de  $X$  é um germe de curva analítica  $C \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  invariante por  $X$ .

## 1.7 Teorema de Leau-Fatou

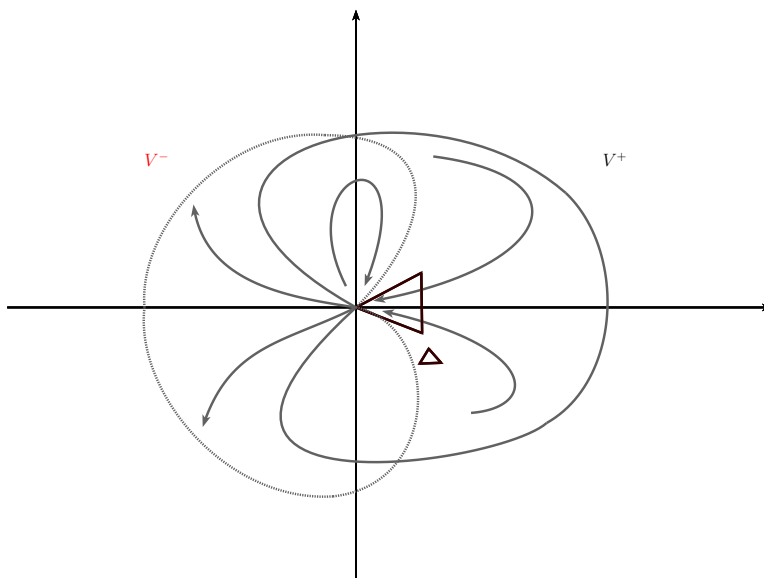
Nesta seção falaremos um pouco da dinâmica de biholomorfismos parabólicos unidimensionais. As provas e construções mencionadas podem ser encontrados em [Lor06].

O Teorema da flor de Leau nos diz que se  $f(z) = z - z^{p+1} + \dots$  é um biholomorfismo unidimensional, então existe uma vizinhança  $U$  de 0 obtida como união de  $2p$  abertos setoriais dispostos em torno da origem como pétalas de uma flor, nas quais a dinâmica de  $f$  é contrativa ou repulsora. Este teorema assume uma versão contínua quando  $f$  é o fluxo em tempo 1 de um campo de vetores nilpotente  $Z$ . Notemos que se  $Z$  é um campo em dimensão complexa 1, então ele é analiticamente equivalente a um campo da forma (ver [Lor06])

$$X_p = -\frac{z^{p+1}}{1 - Cz^p} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Assim, é suficiente considerar este caso. Mais ainda, o caso  $p = 1$  é particularmente interessante. Primeiro, porque será usado em detalhes na seção 5.4. Segundo, porque sua descrição determina os demais casos, uma vez que  $(z^p)^*(pX_1) = X_p$ .

**Teorema 1.8.** (*Leau-Fatou*) *Se  $Z = -\frac{z^2}{1-Cz} \frac{\partial}{\partial z}$  é um campo holomorfo unidimensional então existe uma vizinhança pontilhada  $V = V^- \cup V^+$  de  $0 \in \mathbb{C}$  tal que as trajetórias reais de  $Z$  são dadas como na figura abaixo. Mais precisamente, a*



trajetória  $\gamma_z$  com condição inicial  $\gamma_z(0) = z$ , para  $z \in V^+$  (resp.  $z \in V^-$ ), está

definida em  $[0, \infty)$  (resp.  $(-\infty, 0]$ ) e satisfaz

$$(1.1) \quad \gamma(t) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \rightarrow 1 \quad (\text{resp.} \quad \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \rightarrow -1),$$

quando  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ ). Além disso, se  $\gamma_z([0, \infty)) \subset V_+ \cup V_-$ , então  $z \in V_+$  e, se  $\gamma_z(-\infty, 0] \subset V_+ \cup V_-$ , então  $z \in V_-$ .

A prova desse resultado consiste em estudar o campo na vizinhança do infinito através da mudança de coordenadas  $w = \psi(z) = \frac{1}{z} + C \ln z$  que transforma  $Z$  no campo constante  $\frac{\partial}{\partial w}$ . Por exemplo, no caso  $Z = -z^2 \frac{\partial}{\partial z}$  temos  $w = \frac{1}{z}$ ; as soluções de  $\frac{\partial}{\partial w}$  são  $\gamma(t) = w + t$ . Portanto as soluções de  $Z$  serão da forma  $\frac{1}{w+t}$  e é fácil justificar o comportamento assintótico da solução, em relação ao eixo real.

# Capítulo 2

## Órbitas finitas e parte linear

Neste capítulo, nós estudamos a relação entre a propriedade de órbitas finitas e posição, no plano complexo, dos autovalores da matriz de linearização. Começaremos tratando o caso linearizável que, pelo Lema 1.1, é equivalente ao caso linear. Depois apresentaremos o Teorema da variedade estável para biholomorfismos e sua versão para campos de vetores. Finalizaremos mostrando que se um fluxo  $\exp(X)$  tem a propriedade  $(OF)$  então o espectro de  $X$  está contido em  $2\pi i\mathbb{Q}$ .

### 2.1 Caso linear

Seja  $T = Az$  um biholomorfismo linear,  $A \in GL(n; \mathbb{C})$ . Vamos considerar as órbitas de  $T$  em uma bola  $B$  centrada em 0. Seja  $\lambda$  um autovalor de  $T$  e fixemos um autovetor  $0 \neq v \in B$ , *i.e.*  $T(v) = \lambda v$ . Então  $T^m v = \lambda^m v$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . Assim, se  $|\lambda| < 1$ , então a órbita positiva de  $v$  em  $B$  é infinita e acumula em 0. Se  $|\lambda| > 1$ , então a órbita negativa de  $v$  em  $B$  é infinita e acumula em 0. Se  $\lambda$  é da forma  $\lambda = e^{2\pi i\theta}$  com  $\theta$  irracional, então a órbita de  $v$  é infinita. Trocando  $v$  por  $v_n = v/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , nas considerações anteriores obtemos uma sequência de vetores com órbita infinita e  $v_n \rightarrow 0$ . Em particular, segue que se  $T$  é um biholomorfismo linear com a propriedade de órbitas finitas então os autovalores de  $T$  são todos raízes da unidade. Uma versão mais geral dessa última afirmação vale graças ao teorema da Variedade Estável (Ver Teorema 2.1). No caso linearizável, vale a recíproca.

**Proposição 2.1.** *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  um biholomorfismo linearizável. Então  $F$  tem a propriedade  $OF$  se e somente se os autovalores da parte linear de  $F$  são*



raízes da unidade. Mais ainda, se  $m$  é o menor número natural tal que  $F^m$  é unipotente, então todo ponto de uma órbita periódica é um ponto fixo de  $F^m$ .

*Demonstração.* Como biholomorfismos equivalentes possuem o mesmo conjunto de autovalores, podemos supor que  $F$  é linear. Já vimos que se  $F$  tem a propriedade OF então seus autovalores são raízes da unidade. Para a recíproca é suficiente mostrar que  $\mathbb{C}^n$  admite uma decomposição  $\mathbb{C}^n = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$  em subespaços invariantes por  $F$  tal que, para cada  $x_j \in V_j$  a órbita  $\mathcal{O}_{F,U}(x_j)$  é finita em todo conjunto limitado  $U$  com  $x_j \in U \cap V_j$ . Pelo teorema da forma canônica de Jordan, é suficiente portanto considerar o caso em que a matriz de  $F$  é diagonalizável ou da forma

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & & & & \\ & 1 & \lambda & & \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & \lambda \\ & & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde  $\lambda$  é raiz da unidade. Nós podemos supor que  $A$  não é diagonal já que, caso contrário, o resultado seria trivial. Tome  $x \neq 0$  em  $\mathbb{C}^n$ . Temos

$$T(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_1 + \lambda x_2, \dots, x_{n-1} + \lambda x_n)$$

Aplicando indução podemos mostrar que

$$T^m(x) = (\lambda^m x_1, m\lambda^{m-1}x_1 + \lambda^m x_2, \dots, P_{n,m}(x_1, \dots, x_{n-2}) + m\lambda^{m-1}x_{n-1} + \lambda^m x_n)$$

com  $P_{j,m}(0) = 0$ , onde  $P_{j,m}$  é uma aplicação linear para todos  $j, m$ . Em outras palavras, se  $\pi_j$  é a  $j$ -ésima projeção em  $\mathbb{C}^n$ , então  $\pi_1(T^m(x)) = \lambda^m x_1$ ,

$$\pi_2(T^m(x)) = m\lambda^{m-1}x_1 + \lambda^m x_2,$$

$$\pi_3(T^m(x)) = P_{3,m}(x_1) + m\lambda^{m-1}x_2 + \lambda^m x_3$$

⋮

$$\pi_n(T^m(x)) = P_{n,m}(x_1, \dots, x_{n-2}) + m\lambda^{m-1}x_{n-1} + \lambda^m x_n.$$

Seja  $x \neq 0$ . Consideremos o primeiro índice  $j$  tal que  $x_j \neq 0$ . Se  $j = n$  então o ponto  $x$  é periódico, pois  $\lambda$  é raiz da unidade. Se  $j < n$  então

$$|\pi_{j+1}(T^m(x))| = |m\lambda^{m-1}x_j + \lambda^m x_{j+1}| \rightarrow \infty.$$

Em todo caso, vemos que  $x$  tem órbita finita em qualquer vizinhança limitada de 0. A segunda parte do teorema segue da discussão anterior ao analisar  $T$  em cada

bloco. □

**Corolário 2.1.** *Se  $n \geq 2$ , então o subconjunto de  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  formado pelos biholomorfismos lineares com a propriedade OF não é um subgrupo de  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ .*

*Demonstração.* Sejam

$$F(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, x_3, \dots, x_n) \text{ e } G(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, x_3, \dots, x_n)$$

Então  $F, G$  são lineares e possuem a propriedade OF, já que são unipotentes. No entanto,  $F \circ G = (x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_3, \dots, x_n) \notin \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ , pois tem autovalores  $1, \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ . □

**Corolário 2.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo holomorfo e denotemos por  $S(X)$  o espectro da parte linear de  $X$ . Se  $X$  é linearizável então*

$$X \in OF \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}, \forall \lambda \in S(X).$$

*Demonstração.* Se  $X$  é linearizável, então  $F := \text{Exp}(X)$  é linearizável e seus autovalores são da forma  $e^\lambda$ , com  $\lambda \in S(X)$ . Segue da caracterização de biholomorfismos linearizáveis com a propriedade OF (ver Proposição 2.1) que:

$$X \in OF \Leftrightarrow F \in OF \Leftrightarrow e^\lambda \text{ é raiz da unidade, } \forall \lambda \in S(X) \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}, \forall \lambda \in S(X).$$

□

**Exemplo 2.1.** O campo  $X = x((2\pi i + y)\frac{\partial}{\partial x})$  não é linearizável. De fato, temos que  $\text{exp}(X) \notin OF$ , pois  $\text{exp}(X) = (e^{2\pi i + yx}, y) = (e^{yx}, y)$ ; logo, em cada nível  $\{y = c\}$  com  $c \notin 2\pi i\mathbb{Q}$ , todos os pontos  $x \neq 0$  têm órbitas infinitas. Como o campo linear  $X_0 = 2\pi ix\frac{\partial}{\partial x} \in OF$ , segue que  $X$  não é linearizável.

## 2.2 Teorema da variedade estável e aplicações

No capítulo anterior, vimos que para um biholomorfismo linearizável a propriedade (OF) é equivalente a possuir todos os autovalores raízes da unidade. Assim, uma questão natural é a seguinte: *Se  $F \in OF$  será que os autovalores de  $F$  são*

*necessariamente raízes da unidade?* Veremos que, em geral, a resposta à esta pergunta é negativa (Ver Teorema 3.1). No entanto, veremos que a resposta é positiva nos casos em que  $F$  for o fluxo de um campo holomorfo (ver Teorema 2.3) e está fortemente relacionada com a existência de conjuntos invariantes.

No que segue, esclareceremos melhor esses pontos. Inicialmente, apresentaremos variações flexíveis do clássico Teorema da Variedade Estável (TVE) (ver [Rue89], p.26), também chamado de Teorema de Hadamard-Perron, no caso holomorfo (ver [IY08], p.107). Em seguida, usaremos estes resultados, bem como a forma normal de Poincaré-Dulac, para mostrar que a propriedade (OF) para um campo implica autovalores contidos em  $2\pi i\mathbb{Q}$ .

**Teorema 2.1** (TVE para biholomorfismos). *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  um biholomorfismo  $\rho$ -hiperbólico, isto é, o espectro  $\text{Spec}(D_0F)$  da parte linear de  $F$  é disjunto de  $A = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = \rho\}$ . Sejam  $L^-$  e  $L^+$  os subespaços lineares invariantes por  $D_0F$ , associados com*

$$A_\rho^- = \{\lambda \in \text{Spec}(D_0F); |\lambda| < \rho\} \quad \text{e} \quad A_\rho^+ = \{\lambda \in \text{Spec}(D_0F); |\lambda| > \rho\},$$

*respectivamente. Se  $\rho \leq 1$ , existe uma subvariedade lisa  $W^-$  invariante e estável por  $f$ , passando pela origem e tangente a  $L^-$ .*

Uma consequência imediata do teorema 2.1 é a seguinte.

**Corolário 2.3.** *Se  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ , então os autovalores da parte linear de  $F$  têm módulo 1.*

*Demonstração.* Se  $F$  tivesse um autovalor  $\lambda$  com  $|\lambda| \neq 1$ , então, trocando  $F$  por  $F^{-1}$  se necessário, poderíamos supor  $|\lambda| < 1$ . Logo  $F$  seria  $\rho$ -hiperbólico para algum  $|\lambda| < \rho < 1$ . Pelo teorema anterior,  $F$  teria uma variedade estável invariante  $V^-$ , de modo que os pontos de  $V^-$  em alguma vizinhança da origem teriam órbitas infinitas.  $\square$

**Teorema 2.2** (TVE para campos holomorfos). *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo holomorfo e denotemos por  $S(X)$  o espectro parte linear de  $X$ . Se*

$$S^-(X) := \{\lambda \in S(X); \text{Re}(\lambda) < 0\} \neq \emptyset$$

*e  $L^-$  é a soma direta dos espaços de autovetores generalizados associados aos autovalores em  $S^-(X)$ , então  $X$  possui uma única variedade invariante estável  $W^-$ , cujo espaço tangente em 0 é  $L^-$ .*

*Demonstração.* Trocando as coordenadas se necessário, podemos supor que a matriz de linearização  $A$  de  $X$  é dada em blocos  $A = \text{diag}\{A^-, A^+\}$ , com  $L^-$  invariante por  $A^-$ . Considere os fluxos  $\phi^t = \exp(tX) : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$  de  $X$  para  $t = 1/k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Cada um destes fluxos é um biholomorfismo com parte linear  $\exp(tA)$  e cujos autovalores correspondentes são  $\exp(t\lambda)$ ,  $\lambda \in S$ . Em particular, para cada  $t \in 1/\mathbb{N}$ , o biholomorfismo  $\exp(tX)$  está nas hipóteses do Teorema 2.1. Logo, existe uma variedade estável  $W_t^-$  invariante por  $\phi^t$ , tangente a  $L^-$ . Note que  $(\phi^{1/k})^k = \phi^1$ , de modo que a variedade invariante por  $\phi^{1/k}$  também é invariante por  $\phi^1$ . Como a variedade estável de para  $\phi^1$  é única, segue que todos os biholomorfismo  $\phi^{1/k}$  deixam  $V^- = V_1^-$  invariante. Em outras palavras, uma trajetória analítica  $x(t)$  que inicia em  $x(0) \in V^-$  permanece em  $V^-$  para todo  $t \in 1/\mathbb{N}$ . Já que os zeros de uma função analítica em uma variável são isolados, temos que  $x(t) \in V^-$  para todo  $t \in (\mathbb{C}, 0)$ . Portanto  $V^-$  é uma variedade estável invariante por  $X$ .  $\square$

## 2.3 A propriedade de órbitas finitas para fluxos

Nesta seção, usaremos o Teorema da Variedade estável para mostrar que se um fluxo tem a propriedade (OF), então o campo que o gera tem autovalores na forma  $2\pi i\mathbb{Q}$ .

**Teorema 2.3.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo holomorfo e denotemos por  $S(X)$  o espectro da parte linear de  $X$ . Se  $X \in OF$ , então  $S(X) \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $X \in OF$ . Aplicando o Teorema da Variedade estável para os campos  $X$  e  $-X$ , vemos que  $S(X) \subset i\mathbb{R}$ . A prova do teorema segue por indução sobre a dimensão  $n$ . Se  $n = 1$ , então como  $OF$  é equivalente a periodicidade e, neste caso, obtemos que  $S(X) = \{\lambda\} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ . Suponhamos agora que  $n \geq 2$  e que o teorema vale para campos de dimensão  $< n$ . Vamos escrever  $S(X) = A_{>0} \cup \{0\} \cup A_{<0}$ , onde

$$A_{>0} = \{\lambda \in S(X); \lambda \in i\mathbb{R}_{>0}\} \text{ e } A_{<0} = \{\lambda \in S(X); \lambda \in i\mathbb{R}_{<0}\}.$$

Vamos mostrar que se  $A_{>0} \neq \emptyset$  então  $A_{>0} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ . Fazendo uma pequena deformação  $\tilde{X} = e^{i\theta} X$ ,  $0 < \theta \ll 1$ , obtemos um campo cujas trajetórias coincidem com as trajetórias de  $X$ , vistas como conjuntos. Além disso, os autovalores de  $\tilde{X}$  que correspondem aos autovalores de  $X$  em  $A_{>0}$  possuem parte real negativa. Associado a eles,  $\tilde{X}$  admite uma variedade estável  $V_0$ . Esta variedade também

é invariante para  $X$  e a restrição tem a propriedade ( $OF$ ). Além disso, o espectro da restrição é  $S(X_0) = A_{>0}$ . Portanto  $X_0$  está no domínio de Poincaré. Se  $X_0$  não possui ressonâncias, então  $X_0$  é linearizável e, pelo Corolário 2.2, temos  $A_{>0} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ . Suponhamos então que  $X_0$  admite ressonâncias e vamos escrever  $S(X_0) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  com  $\text{Im}(\lambda_1) > \dots > \text{Im}(\lambda_k)$ ,  $k > 1$ . Usando novamente o teorema da variedade estável, podemos construir uma variedade invariante  $V_1$  para  $X_0$  cuja cujo espectro da restrição  $X_1 := X_0|_{V_1}$  é  $\{\lambda_1\}$ . Logo  $X_1$  não possui ressonâncias, sendo portanto linearizável. Segue do Corolário 2.2 que  $\lambda_1 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Analogamente, podemos construir uma variedade invariante  $V_2$  cujo espectro da restrição  $X_2 = X_0|_{V_2}$  é justamente  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Neste caso, ou  $X_2$  é linearizável e portanto  $\lambda_1, \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ , ou temos ressonâncias do tipo

$$(1) \lambda_1 = |M_1|\lambda_1 + |M_2|\lambda_2 \text{ ou } (2) \lambda_2 = |M_1|\lambda_1 + |M_2|\lambda_2,$$

onde  $M_j \in \mathbb{Z}_+^{n_j}$ ,  $|M_1| + |M_2| \geq 2$  e  $n_j$  é a multiplicidade de  $\lambda_j$ . É fácil ver que o caso (2) não pode ocorrer ( $\text{Im}(\lambda_1) > \text{Im}(\lambda_2)$ ), restando apenas o caso (1) com  $|M_1| = 0$ , ou seja,  $\lambda_2 = |M_2|^{-1}\lambda_1 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Suponhamos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_l \in 2\pi i\mathbb{Q}$ ,  $l < k$ . Vamos mostrar que  $\lambda_{l+1} \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Podemos construir uma variedade invariante  $V_{l+1}$  cujo espectro da restrição  $X_{l+1} = X|_{V_{l+1}}$  é  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_{l+1}\}$ . Pela ordenação dos  $\lambda_j$ , as possíveis ressonâncias de  $X_{l+1}$  são da forma

$$\lambda_j = |M_{j+1}|\lambda_{j+1} + \dots + |M_{l+1}|\lambda_{l+1}, \quad \sum_{k=j+1}^{l+1} |M_k| \geq 2, \quad j = 1, \dots, l.$$

Se existe alguma ressonância com  $M_{l+1} \neq 0$ , então podemos escrever  $\lambda_{l+1}$  como combinação dos  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$ , a coeficientes inteiros; logo  $\lambda_{l+1} \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Se as únicas ressonâncias possíveis são aquelas com  $M_{l+1} = 0$ , vemos que os monômios ressonantes não estão na coordenada  $x_l \in \mathbb{C}^{n_l}$ . Mais precisamente, passando à forma canônica de Poincaré-Dulac (ver Teorema 1.4), vemos que  $\{(x_1, \dots, 0, x_{l+1})\} \subset \mathbb{C}^{n_1 + \dots + n_{l+1}}$  é invariante por  $X_{l+1}$  e a restrição à essa variedade tem autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1}$ . Pela hipótese de indução, vemos que  $\lambda_1, \dots, \lambda_{l-1}, \lambda_{l+1} \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Isso mostra que  $A_{>0} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ . De modo análogo, mostra-se que se  $A_{<0} \neq 0$ , então  $A_{<0} \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ . Portanto  $S(X) \subset 2\pi i\mathbb{Q}$ .  $\square$

A recíproca do Teorema acima não vale, mesmo em dimensão 1, como mostra o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.2.** *O campo  $X(z) = z^2 \frac{\partial}{\partial z}$  tem espectro  $S(X) = \{0\}$ , mas não tem*

a propriedade (OF), uma vez que  $\exp(X) = z + z^2 + O(z^3)$  é, claramente, não periódico.

Na realidade, construiremos no Capítulo 5 muitos exemplos de fluxos de campos nilpotentes em dimensão  $n = 2$  sem a propriedade de órbitas finitas. Finalmente, mostraremos no Capítulo a seguir que não existe um análogo do teorema anterior para os biholomorfismos que não são fluxos.

# Capítulo 3

## Biholomorfismos não racionais com órbitas finitas

Até este momento, todos os biholomorfismos com órbitas finitas que encontramos possuíam autovalores na forma  $e^{2\pi iq}$ , com  $q \in \mathbb{Q}$ . Isso está relacionado com o Teorema 2.3, o qual nos garante que se um biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas puder ser escrito como fluxo de um campo holomorfo, então ele possui um iterado unipotente. Sabemos também, graças ao Teorema da Variedade estável, que se um biholomorfismo  $F$  tem a propriedade OF então todos os autovalores da sua parte linear tem módulo 1, ou seja, são da forma  $e^{2\pi ir}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Ainda assim, mostraremos neste capítulo que, para cada  $n \geq 2$ , podemos construir uma família de biholomorfismos  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  com a propriedade OF, mas cujos iterados não são unipotentes. Mais ainda, podemos construir  $F$  de modo que apenas um dos autovalores seja raiz da unidade (ver Teoremas 3.1 e 3.3). Esse fato é notável, uma vez que veremos no próximo capítulo que se um biholomorfismo tem a propriedade de órbitas finitas, então ao menos um de seus autovalores é raiz da unidade (ver Corolário 4.3). Em certo sentido, isso significa que os exemplos são ótimos.

### 3.1 Definições básicas

**Definição 3.1.** Diremos que um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$  é racional se  $\text{Spec}(F) \subset \{e^{2\pi iq}; q \in \mathbb{Q}\}$ . Em particular,  $F^m$  é unipotente para algum  $m \in \mathbb{N}$ .

**Definição 3.2.** Dizemos que  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um ponto de Cremer (ou satisfaz à condição

de Cremer) se  $\lambda$  não é raiz da unidade, mas

$$|\lambda| = 1 \text{ e } \liminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\lambda^n - 1|} = 0.$$

Nosso objetivo é construir biholomorfismos não racionais do tipo Cremer com propriedade de órbitas finitas.

## 3.2 Caso bidimensional

**Teorema 3.1.** *Se  $\lambda \in \mathbb{C}$  é um ponto de Cremer, podemos construir um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  com  $\text{Spec}(D_0F) = \{\lambda, 1\}$  tal que  $F$  está definido em  $\mathbb{C}^2$  e tem a propriedade de órbitas finitas em qualquer aberto da forma  $\mathbb{C} \times U$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto limitado.*

*Demonstração* Vamos construir o biholomorfismos  $F$  da forma

$$F(x, y) = (\lambda x, y + a(x)),$$

onde  $\lambda$  é o número de Cremer e a função  $a(x)$  é uma função definida por uma série de potências convergente da forma

$$(3.1) \quad a(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2jx)^{n_j}}{M_j^{n_j}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{2j}{M_j} \right)^{n_j} x^{n_j},$$

onde  $(n_j)_{j \geq 1}$  é uma sequência crescente de números naturais e  $(M_j)_{j \geq 1}$  é uma sequência de reais positivos, ambas determinadas a seguir. Também definiremos uma sequência  $(k_j)_{j \geq 1}$  de números naturais e estudaremos as propriedades da sequência  $(F^{k_j})_{j \geq 1}$  dos iterados. Finalmente consideraremos uma sequência auxiliar crescente  $(r_j)_{j \geq 1}$  de números naturais tal que  $n_{j+1} \geq r_j$  para todo  $j \geq 1$ .

Vamos estabelecer algumas condições que devem ser satisfeitas pelas sequências que serão construídas:

$$(C1) \quad M_j := \frac{1}{n_j \sqrt[n_j]{|\lambda^{n_j} - 1|}} \text{ cumpre } M_j \geq 4j^2$$

$$(C2) \quad 2^{n_j} \geq 1 + j + \sum_{\ell=1}^{j-1} 2(2\ell)^{n_\ell} j^{n_\ell} \quad (2^{n_1} \geq 2).$$

$$(C3) \quad n_j > \max(n_{j-1}, r_{j-1}) \text{ se } j \geq 2.$$

$$(C4) \quad |\lambda^{k_j n_j} - 1| \geq 1.$$



$$(C5) \quad k_j \sum_{\ell=r_j}^{\infty} \frac{1}{2^\ell} < 1$$

Em particular, vamos ter  $\lim n_j = \infty = \lim M_j$ .

Para construir as seqüências, note que, como  $\lambda$  é um número de Cremer, podemos fazer uma escolha de  $n_1$  e  $M_1$  cumprindo as três primeiras propriedades. Como  $\lambda^{n_1}$  não é raiz da unidade, a seqüência  $(\lambda^{kn_1})_{k \geq 1}$  é densa no círculo unitário; daí existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tal que a quarta propriedade vale para  $j = 1$ . Finalmente, podemos definir  $r_1$  de modo que a última propriedade valha.

Em seguida, definimos  $(M_2, n_2)$ ,  $k_2$  e  $r_2 > r_1$  para que as propriedades anteriores sejam satisfeitas para  $j = 2$ . Por indução em  $j$  podemos definir as seqüências  $(M_j)_{j \geq 1}$ ,  $(n_j)_{j \geq 1}$ ,  $(k_j)_{j \geq 1}$  e  $(r_j)_{j \geq 1}$  mencionadas.

A prova do teorema seguirá dos lemas a seguir.

**Lema 3.1.** *A série  $a(x)$  em (3.1) tem raio de convergência infinito. Além disso, o mapa  $F$  é um biholomorfismo de  $\mathbb{C}^2$  cuja inversa é  $F^{-1}(x, y) = (\lambda^{-1}x, y - a(\lambda^{-1}x))$ .*

*Demonstração.* Como  $M_j \geq 4j^2$  para todo  $j \geq 1$ , o raio de convergência de  $a(x)$  é igual a

$$\frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} \sqrt[n_j]{(2j/M_j)^{n_j}}} = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{M_j}{2j} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} 2j = \infty.$$

Isso mostra que  $a(x)$  é uma função inteira. É imediato verificar que

$$F^{-1}(x, y) = (\lambda^{-1}x, y - a(\lambda^{-1}x))$$

é a inversa de  $F$  e está definida em  $\mathbb{C}^2$ . □

Agora, escrevendo  $a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ , é fácil verificar por indução que

$$F^k(x, y) = (\lambda^k x, y + (L_k a)(x)),$$

onde  $L_k$  opera sobre séries de potências do seguinte modo:

$$\begin{aligned} (3.2) \quad (L_k a)(x) &:= a(x) + a(\lambda x) + \dots + a(\lambda^{k-1}x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (1 + \lambda^n + \lambda^{2n} + \dots + \lambda^{(k-1)n}) a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{kn} - 1}{\lambda^n - 1} a_n x^n \end{aligned}$$

**Lema 3.2.** *Seja  $j \geq 1$ . Se  $x \in \mathbb{C}$  e  $\frac{1}{j} \leq |x| \leq j$ , então*

$$j \leq |(L_{k_j} a)(x)| \leq 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} - j.$$

*Demonstração.* Inicialmente, vamos estudar  $\left| L_{k_j} \frac{(2jx)^{n_j}}{M_j^{n_j}} \right|$ . Temos

$$\left| L_{k_j} \frac{(2jx)^{n_j}}{M_j^{n_j}} \right| = \left| \frac{\lambda^{k_j n_j} - 1}{\lambda^{n_j} - 1} \frac{(2jx)^{n_j}}{M_j^{n_j}} \right| = |(\lambda^{k_j n_j} - 1)(2jx)^{n_j}|,$$

onde a segunda igualdade decorre da definição de  $M_j$ . Segue daí e da escolha de  $k_j$  que se  $\frac{1}{j} \leq |x| \leq j$ , então

$$2^{n_j} \leq \left| L_{k_j} \frac{(2jx)^{n_j}}{M_j^{n_j}} \right| \leq 2(2j^2)^{n_j}.$$

Vamos agora estudar

$$L_{k_j} \left( \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2lx)^{n_l}}{M_l^{n_l}} \right).$$

Se  $|x| \leq j$ , então temos

$$\begin{aligned} (3.3) \quad \left| L_{k_j} \left( \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2lx)^{n_l}}{M_l^{n_l}} \right) \right| &= \left| \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\lambda^{k_j n_l} - 1}{\lambda^{n_l} - 1} \frac{(2lx)^{n_l}}{M_l^{n_l}} \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^{j-1} (\lambda^{k_j n_l} - 1)(2l)^{n_l} x^{n_l} \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l} \\ &\leq 2^{n_j} - (j+1), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre da condição 2.

Finalmente, consideremos

$$L_{k_j} \left( \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{(2lx)^{n_l}}{M_l^{n_l}} \right).$$

A condição 1 implica  $\frac{2l}{M_l} < \frac{1}{2^j}$  para todo  $l > j$ . Portanto, se  $|x| \leq j$  então

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad \left| L_{k_j} \left( \sum_{l=j+1}^{\infty} \left( \frac{2l}{M_l} \right)^{n_l} x^{n_l} \right) \right| &\leq \sum_{l=j+1}^{\infty} |(1 + \lambda^l + \lambda^{2l} + \dots + \lambda^{(k_j-1)l})| \frac{1}{2^{n_l}} \\
 &\leq k_j \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_l}} \\
 &\leq k_j \sum_{l=r_j}^{\infty} \frac{1}{2^l} \\
 &< 1
 \end{aligned}$$

Em particular, quando  $1/j \leq |x| \leq j$ , então as estimativas anteriores fornecem

$$j = 2^{n_j} - (2^{n_j} - (j+1)) - 1 < |(L_{k_j} a)(x)| < 2(2j^2)^{n_j} + (2^{n_j} - (j+1)) + 1 = 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} - j.$$

□

**Lema 3.3.** *O biholomorfismo  $F(x, y) = (\lambda x, y + a(x))$ , construído acima, tem a propriedade de órbitas finitas em qualquer aberto de forma  $\mathbb{C} \times U$ , onde  $U$  é um aberto limitado de  $\mathbb{C}$ .*

*Demonstração.* Seja  $d$  o diâmetro de  $U$ . Seja  $(x_0, y_0) \in \mathbb{C}^* \times U$ . Existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $1/j \leq |x_0| \leq j$  e  $j > d$ . O Lema 3.2 implica que  $F^{k_j}(x_0, y_0)$  não pertence a  $\mathbb{C} \times U$ . Perceba que as condições (C1), (C2), (C3), (C4) e (C5) valem se substituírmos  $\lambda$  por  $\lambda^{-1}$  já que  $\bar{\lambda} = \lambda^{-1}$  implica

$$|\lambda^{-n} - 1| = |\overline{\lambda^n - 1}| = |\lambda^n - 1|$$

para todo  $n \in \mathbb{Z}$ . Como  $F^{-1}(x, y) = (\lambda^{-1}x, y - a(\lambda^{-1}x))$  temos

$$-a(\lambda^{-1}x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda^{-n}) a_n x^n,$$

ou seja os monômios de  $-a(\lambda^{-1}x)$  são obtidos multiplicando os monômios de  $a(x)$  por números complexos de módulo 1. Em particular a prova do Lema 3.2 ainda vale para  $F^{-1}$ . Deduz-se que  $F^{-k_j}(x_0, y_0) \notin \mathbb{C} \times U$ . Portanto,  $F$  tem órbitas finitas em  $\mathbb{C}^* \times U$ . Como  $x = 0$  é uma curva de pontos fixos, é claro que  $F$  tem órbitas finitas em  $\mathbb{C} \times U$ . Isso prova o lema e, por consequência, o teorema 3.1. □

**Teorema 3.2.** *O biholomorfismo  $F(x, y) = (\lambda x, y + a(x))$ , construído acima, é formalmente linearizável. Em particular,  $F$  tem uma integral primeira da forma  $y + b(x)$  onde  $b(x)$  é uma serie divergente com  $b(0) = 0$ .*

*Demonstração.* Vamos resolver a equação de conjugação

$$(x, y + b(x)) \circ (\lambda x, y + a(x)) \circ (x, y - b(x)) = (\lambda x, y).$$

Esta equação é equivalente a

$$b(x) - b(\lambda x) = a(x).$$

Escrevendo  $b(x) = \sum b_j x^j$  e  $a(x) = \sum a_j x^j$ , vemos que essa última equação se escreve como  $\sum (b_j - \lambda^j b_j - a_j) x^j = 0$ , ou ainda,  $b_j = \frac{a_j}{1 - \lambda^j}$ . Como  $y$  é uma integral primeira de  $(x, y) \mapsto (\lambda x, y)$ , então  $y + b(x)$  é uma integral primeira de  $F$ . A serie  $b(x)$  é divergente, caso contrário  $F$  e  $(x, y) \mapsto (\lambda x, y)$  seriam analiticamente conjugados, o que não é possível, visto que  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas e  $(x, y) \mapsto (\lambda x, y)$  não tem.  $\square$

**Corolário 3.1.** *Por cada ponto  $(0, y_0)$  passa a curva invariante divergente  $y - y_0 + b(x) = 0$ .*

### 3.3 Caso n-dimensional

Nesta seção mostraremos como generalizar os resultados da seção anterior para construirmos exemplos de biholomorfismos irracionais em dimensão  $n \geq 3$  com a propriedade de órbitas finitas.

**Teorema 3.3.** *Seja  $n \geq 1$ . Se  $\lambda$  é um número de Cremer, existem funções inteiras  $a_1(x_1), \dots, a_n(x_n)$  definidas em  $\mathbb{C}$  tais que a aplicação*

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, y + a_1(x_1) + \dots + a_n(x_n))$$

*é um biholomorfismo inteiro com a propriedade de órbitas finitas em qualquer aberto da forma  $\mathbb{C}^n \times U$ , onde  $U \subset \mathbb{C}$  é um aberto limitado.*

*Demonstração.* Inicialmente, notemos que se  $a_j$  são inteiras com

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, y + a_1(x_1) + \dots + a_n(x_n)),$$

então para cada inteiro positivo  $k$  temos

$$F^k(x_1, \dots, x_n, y) = (\lambda^k x_1, \dots, \lambda^k x_n, y + (L_k a_1)(x_1) + \dots + (L_k a_n)(x_n)).$$

Assim, devemos construir funções  $a_1, \dots, a_n$  de modo se  $p = (x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \in \mathbb{C}^n \times U$  com, digamos,  $x_l^0 \neq 0$ , então  $|(L_{k_j} a_l)(x_l^0)|$  controla  $|L_{k_j} a_1| + \dots + |L_{k_j} a_{l-1}|$  para  $j$  suficientemente grande. Para isso, vamos construir, como antes, sequências satisfazendo certas condições. Para ilustrar a prova, vamos tratar o caso  $n = 2$ . O caso geral é tratado similarmente. Começamos por construir sequências sujeitas às condições:

1.  $M_{1,j} := \frac{1}{n_j \sqrt[n_j]{|\lambda^{n_j} - 1|}}$  e  $M_{2,j} := \frac{1}{2j^2 n_j \sqrt[n_j]{|\lambda^{n_j} - 1|}}$  cumprem  $M_{k,j} \geq (2j)^2$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, \dots$
2. (i)  $2^{n_j} \geq 1 + j + \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l}$   
(ii)  $2^{n_j} (2j^2)^{n_j} \geq 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} + 1 + \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l} (2l^2)^{n_l}$
3.  $n_j > \max(n_{j-1}, r_{j-1})$  se  $j \geq 2$ .
4.  $|\lambda^{k_j n_j} - 1| \geq 1$ .
5.  $k_j \sum_{l=r_j}^{\infty} \frac{1}{2^l} < 1$ .

Ponhamos

$$F(x, y) = (\lambda x_1, \lambda x_2, y + a_1(x_1) + a_2(x_2)),$$

onde  $\lambda$  é o número de Cremer e

$$a(x_1) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l x_1)^{n_l}}{M_{1,l}^{n_l}} \quad \text{e} \quad a_2(x_2) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2j x_2)^{n_l}}{M_{2,l}^{n_l}}.$$

Assim como no no Lema 1, a condição 1 implica que as funções  $a_1(x_1)$  e  $a_2(x_2)$  são inteiras. Um cálculo direto mostra de  $F$  é um biholomorfismo cuja inversa é

$$F^{-1}(x_1, x_2, y) = (\lambda^{-1} x_1, \lambda^{-1} x_2, y - a(\lambda^{-1} x_1) - a_2(\lambda^{-1} x_2)).$$

Além disso, por construção, o Lema 3.2 vale para  $a_1$  com as mesmas cotas. Em particular, temos que se  $\frac{1}{j} \leq |x_1| \leq j$  então

$$|(L_{k_j} a_1)(x_1)| \leq 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} - j.$$

Além disso, nós temos:

**Lema 3.4.** *Seja  $j \in \mathbb{N}$ . Se  $\frac{1}{j} \leq |x_1|, |x_2| \leq j$ , então*

$$|(L_{k_j} a_1)(x_1)| + j \leq |(L_{k_j} a_2)(x_2)| \leq 2(2j^2)^{2n_j} + 2^{n_j} (2j^2)^{n_j} - 2(2j^2)^{n_j} - 2^{n_j}$$

*Demonstração.* Inicialmente, temos

$$\left| L_{k_j} \frac{(2jx_2)^{n_j}}{M_{2,j}^{n_j}} \right| = \left| \frac{\lambda^{k_j n_j} - 1}{\lambda^{n_j} - 1} \frac{(2jx_2)^{n_j}}{M_{2,j}^{n_j}} \right| = |(\lambda^{k_j n_j} - 1)(2jx_2)^{n_j} (2j^2)^{n_j}|$$

Logo, se  $\frac{1}{j} \leq |x_1|, |x_2| \leq j$ , então

$$2^{n_j} (2j^2)^{n_j} \leq \left| L_{k_j} \frac{(2jx_2)^{n_j}}{M_{2,j}^{n_j}} \right| \leq 2(2j^2)^{n_j} (2j^2)^{n_j} = 2(2j^2)^{2n_j}.$$

Se  $|x_2| \leq j$  então

$$\begin{aligned} \left| L_{k_j} \left( \sum_{l=1}^{j-1} \frac{(2lx_2)^{n_l}}{M_{2,l}^{n_l}} \right) \right| &= \left| \sum_{l=1}^{j-1} \frac{\lambda^{k_j n_l} - 1}{\lambda^{n_l} - 1} \frac{(2lx_2)^{n_l}}{M_{2,l}^{n_l}} \right| \\ &= \left| \sum_{l=1}^{j-1} (\lambda^{k_j n_l} - 1) (2l)^{n_l} x_2^{n_l} (2l^2)^{n_l} \right| \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l} (2l^2)^{n_l} \end{aligned}$$

Finalmente, a condição 1 implica que  $\frac{2l}{M_{2,l}} < \frac{1}{2j}$  para todo  $l > j$ . Procedendo como no Lema 3.2 vemos que se  $|x_2| < j$  então

$$\left| L_{k_j} \left( \sum_{l=j+1}^{\infty} \frac{(2lx_2)^{n_l}}{M_{2,l}^{n_l}} \right) \right| < 1$$

Juntando as desigualdades acima e usando a condição 2 acima, vemos que se

$1/j \leq |x_1|, |x_2| \leq j$ , então

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad |(L_{k_j} a_2)(x_2)| &\geq 2^{n_j} (2j^2)^{n_j} - \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l} (2l^2)^{n_l} - 1 \\
 &= 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} \\
 &= 2(2j^2)^{n_j} + 2^{n_j} - j + j \\
 &\geq |(L_{k_j} a_1)(x_1)| + j
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 (3.6) \quad |(L_{k_j} a_2)(x_2)| &\leq 2(2j^2)^{2n_j} + \sum_{l=1}^{j-1} 2(2l)^{n_l} j^{n_l} (2l^2)^{n_l} + 1 \\
 &\leq 2(2j^2)^{2n_j} + 2^{n_j} (2j^2)^{n_j} - 2(2j^2)^{n_j} - 2^{n_j}
 \end{aligned}$$

□

Para finalizar a prova do Teorema 3.3, considere uma vizinhança  $\mathbb{C}^2 \times U$  de  $0 \in \mathbb{C}^3$  com  $U$  limitado e seja  $d$  o diâmetro de  $U$ . Seja  $p = (x_1^0, x_2^0, y^0) \in \mathbb{C}^2 \times U$ .

Caso 1:  $x_2^0 = 0$ . Neste caso, estamos na situação do Teorema 3.1. Mais precisamente, ou  $x_1^0 = 0$ , e neste caso  $p$  é fixo, ou  $x_1^0 \neq 0$ , e neste caso existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $1/j \leq |x_1^0| \leq j$ ,  $j > d$ , e  $F^{\pm k_j}(p)$  não pertence a  $\mathbb{C}^2 \times U$ .

Caso 2:  $x_2^0 \neq 0$ . Existe  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $1/j \leq |x_1^0|, |x_2^0| \leq j$  e  $j > d$ . Então  $|(L_{k_j} a_2)(x_2^0)| \geq |(L_{k_j} a_1)(x_1^0)| + j$  e portanto  $F^{\pm k_j}(p)$  não pertence a  $\mathbb{C}^2 \times U$ . □

# Capítulo 4

## Teorema da curva de pontos fixos

Neste capítulo, mostraremos que se  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  é um biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas então algum iterado não trivial  $F^m$  admite uma curva de pontos fixos (ver Teorema 4.8). No caso tangente à identidade, isso é uma consequência do Teorema 1 presente em [LHS15]. Uma consequência do Teorema 4.8 é que, embora existam biholomorfismos locais com a propriedade de órbitas finitas e com um autovalor que não seja raiz da unidade (ver Teorema 3.1), ao menos um dos autovalores tem que ser raiz da unidade (ver corolário 4.3).

Usando construções e ideias presentes em Matei e Moussu em [MM80], Rebelo e Reis em [RR15] e Pérez-Marco em [PM97] podemos mostrar que dado um biholomorfismo  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^n, 0)$ , existe um compacto conexo  $K$  contendo a origem e tocando o bordo de um disco onde  $F$  está definido, formado por pontos periódicos de  $F$ . Este conjunto é obtido como limite de conjuntos compactos construídos geometricamente. O limite é considerado na topologia de Hausdorff no espaço dos conjuntos compactos. Embora, em geral, um conjunto obtido dessa maneira não possua uma boa estrutura analítica, vamos mostrar que no caso de biholomorfismos com órbitas finitas este conjunto é analítico complexo próximo da origem e é formado por pontos fixos de algum iterado de  $F$ .

### 4.1 Curvas invariantes e parabólicas

Nesta seção apresentamos as curvas analíticas e parabólicas, e estudamos sua invariância por campos de vetores e difeomorfismos holomorfos. Demonstrações para os fatos não mostrados podem ser encontrados em [Rib05] e [LHS15].

**Definição 4.1.** Uma curva formal é um ideal principal primo  $\Gamma = (f)$  de  $\mathbb{C}[[x, y]]$ .



- (i) Diremos que  $\Gamma$  é invariante por  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  se  $\Gamma \circ F = \Gamma$ .
- (ii) Diremos que  $\Gamma$  é  $p$ -periódica para  $F$  se ela é invariante por  $F^{(p)}$  e não é invariante por  $F^{(j)}$  para  $0 < j < p$ .
- (iii) Diremos que  $\Gamma$  é invariante por  $X$  se  $X(\Gamma) \subset \Gamma$ . Neste caso, diremos também que  $\Gamma$  é uma separatriz de  $X$ .

Quando os objetos acima são convergentes, identificamos a curva  $\Gamma$  com o germe de conjunto analítico na origem  $V_\Gamma = (f = 0)$ . Neste caso, as condições algébricas dadas na definição acima se traduzem como

- i  $F(V_\Gamma) = V_\Gamma$ .
- ii  $F^p(V_\Gamma) = V_\Gamma$ . Se  $F|_{V_\Gamma} = id$ , diremos que  $\Gamma$  é  $p$ -fixa.
- iii Se  $\gamma(t)$  é a parametrização de Puiseux de  $\Gamma$ , então  $X(\gamma(t)) = \alpha(t)\gamma'(t)$ , onde  $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow \mathbb{C}$  é um germe de função analítica.

Um Teorema importante na teoria de folheações é o Teorema da Separatriz, provado em sua forma definitiva por Camacho e Sad:

**Teorema 4.1** (Camacho-Sad [CS82]). *Todo campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$  admite ao menos uma curva invariante convergente.*

O Teorema da Separatriz de Camacho-Sad não possui análogo no contexto dos biholomorfismos. Mais precisamente, foi mostrado em [Rib05] o seguinte:

**Teorema 4.2** ([Rib05]). *Existem germes  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  que não possuem germes de curvas invariantes convergentes. O biholomorfismo  $F$  pode ser escolhido em cada uma das seguintes famílias:*

- (a)  $\mathcal{L} := \{\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0); \phi \text{ é formalmente linearizável}\}$ .
- (b)  $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0) := \{\phi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0); D_0\phi = id\}$ .

**Observação 4.1.** Notemos que

- (1) Os elementos de  $\mathcal{L}$  admitem curvas formais invariantes suaves.
- (2) Usando uma versão formal do teorema de Camacho-Sad e o fato de que todo difeomorfismo unipotente é o fluxo em tempo 1 de algum campo formal nilpotente é fácil ver que os elementos de  $\text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0)$  também possuem curvas formais invariantes.

- (3) Pode-se mostrar também que existem germes de difeomorfismos sem curvas formais invariantes ([Rib05], proposição 8).

No entanto, tem-se o seguinte

**Teorema 4.3** ([Rib05]). *Um biholomorfismo formal  $F \in \widehat{\text{Diff}}(\mathbb{C}^2, 0)$  possui ao menos uma curva formal periódica.*

A observação anterior nos alerta que a passagem do formal para o convergente é uma questão delicada, em geral, mesmo sob hipóteses razoavelmente fortes, como formalmente linearizável ou tangente à identidade. Provaremos, no entanto, que todo biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas em dimensão  $n = 2$  admite uma curva  $p$ -fixa. Nesse ponto, convém notar que, no caso tangente à identidade com a propriedade de órbitas finitas, os resultados de López-Hernanz e Sanz mostram que de fato existe uma curva analítica de pontos fixos.

**Definição 4.2** ([LHS15]). *Seja  $F \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0)$ . Uma curva parabólica atratora para  $F$  é uma aplicação holomorfa injetiva  $\phi : \Delta \rightarrow \mathbb{C}^2$ , onde  $\Delta \subset \mathbb{C}$  é um domínio simplesmente conexo com  $0 \in \partial\Delta$ , tal que*

- (1)  $\phi$  é contínua em 0 com  $\phi(0) = 0$ .
- (2)  $\phi(\Delta)$  é invariante e atraída para a origem  $0 \in \mathbb{C}^2$  sob a iteração de  $F$  :

$$F(\phi(\Delta)) \subset \phi(\Delta) \text{ e } F^k(p) \rightarrow 0 \text{ quando } k \rightarrow \infty, \forall p \in \phi(\Delta).$$

Uma curva parabólica repulsora para  $F$  é uma curva parabólica atratora para  $F^{-1}$ .

**Observação 4.2.** Se  $F \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0)$  possui uma curva parabólica (atratora ou repulsora), então  $F$  não possui a propriedade de órbitas finitas.

**Teorema 4.4** ([LHS15]). *Seja  $F \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0)$  distinto da identidade e seja  $\Gamma$  uma curva formal invariante por  $F$ . Então ou  $\Gamma$  é uma curva convergente de pontos fixos ou existe no mínimo uma curva parabólica (atratora ou repulsora) para  $F$  assintótica à curva  $\Gamma$ .*

Para uma definição do que significa ser assintótica a  $\Gamma$  ver [LHS15]. O que importa para nós é o seguinte:

**Corolário 4.1.** *Se  $F \in \text{Diff}_1(\mathbb{C}^2, 0)$  possui a propriedade OF então  $F$  admite uma curva invariante convergente de pontos fixos.*

*Demonstração.* Como  $F$  tem a propriedade  $(OF)$ , ele não possui curvas parabólicas. Logo admite uma curva de pontos fixos.  $\square$

**Exemplo 4.1.** Como consequência do Corolário 4.1, se

$$F(x, y) = (x + f_1(x, y), y + f_2(x, y))$$

é um biholomorfismo tangente à identidade e se  $f_1$  e  $f_2$  não possuem fatores em comum, então  $F \notin OF$ .

Finalizaremos esta seção reunindo alguns resultados sobre curvas invariantes que serão usados nas próximas seções. Para uma abordagem mais profunda, ver [Rib05].

**Lema 4.1.** Seja  $X \in \hat{\mathfrak{X}}(\mathbb{C}^2, 0)$  um campo singular e  $\Gamma$  uma curva.

- (a) Se  $\Gamma$  é invariante por  $X$  então  $\Gamma$  é invariante por  $\exp(X)$ .
- (b) Se  $X$  é nilpotente e  $\Gamma$  é invariante por  $\exp(X)$  então  $\Gamma$  é invariante por  $X$ .
- (c) Se  $X$  é nilpotente e  $F := \exp(X)$ , então

$$F|_{\Gamma} = id \Leftrightarrow \Gamma \subset \text{sing}(X).$$

*Demonstração.* A fim de ilustrar as técnicas usadas, vamos provar os itens (a) e (b).

(a): Ponha  $F = \exp(X)$  e suponha que  $\Gamma = (f)$  é uma curva invariante por  $X$ . Então  $f|X(f)$ . Seque por indução que  $f|X^j(f)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . Logo

$$f \circ \phi(t, z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j X^j(f)}{j!} = f(z)g(t, z)$$

para algum  $g \in \mathcal{O}_{n+1}^*$ . Logo  $\Gamma \circ F = \Gamma$ . Isso mostra (a).

(b): Para mostrar (b), ponhamos novamente  $F = \exp(X)$  e suponha que  $\Gamma = (f)$  é uma curva invariante por  $F$ . Seja  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  uma parametrização de Puiseux da curva  $f = 0$ . Então  $g \in (f) \Leftrightarrow g \circ \gamma \equiv 0$ . Consideremos a série

$$A(s, t) = f \circ \exp(sX) \circ \gamma(t).$$

Como  $X$  é nilpotente, a multiplicidade de  $X^j(f)$  converge para  $\infty$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Daí  $f \circ \phi(s, z)$  é da forma  $\sum a_{ij}(s)x^i y^j$  onde as funções  $a_{ij}$  são polinômios. Portanto

podemos escrever  $A(s, t)$  na forma

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(s)t^j,$$

onde todos os  $a_j$  são polinômios. É claro que  $A(1, t) \equiv 0$ , pois  $f$  é invariante pelo fluxo em tempo 1. Como  $\exp(X)$  preserva a curva  $f = 0$  então os elementos  $\exp(mX)$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) do grupo cíclico gerado por  $\exp(X)$  também preservam  $f = 0$ . Daí deduz-se que  $A(s, t) \equiv 0$  para todo  $s \in \mathbb{Z}$ . Daí  $a_j(s) \equiv 0$  para todo  $j \geq 0$  e todo  $s \in \mathbb{Z}$ . Como  $a_j$  é um polinômio com infinitas raízes, obtemos  $a_j \equiv 0$  para todo  $j \geq 0$ . Em particular  $\exp(sX)$  preserva a curva  $f = 0$  para todo  $s \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Observação 4.3.** Combinando o Teorema da separatriz de Camacho-Sad com o lema anterior, obtemos que todo fluxo bidimensional admite uma curva invariante. Porém, a recíproca dada pelo item (b) só vale no caso nilpotente. Por exemplo, pondo  $X = 2\pi ix \frac{\partial}{\partial x} + 2\pi iy \frac{\partial}{\partial y}$ , vemos que toda curva passando pela origem  $0 \in \mathbb{C}^2$  é invariante pelo fluxo  $\exp(X) = id$ , mas as únicas curvas invariantes de  $X$  são as retas pela origem.

**Lema 4.2.** *Sejam  $V, W \subset (\mathbb{C}^2, 0)$  germes de conjuntos analíticos não triviais ( $V \neq \{0\} \neq W$ ) e distintos ( $(V, 0) \neq (W, 0)$ ). Se  $\psi \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  e  $V, W \subset \text{Fix}(\psi)$ , então  $\psi$  é tangente a identidade.*

*Demonstração.* Se  $(V, 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$  ou  $(W, 0) = (\mathbb{C}^2, 0)$  temos que  $\psi = id$ . Portanto, podemos supor que  $V$  e  $W$  são curvas analíticas com equações reduzidas  $f = 0$  e  $g = 0$ , respectivamente, em uma vizinhança de 0. Então ambos  $f$  e  $g$  dividem  $x \circ \psi - x$  e  $y \circ \psi - y$ . Se  $\text{ord}(f) \geq 2$  ou  $\text{ord}(g) \geq 2$ , então temos  $J^1\psi = Id$ . Se  $\text{ord}(f) = \text{ord}(g) = 1$ , então como  $V$  e  $W$  têm germes distintos, segue  $fg|x \circ \psi - x, y \circ \psi - y$ . Novamente, temos  $J^1\psi = Id$ .  $\square$

## 4.2 Noções topológicas

A fim de fixar a notação, traremos aqui algumas noções topológicas, as quais podem ser encontradas em [Bre] [Eng89] e [Mun00].

Um espaço topológico  $X$  é dito conexo se não pode ser escrito como união disjunta de dois abertos não vazios. Equivalentemente, os únicos subconjuntos simultaneamente abertos e fechados são  $\emptyset$  e  $X$ . Um subconjunto  $C$  de um espaço  $X$  é dito conexo se for conexo com a topologia induzida. Neste caso, mostra-se que

seu fecho em  $X$  também é conexo. Se  $\{Y_i; i \in I\}$  é uma coleção de subconjuntos conexos e existe  $i_0 \in I$  tal que  $Y_{i_0} \cap Y_j \neq \emptyset$  para todo  $j \in I$ , então  $\cup_{i \in I} Y_i$  é conexo. Daí, tem-se que a relação  $\sim$ , dada por

$$p \sim q \Leftrightarrow p \text{ e } q \text{ pertencem a um mesmo subconjunto conexo de } X,$$

é uma relação de equivalência em  $X$ . As classes de equivalência por esta relação são fechadas e conexas, e são chamadas de *componentes conexas* de  $X$ . Além disso, a componente que contém um ponto  $x \in X$  é a união de todos os conjuntos conexos de  $X$  contendo  $x$ .

Um espaço topológico  $X$  é dito compacto se a condição  $X \subset \cup_{i \in I} Y_i$ , com  $Y_i$  aberto para todo  $i \in I$ , implica que existem finitos índices  $i_1, \dots, i_n$  tais que  $X \subset Y_{i_1} \cup \dots \cup Y_{i_n}$ . Um *contínuo* é um espaço topológico compacto, conexo e Hausdorff. O seguinte resultado pode ser encontrado em [Eng89], p.358.

**Teorema 4.5** (Sierpinski). *Se um contínuo  $X$  for escrito como uma união enumerável de fechados disjuntos dois a dois, então no máximo um dos fechados é não vazio.*

Finalizamos esta seção apresentando a métrica de Hausdorff no espaço de subconjuntos limitados e fechados de um espaço métrico  $M$ .

Seja  $(M, d)$  um espaço métrico e denote por  $H(M)$  o espaço de subconjuntos limitados e fechados de  $M$  :

$$H(X) = \{X \subset M; X \text{ é limitado, fechado e não vazio}\}.$$

Notemos que se  $X$  é compacto então os elementos de  $H(M)$  são compactos. Definamos  $\rho : H(M) \times H(M) \rightarrow [0, \infty)$  pondo

$$\rho(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(A, y)\}.$$

Finalmente, se  $A \subset M$  e se  $\varepsilon > 0$ , definimos a  $\varepsilon$ -vizinhança de  $A$  por

$$V_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B_\varepsilon(x).$$

Nessas condições temos o seguinte.

**Teorema 4.6.** *Seja  $M$  um espaço métrico. Então*

1.  $\rho(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0; V_\varepsilon(A) \supset B \text{ e } V_\varepsilon(B) \supset A\}$ .

2.  $\rho$  é uma métrica em  $H(M)$ , chamada de métrica de Hausdorff.
3. Se  $(M, d)$  é compacto, então  $(H(M), \rho)$  é compacto; além disso, se  $(A_n)$  é uma sequência de conjuntos conexos em  $H(M)$  convergindo para  $A$ , então  $A$  é conexo.

**Observação 4.4.** O item 3. nos diz que o subconjunto de  $H(M)$  formado pelos contínuos é compacto. Uma prova do teorema é esquematizada no exercício 7, pag. 280 de [Mun00], ver também [Hen99].

### 4.3 Conjuntos semianalíticos

As definições e resultados usados nesta seção sobre conjuntos semianalíticos podem ser encontrados em [Loj64] e [BM88].

**Definição 4.3.** Um subconjunto  $X$  de uma variedade analítica  $M$  é dito semianalítico se, para cada  $p \in X$ , existe uma vizinhança aberta  $U$  de  $p$  em  $M$  tal que  $X \cap U$  é da forma

$$X \cap U = \bigcup_{i=1}^m \bigcap_{j=1}^n X_{ij},$$

onde  $X_{ij} = \{f_{ij} = 0\}$  ou  $X_{ij} = \{f_{ij} > 0\}$  e  $f_{ij}$  é uma função analítica real em  $U$ , para todos  $i, j$ .

**Observação 4.5.** Note que todo conjunto analítico  $X$  é semianalítico, com  $m = 1$  e  $X_{ij} = \{f_{ij} = 0\}$ . Além disso, como  $\{f_{ij} < 0\} = \{-f_{ij} > 0\}$ ,  $\{f_{ij} \geq 0\} = \{f_{ij} = 0\} \cup \{f_{ij} > 0\}$  e  $\{f_{ij} \leq 0\} = \{f_{ij} = 0\} \cup \{f_{ij} < 0\}$ , poderíamos adicionar esses conjuntos na de definição de semianalítico, sem alterar seu significado.

**Exemplo 4.2.** Os discos em  $\mathbb{C}^n$  são conjuntos semianalíticos. Por exemplo, o disco aberto  $D_r(0) \subset \mathbb{C}^2$  pode ser escrito como  $D_r(0) = \{f > 0\}$ , onde  $f(x, y) = r^2 - |x|^2 - |y|^2$ .

No que segue, vamos supor que  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^2, 0)$ ,  $U$  é um aberto fundamental de  $F$  e  $D$  é um disco fechado de centro  $(0, 0)$  e raio  $r$  contido em  $U$ . Ponhamos também  $M_k := \{p \in D; F(p), \dots, F^{k-1}(p) \in D \text{ e } F^k(p) = p\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , e  $M = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} M_k$ .

**Lema 4.3.** Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , o conjunto  $M_k$  é semianalítico em  $U$ .

*Demonstração.* Seja  $p \in M_k$ . O difeomorfismo  $F^k$  está definido em uma vizinhança  $V$  de  $p$ . Além disso, temos

$$M_k \cap V = \left( \bigcap_{j=1}^4 \{f_j = 0\} \right) \cap \left( \bigcap_{l=0}^{k-1} \{f \circ F^l \geq 0\} \right),$$

onde  $f_1 = \operatorname{Re}(x \circ F^k - x)$ ,  $f_2 = \operatorname{Im}(x \circ F^k - x)$ ,  $f_3 = \operatorname{Re}(y \circ F^k - y)$ ,  $f_4 = \operatorname{Im}(y \circ F^k - y)$  e  $f(x, y) = r^2 - |x|^2 - |y|^2$ . Portanto,  $M_k$  é semianalítico.  $\square$

**Observação 4.6.** *Embora o conjunto  $M_k$  possa não ser analítico, o conjunto  $\{(x, y) \in U; F^k(x, y) = (x, y)\}$  define um conjunto analítico complexo em uma vizinhança de  $M_k$ . Em particular,  $M_k$  é analítico complexo na vizinhança dos pontos de  $M_k$  cuja órbita não intersecta a  $\partial D$ .*

**Lema 4.4.** *O conjunto  $M_k$  possui um número finito de componentes conexas. Todas elas são semianalíticas e conexas por caminhos.*

*Demonstração.* Pelo corolário 2.7 de [BM88], sabemos que cada componente conexa do semianalítico  $M_k$  é semianalítica e a família de componentes conexas de  $M_k$  é localmente finita. Pela compacidade de  $M_k$  e finitude local,  $M_k$  possui um número finito de componentes conexas. Além disso, segue do Teorema 1 em [Loj64] que  $M_k$  é triangularizável e, portanto, localmente conexo por caminhos. Logo todas as componentes de  $M_k$  são conexas por caminhos.  $\square$

**Corolário 4.2.** *A família  $\mathcal{A} := \{C; C \text{ é componente de } M_k \text{ para algum } k\}$  é uma família enumerável de compactos.*

**Definição 4.4.** A família  $\mathcal{A}$  acima também será chamada de família de componentes de  $F$  em  $D$ .

**Observação 4.7.** *Como as componentes conexas são fechadas, dado  $p \in M_k$  existe uma vizinhança de  $p$  em  $D$  intersectando apenas uma componente de  $M_k$ . No entanto, pode intersectar uma componente de  $M_l$  para algum  $l \neq k$ .*

**Lema 4.5.** *Seja  $C$  uma componente de  $M_{kl}$  tal que  $D_p F^k$  é unipotente para algum  $p \in C \cap M_k$ . Então  $C$  é um subconjunto de  $M_k$  e  $D_q F^k$  é unipotente para todo  $q \in C$ .*

*Demonstração.* Ponhamos  $\psi = F^k$ . Note que se  $\psi(q) = q$ , então a soma dos autovalores de  $D_q \psi$  é  $\operatorname{tr}(D_q \psi)$  e o produto é  $\det(D_q \psi)$ . Em particular, o polinômio

característico de  $D_p\psi$  é  $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ . Então definamos

$$(4.1) \quad \begin{aligned} E &= \{q \in C; \psi(q) = q, \operatorname{tr}(D_q\psi) = 2, \det(D_q\psi) = 1\}; \\ S &= \{q \in U; \psi(q) = q\}; \\ V &= \{q \in U; \psi^l(q) = q\}. \end{aligned}$$

Precisamos mostrar que  $E = C$ . Note que  $p \in E \neq \emptyset$ ,  $C$  é conexo e  $E$  é fechado em  $C$ . Portanto, é suficiente mostrar que  $E$  é aberto em  $C$ .

Inicialmente, vamos mostrar que  $(C, p) \subset M_k$ . Note que  $(C, p) \subset (V, p)$ . Como  $\psi(p) = p$  e  $D_p\psi$  é unipotente, podemos tomar o gerador infinitesimal  $X_p$  do germe  $\psi_p$ , isto é,  $X_p$  é o campo nilpotente tal que  $\exp(X_p) = \psi_p$ . Então  $lX_p$  é o gerador infinitesimal de  $\psi^l = F^{kl}$ . Como  $(\psi_p^l)|_{(V, p)} = \operatorname{id}$ , segue do Lema 4.1 acima que

$$(V, p) \subset \operatorname{Sing}(lX) = \operatorname{Sing}(X) \implies \psi|_{(V, p)} = \operatorname{id} \implies (C, p) \subset M_k.$$

Em particular, temos  $(C, p) \subset (S, p)$ .

Seja  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(q) = \det(D_q\psi)$ . As restrições de  $f$  às componentes irredutíveis de  $S$  em  $p$  são holomorfas. Como  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas, segue do teorema da variedade estável que os autovalores de  $D_q\psi$  tem módulo 1 para todo  $q$  na vizinhança de  $p$  em  $S$ . Segue daí que a imagem de  $f$  está contida no círculo unitário  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . Em particular, não contém nenhum aberto. Pelo Teorema da aplicação aberta isso implica que  $f$  é localmente constante. Como  $f(p) = 1$ , segue que  $f \equiv 1$  na respectiva componente de  $S$  em  $p$ . Repetidos os argumento para a demais componentes de  $S$  em  $p$ , vemos que  $f$  constante e igual a 1 em uma vizinhança de  $p$  em  $S$ . Agora, vamos considerar a função  $g : S \rightarrow \mathbb{C}$ , definida por  $g(q) = \operatorname{tr}(D_q\psi)$ . Os autovalores de  $D_q\psi$  para um ponto  $q \in S$  na vizinhança de  $p$  são da forma  $z$  e  $\bar{z}$ , para algum  $z$  no círculo unitário, pelo argumento anterior. Daí,  $\operatorname{tr}(D_q\psi) = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) \in [-2, 2]$ . De novo,  $g$  define uma função holomorfa em cada componente irredutível de  $S$  na vizinhança de  $p$ ; as ditas funções serão necessariamente constantes e iguais a 2 (o valor em  $p$ ). Portanto,  $g$  é constante igual a 2 na vizinhança de  $p$  em  $S$ . Segue da discussão acima que  $p$  é um ponto interior de  $E$  em  $C$ . Repetindo o argumento para os demais pontos de  $E$ , vemos que  $E$  é aberto em  $C$ , o que conclui a demonstração. □

Novamente, consideremos  $\mathcal{A} := \{C; C \text{ é componente de } M_k \text{ para algum } k\}$ .



**Definição 4.5.** Dizemos que duas componentes  $C, D \in \mathcal{A}$  são equivalentes (escrevendo  $C \sim D$ ) se existem

$$C_{\alpha_1}^{k_1}, \dots, C_{\alpha_r}^{k_r} \in \mathcal{A}$$

tais que  $C = C_{\alpha_1}^{k_1}$ ,  $D = C_{\alpha_r}^{k_r}$  e  $C_{\alpha_s}^{k_s} \cap C_{\alpha_{s+1}}^{k_{s+1}} \neq \emptyset$  para todo  $1 \leq s < r$ .

**Observação 4.8.** Note que  $\sim$  define uma relação de equivalência em  $\mathcal{A}$ . Se  $C$  e  $D$  não são *unitárias*, i.e., não são da forma  $\{p\}$ ,  $p \in M$ , então podemos tomar  $C_{\alpha_j}^{k_j}$  não unitárias.

**Observação 4.9.** Sejam  $C_{\alpha_1}^{k_1}, \dots, C_{\alpha_r}^{k_r}$  componentes tais que  $C_{\alpha_s}^{k_s} \cap C_{\alpha_{s+1}}^{k_{s+1}} \neq \emptyset$  para todo  $1 \leq s < r$ . Então existem  $j, k$  tais que  $\bigcup_s C_{\alpha_s}^{k_s} \subset C_j^k$ . Basta notar que a união é conexa e está contida, por exemplo, em  $M_{k_1 \dots k_r}$ . Logo está contida em  $C_j^{k_1 \dots k_r}$  para algum  $j$ .

A observação nos diz que a união finita de componentes presentes em uma mesma classe em  $\mathcal{A}/\sim$  é *estável*. O próximo resultado mostra que, num certo sentido, uma classe é uma componente.

**Teorema 4.7** (Estabilidade das classes). *Se  $[C]$  é uma classe de equivalência em  $\mathcal{A}/\sim$ , então a união de todas as componentes em  $[C]$  é igual a  $C_{j_0}^{k_0}$  para alguma escolha de  $j_0, k_0$ .*

*Demonstração.* Se todas as componentes em  $[C]$  são unitárias, então são todas iguais e o resultado segue trivialmente. Do contrário, como a união de todas as componentes de  $[C]$  é a união das componentes não unitárias, podemos considerar apenas esse tipo de componente.

**Etapa 1.** Suponha que  $C_a$  e  $C_b$  são componentes distintas em  $[C]$  com  $C_a \cap C_b \neq \emptyset$ , onde  $C_a$  é uma componente de  $M_a$  e  $C_b$  é componente de  $M_b$ . Vamos mostrar que existe  $p \in C_a \cap C_b$  com  $D_p F^{ab}$  unipotente. Inicialmente, existe  $p \in C_a \cap C_b$  tal que  $(C_a, p) \neq (C_b, p)$  em  $D$ . Sejam  $(V_a, p)$  e  $(V_b, p)$  os conjuntos analíticos de equação  $F^a = Id$  e  $F^b = Id$ , respectivamente, definidos em uma vizinhança de  $p$ . Como  $C_a$  e  $C_b$  não são unitários, obtemos que  $\dim(V_a, p) \geq 1$  e  $\dim(V_b, p) \geq 1$ . Vamos mostrar que as únicas possibilidades são as seguintes:

- a)  $\dim(V_a, p) = 2$  ou  $\dim(V_b, p) = 2$ ;
- b)  $(V_a, p)$  é uma curva singular ou  $(V_b, p)$  é uma curva singular;
- c)  $(V_a, p) \neq (V_b, p)$ .

Note que, no caso a), a matriz  $D_p F^{ab}$  é a identidade, logo unipotente. O Lema 4.2 garante que  $D_p F^{ab}$  é a identidade para os casos b) e c). Vamos finalmente mostrar

os três casos são os únicos possíveis. Se a) e b) não acontecem, então c) ocorre; do contrário, teríamos  $(V_a, p)$  e  $(V_b, p)$  curvas regulares com  $(V_a, p) = (V_b, p)$ . Daí teríamos  $(C_a \cup C_b, p) \subset M_a \cap M_b \Rightarrow (C_a, p) = (C_a \cup C_b, p) = (C_b, p)$ , contrariando a escolha de  $p$ .

**Etapa 2.** Vamos mostrar que  $\bigcup_{C_j \in [C]} C_j = C_{j_0}^{k_0}$  para  $k_0 = ab$  e algum  $j_0$ . Suponhamos que  $C_c$  é outra componente em  $C$  com  $\emptyset \neq C_b \cap C_c$ . Então  $C_b \cup C_c \subset M_{abc}$ ,  $F^{ab}(p) = p$  e  $D_p F^{ab}$  é nilpotente. Segue do Lema 4.5 que  $C_a \cup C_b \cup C_c \subset M_{ab}$ . Como todas as componentes em  $C$  podem ser ligadas a  $C_b$  por finitas componentes, segue por indução que  $\bigcup_{C_j \in [C]} C_j \subset M_{ab}$  e portanto  $\bigcup_{C_j \in [C]} C_j = C_{j_0}^{k_0}$ , para  $k_0 = ab$  e algum  $j_0$ . □

**Lema 4.6.** *Seja  $F : U \rightarrow V$  um biholomorfismo fixando  $0 \in U \cap V \subset \mathbb{C}^n$  com  $\text{Spec}(F) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ . Então, dado  $\varepsilon > 0$  com  $D_\varepsilon \subset U \cap V$ , existem  $r < \varepsilon$  e  $k \in \mathbb{N}$  tais que*

1.  $D_r, F^{-1}(D_r), \dots, F^{-k}(D_r) \subset D_\varepsilon$ .
2.  $F^{-k}(D_r) \cap \partial D_\varepsilon \neq \emptyset$ .
3.  $D_r$  está contida na bacia de atração da origem do difeomorfismo  $F$  e satisfaz  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F^j(D_r) \subset D_\varepsilon$ .

onde  $D_r = \{Z \in \mathbb{C}^2; |Z| \leq r\}$ .

*Demonstração.* Faremos o caso  $n = 1$ . Inicialmente, vamos mostrar que existe  $0 < R < \varepsilon$  tal que  $G := F^{-1} = \lambda z + O(z^2)$ ,  $|\lambda| \geq 1$ , satisfaz:

$$(4.2) \quad D_R, G(D_R), \dots, G^{k-1}(D_R) \subset D_\varepsilon \quad \text{e} \quad G^k(D_R) \cap \partial D_\varepsilon \neq \emptyset.$$

Suponha que não existe um tal  $R$ . Então  $G^k(D_R) \subset D_\varepsilon$  para todos  $k \in \mathbb{N}$ ,  $R < \varepsilon$ . Portanto, podendo usar a fórmula integral de Cauchy ao longo de  $|z| = R$  obtendo

$$\lambda^k = (G^k)'(0) = \int_{|z|=R} \frac{G^k(w)}{(w-0)^2} dw, \quad k \in \mathbb{N}, \quad R < \varepsilon.$$

Portanto

$$|\lambda^k| = \left| \int_{|z|=R} \frac{G^k(w)}{w^2} dw \right| \leq \frac{\varepsilon}{R^2} 2\pi R = \frac{2\pi\varepsilon}{R} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N},$$

um absurdo, pois  $\lambda > 1$ . Agora seja  $R < \varepsilon$  satisfazendo (4.2) e seja  $k_0$  o menor inteiro positivo para o qual (4.2) vale. Pela continuidade de  $G$ , é fácil ver que existe  $r \in [0, R]$  para o qual as afirmações 1,2 e 3 do lema valem. Para o caso geral a prova é similar, bastando usar a fórmula integral de Cauchy para várias variáveis.  $\square$

**Lema 4.7.** *Existe um conjunto  $K \subset M$  com as seguintes propriedades.*

1.  $K$  é um continuum (compacto e conexo).
2.  $0 \in K$  e  $K \cap \partial D \neq \emptyset$ .
3.  $F(K) = K$

*Demonstração.* Pelo teorema da variedade estável, podemos supor que  $\text{Spec}(D_0F) \subset S^1$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , ponhamos  $F_n = e^{-1/n}F$ . Então  $F_n$  é um biholomorfismo com  $\text{Spec}(D_0F_n) \subset \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ . Em particular, a origem é um ponto fixo atrator de  $F_n$  e podemos aplicar várias vezes o Lema 4.6 para obter  $r_n > 0$ ,  $k_n \in \mathbb{N}$  tais que

1.  $D_{r_n}, F_n^{-1}(D_{r_n}), \dots, F_n^{-k_n}(D_{r_n}) \subset D$
2.  $F_n^{-k_n}(D_{r_n}) \cap \partial D \neq \emptyset$
3.  $D_{r_n}$  está contida na bacia de atração da origem do difeomorfismo  $F_n$  e satisfaz  $\bigcup_{j=1}^{\infty} F_n^j(D_{r_n}) \subset D$ ,
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$

onde  $D_{r_n} = \{Z \in \mathbb{C}^2; |Z| \leq r_n\}$ . Vamos assumir que  $k_n$  é o menor inteiro positivo com a propriedade mencionada. Ponha  $V_n = \overline{\bigcup_{j \geq -k_n} F_n^j(D_{r_n})}$  e tome  $p_n \in F_n^{-k_n}(D_{r_n}) \cap \partial D$ . A escolha de  $D_{r_n}$  garante que  $V_n$  é um compacto conexo tal que  $F_n^j(V_n) \subset V_n$  para todo  $j \geq 0$ . Então  $V_n$  é compacto, conexo, contém a origem e intersecta o bordo em  $p_n$ . Passando a subsequências se necessário, podemos supor que  $V_n \rightarrow K$ , na topologia de Hausdorff de subconjuntos compactos de  $D$ , e que  $p_n \rightarrow p \in K \cap \partial D$ . Em particular,  $K$  é compacto, conexo, contém a origem e  $K \cap \partial D \neq \emptyset$ . Como  $F_n(V_n) \subset V_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(F_n)_{n \geq 1}$  converge a  $F$  uniformemente em  $D$  e  $V_n \rightarrow K$ , deduz-se que  $F(K) \subset K$ . Como  $F$  tem a propriedade de órbitas finitas, todo ponto de  $K$  é periódico e portanto  $F(K) = K$ . Em particular,  $K \subset M$ .  $\square$

## 4.4 Teorema da curva fixa

O Teorema da curva de pontos fixos é uma consequência dos resultados mostrados acima.

**Teorema 4.8.** *Seja  $F \in \text{Diff}(\mathbb{C}^2, 0)$  um biholomorfismo com a propriedade de órbitas finitas. Então algum iterado  $F^m$  de  $F$  possui uma curva analítica de pontos fixos.*

*Demonstração.* Sejam  $U$  um aberto fundamental de  $F$ ,  $D$  um disco fechado centrado em  $(0, 0)$  e contido em  $U$ . Ponha  $M = \cup M_k$ , onde

$$M_k = \text{Fix}_D F^k = \{x \in D; F(x), \dots, F^{k-1}(x) \in D \text{ e } F^k(x) = x\}.$$

Temos  $F(\overline{M}) = \overline{M}$  como consequência de  $F(M) = M$ . A propriedade de órbitas finitas implica  $\overline{M} \subset M$  e daí  $M$  é compacto. Seja  $M_0$  a componente conexa de  $M$  que contém a origem. Ela contém o conexo  $K$  dado no Lema 4.7, logo  $M_0 \cap \partial D \neq \emptyset$ . O continuum  $M_0$  é uma união enumerável e disjunta de elementos da família  $\mathcal{A}$  de componentes de  $F$  em  $D$ , pelo teorema de estabilidade das classes (Teorema 4.7). Pelo Teorema de Sierpinski,  $M_0 = C_{j_0}^{k_0}$  para certos  $j_0, k_0$ . Como a órbita de 0 não intersecta  $\partial D$ , o conjunto  $M_0$  é analítico na vizinhança de 0. Como  $M_0$  é conexo e  $\#M_0 > 1$ , deduz-se que  $\dim(M_0, 0) \geq 1$ . Em particular  $\text{Fix}(F^{k_0})$  contém um germe de curva analítica passando pela origem.  $\square$

Concluiremos este capítulo mostrando que o exemplo que construímos no capítulo anterior é o melhor que podemos encontrar, fora do contexto unipotente. Mais precisamente, não podemos construir biholomorfismos com a propriedade de órbitas finitas sem que algum de seus autovalores seja raiz da unidade.

**Corolário 4.3.** *Se  $F \in \text{Diff}_{<\infty}(\mathbb{C}^2, 0)$ , então ao menos um autovalor de  $F$  é raiz da unidade.*

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, existe uma curva analítica  $\gamma \subset \text{Fix}(F^k)$  para algum  $k \geq 1$ . Suponha que  $1 \notin \text{spec}(D_0 F^k)$ . Então  $D_0(F^k - Id)$  é uma matriz regular e o teorema da função inversa mostra que  $F^k - Id$  é um difeomorfismo local. Em particular, a germe do conjunto analítico  $F^k - Id = 0$  na origem é igual a  $\{0\}$ , uma a contradição. portanto devemos ter  $1 \in \text{spec}(D_0 F^k)$ . Como os autovalores de  $D_0 F^k$  são as potências  $k$ -ésimas dos autovalores de  $D_0 F$ , segue que existe  $\lambda \in \text{spec}(D_0 F)$  tal que  $\lambda^k = 1$ .  $\square$

# Capítulo 5

## Fluxos com órbitas finitas e integral primeira holomorfa

O objetivo principal deste capítulo é estudar a propriedade de órbitas finitas para fluxos de certas famílias de campos de vetores em dimensão  $n = 2$ . Em [RR15], [CS09] ... os autores estudam a propriedade (OF) para campos da forma  $X = x^a y^b Y$  com  $Y = (x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda y \frac{\partial}{\partial y})$  e  $\lambda \in \mathbb{Q}_{<0}$ . Neste caso, o campo  $Y$  tem uma integral primeira holomorfa não constante, o que os permite construir fluxos com a propriedade de órbitas finitas, ao analisar as restrições dos campos às curvas de nível. Neste capítulo, vamos generalizar os resultados em algumas direções. Em particular, construímos campos  $X = x^a y^b Y$  com órbitas finitas, sem que  $Y$  possua integrais primeiras ou seja linear. Para isso, introduziremos a noção de *perpendicularmente separados* para os autovalores da parte linear de  $Y$ . Esses exemplos serão usados no próximo capítulo para construir campos não integráveis em dimensão  $n=3$ , cuja holonomia de uma separatriz isolada tem a propriedade de órbitas finitas.

### 5.1 Fluxo real de campos holomorfos

Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  e consideramos seu fluxo

$$\phi : U \times D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}^n, (z, t) \mapsto \phi^t(z).$$

Percorrendo  $\phi$  para tempos reais  $t \in (-r, r)$  obtemos um fluxo real sobre  $U$ , cujo campo associado será denotado por  $\text{Re}(X)$  e será chamado de parte real de  $X$ . Analogamente, percorrendo  $\phi$  para tempos da forma  $it$ ,  $t \in (-r, r)$ , obtemos

outro fluxo real sobre  $U$ , cujo campo associado será denotado por  $Im(X)$  e será chamado de parte imaginária de  $X$ . As trajetórias do campo real unidimensional  $Re(X)$  serão chamadas de trajetórias reais de  $X$ .

Uma questão natural agora é saber como todos estes campos se relacionam, vistos como derivações. Vejamos o que acontece em dimensão complexa  $n = 1$ . Seja  $X(z) = a(z)\frac{\partial}{\partial z}$  um campo holomorfo, com coordenada complexa  $z = x + iy = (x, y)$ , e seja  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável. Considerando as partes reais e imaginárias das funções  $a$  e  $f$  podemos escrever

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \text{e} \quad a(z) = a_1(x, y) + ia_2(x, y).$$

Neste caso, temos que

$$Re(X) = a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad Im(X) = -a_2(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + a_1(x, y)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Agora temos

$$X(f) = a(z)\frac{\partial f}{\partial z} = a\frac{1}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right] = \dots = \frac{1}{2}[Re(X) - iIm(Y)](f).$$

Em particular, quando  $f$  for holomorfa então as equações de Cauchy - Riemann fornecem  $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$  e daí seguirá que

$$Re(X(f)) = Re(X)(Re f)$$

De modo análogo, podemos generalizar os desenvolvimentos acima para dimensões maiores, obtendo o seguinte lema.

**Lema 5.1.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  singular e  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  uma função  $\mathbb{R}$ -diferenciável. Então*

$$X(f) = \frac{1}{2}[Re(X) - iIm(Y)](f).$$

*Em particular, se  $f$  é holomorfa, então*

$$Re(X(f)) = Re(X)(Re(f)).$$

Dado um campo  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  e uma vizinhança compacta  $K$  da origem em  $\mathbb{C}^n$  podemos considerar a trajetória em  $K$  de um ponto  $p$  para o fluxo real de  $X$ .

Mais precisamente:

**Definição 5.1.** Se  $\gamma$  é a trajetória real de  $X$  tal que  $\gamma(0) = p$ , o intervalo de definição de  $\gamma$  em  $K$  é o único intervalo fechado  $I$  (não necessariamente limitado) tal que  $\gamma$  se estende a  $I$ ,  $\gamma(I) \subset K$  e  $I$  é maximal para esta propriedade. Dizemos que a trajetória real de  $p$  por  $X$  em  $K$  é periódica se  $\gamma(r) = \gamma(0)$  para algum  $r \in \mathbb{R}$ ; diremos que a trajetória é fechada<sup>1</sup> se  $\gamma(I)$  é um conjunto fechado em  $K$ . Diremos que  $X$  possui a propriedade de trajetórias fechadas (escrevendo  $X \in TF$ ) quando todas as trajetórias (maximais) de  $X$  em alguma vizinhança compacta  $K$  forem fechadas.

Notemos portanto que como  $K$  é compacto, existem dois tipos de trajetórias fechadas: aquelas que tocam o bordo (se  $I$  é compacto) e as trajetórias periódicas (se  $I$  não é limitado). Além disso, se  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$ , então  $X \in OF$  se e somente se todas as trajetórias reais de  $X$  em alguma vizinhança compacta de  $0 \in \mathbb{C}^n$  são fechadas e o período das trajetórias periódicas são racionais. Em particular, se  $X$  não possui trajetórias periódicas, então  $X \in OF \Leftrightarrow X \in TF$ . Para um exemplo de um campo com trajetórias fechadas, mas sem a propriedade OF, ver Exemplo 5.2.

## 5.2 Integrais primeiras

**Definição 5.2.** Uma integral primeira holomorfa para  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  é uma função holomorfa  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tal que  $X(f) = 0$ . Esta última igualdade é equivalente a dizer que os conjuntos  $\{f = c\}$ ,  $c \in \mathbb{C}$ , são invariantes pelo fluxo de  $X$ .

**Observação 5.1.** Usando a teoria de grupos pró-algébricos (ver Ribon 2015 [Rib15]), pode-se mostrar que  $f$  é uma integral primeira para  $X$  se e somente se é uma integral primeira para as partes nilpotente e semisimples de  $X$ .

**Lema 5.2.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$  com  $\text{Spec}DX(0) = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ ,  $\lambda_2 \neq 0$ . Se  $X$  possui uma integral primeira então  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ . Em particular, se  $X$  está no domínio de Poincaré então  $X$  não possui integral primeira.*

*Demonstração.* Salvo por uma mudança de coordenadas linear, podemos supor que a parte semisimples de  $X$  cumpre  $J^1X_S = (\lambda_1x, \lambda_2y)$ . Seja  $f$  uma integral

<sup>1</sup>Tradicionalmente na teoria de sistemas dinâmicos usa-se o termo trajetória fechada para se referir às trajetórias que aqui chamamos de periódicas. Nossa definição é mais geral.

primeira para  $X$ . Podemos supor que  $f = \sum_{i+j \geq k} a_{i,j} x^i y^j$  com  $k \geq 1$  e  $a_{i,j} \neq 0$  para algum  $a_{i,j}$  com  $i + j = k$ . Daí temos que

$$0 = J^k(X_S(f)) = \sum_{i+j \geq k} (\lambda_1 i + \lambda_2 j) a_{i,j} x^i y^j \Rightarrow i\lambda_1 + \lambda_2 j = 0$$

para certos  $i, j$  com  $i + j = k$ . Como  $\lambda_2 \neq 0$ , segue que  $i \neq 0$  e  $\lambda_1/\lambda_2 = -j/i \in \mathbb{Q}_{\leq 0}$ .  $\square$

### 5.3 Primeiros exemplos de fluxos de órbitas finitas

Já vimos no exemplo 1.1 da seção 1.1 que os biholomorfismos  $F = (x, y + x)$  e  $G = (x, y + x^2)$  têm a propriedade de órbitas finitas. Note que  $F = \exp(x \frac{\partial}{\partial y})$  e  $G = \exp(x^2 \frac{\partial}{\partial y})$ , ou seja, são fluxos de campos holomorfos com integral primeira  $f = x$ . Nem todo fluxo de um campo com integral primeira tem a propriedade de órbitas finitas, como pode ser vistos nos exemplos que seguem.

**Exemplo 5.1.** Se  $X = \lambda x^p \frac{\partial}{\partial y}$  com  $p \in \mathbb{N}$  e  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ , então  $F = \exp(X) = (x, y + \lambda x^p)$  tem a propriedade de órbitas finitas, mas não é periódico, uma vez que  $F^n(x, y) = (x, y + n\lambda x^p)$ .

**Exemplo 5.2.** Seja  $X = u(xy)(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y})$ , onde  $u : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é holomorfa e injetiva ( $u'(0) \neq 0$ ). Então  $X \in TF$ , mas  $X \notin OF$ . Com efeito, fixemos um pequeno polidisco  $K$  no qual as funções envolvidas estão definidas. Note que  $f(x, y) = xy$  é uma integral primeira de  $X$ . Portanto as folhas de  $X$  são da forma  $C = \{xy = c\}$ ; daí temos  $X|_C = u(c)x \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $0 < r_1 < |x| < r_2$ . Se  $c \neq 0$  e  $u(c) \notin i\mathbb{R}$  as trajetórias de  $X|_C$  são fechadas não periódicas e portanto  $X|_C \in OF$ . Se  $u(c) \in 2\pi i\mathbb{Q}$  então  $X|_C$  tem trajetórias periódicas de período racional e portanto  $X|_C \in OF$ . Se  $u(c) \in 2\pi i(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ , então  $X|_C$  possui trajetórias periódicas com período irracional e portanto  $X|_C \notin OF$ . Portanto,  $X \in TF$ , mas  $X \notin OF$ .

**Exemplo 5.3.** Seja  $X = x^p y^q \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right)$  um campo singular não trivial.

1. Se  $p = q = 0$ , então  $\exp(X) \in OF \Leftrightarrow \lambda_1, \lambda_2 \in 2\pi i\mathbb{Q} \Leftrightarrow \exp(X)$  é periódico
2. Se  $p \geq 1$  e  $q = 0$  então temos dois casos



- Caso 1:  $\lambda_1 \neq 0$ . Aqui vemos que  $X|_{y=0} = \lambda_1 x^{p+1} \frac{\partial}{\partial x}$  tem a dinâmica dada pelo teorema da flor de Leau e Fatou (ver[Mil06]) e portanto  $X \notin OF$ .
- Caso 2:  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 \neq 0$ . Aqui temos  $X = \lambda_2 x^p y \frac{\partial}{\partial y}$  e  $\exp(X) = (x, e^{x^p \lambda_2 y})$ . Seja qual for o  $\lambda_2$ , podemos tomar  $x_0 \neq 0$  pequeno tal que  $x_0^p \lambda_2 \notin 2\pi i \mathbb{Q}$ . Assim, na folha  $\{(x_0, y); y \neq 0\}$   $X$  tem órbitas infinitas, logo  $X \notin OF$ .

Analogamente, se  $p = 0$  e  $q \geq 1$  então  $X \notin OF$ .

Em resumo temos:

$$X = x^p y^q \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right) \in OF \implies p, q \geq 1 \text{ ou } p = q = 0 \text{ e } \lambda_j \in 2\pi i \mathbb{Q}.$$

Decidir se um campo  $X = x^p y^q \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right)$  tem a propriedade OF quando  $p, q \geq 1$  é mais complicado. Por exemplo, as restrições  $X|_{x=0}$  e  $X|_{y=0}$  são identicamente nulas, de modo que não é muito útil usar a dinâmica nessas curvas, já que todo ponto é fixo pelo fluxo. Uma alternativa seria impor condições para que  $X$  tivesse integral primeira holomorfa e considerar a dinâmica unidimensional induzida nas curvas de nível da integral primeira (ver [RR15]).

Na próxima seção abordaremos a questão de uma maneira diferente, que é associar uma dinâmica unidimensional, não através da existência de integrais primeiras, mas sim da ação do campo  $X$  nos monômios  $x^p y^q$ .

Vejamos um último exemplo.

**Exemplo 5.4.** Seja  $X = \lambda x \frac{\partial}{\partial x} + (x + \lambda y) \frac{\partial}{\partial y}$ . Então  $\exp(X) = (e^\lambda x, e^\lambda x + e^\lambda y)$ . Segue da caracterização de órbitas finitas no caso linear que  $X \in OF \Leftrightarrow \lambda \in 2\pi i \mathbb{Q}$ . Note que, embora  $X$  não possua integral primeira se  $\lambda \neq 0$ , ele é linear e sua parte nilpotente possui integral primeira.

**Definição 5.3.** Diremos que um campo singular  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^2, 0)$  é 1-singular se seu conjunto singular for uma curva lisa  $C = \{f = 0\}$  e o campo  $X$  é da forma  $f^m Y$  onde  $m \in \mathbb{N}$  e  $Y$  é um germe de campo de vetores holomorfo com  $Y(0) \neq 0$ . Salvo mudança de coordenadas, podemos supor que  $C = \{x = 0\}$  e que

$$X = x^p Y, \quad p \in \mathbb{N} \text{ e } Y(0) \neq 0.$$

Diremos que esta é a *forma saturada* do campo 1-singular  $X$  em relação a  $C$ .

**Exemplo 5.5.** Os campos  $X_1 = \lambda_1 x^p \frac{\partial}{\partial x}$  e  $X_2 = \lambda_2 x^p \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\lambda_j \neq 0$ , são 1-singulares. Note que  $\exp(X_2) = (x, y + \lambda_2 x^p) \in OF$ . Se  $p = 1$  então  $\exp(X_1) \in OF \Leftrightarrow \lambda_1 \in 2\pi i\mathbb{Q}$ . Se  $p > 1$  então  $\exp(X_1|_{y=c}) = x + \lambda_1 x^p + o(x^{p+1}) \notin OF$  pelo teorema da Flor.

**Proposição 5.1.** *Seja  $X = x^p Y$  um campo 1-singular saturado em relação a  $\{x = 0\}$ .*

1. *Se  $x = 0$  é invariante por  $Y$  ( $x|Y(x)$ ) então  $X \sim x^p \partial_y$ . Em particular,  $\exp(X) \sim (x, y + x^p)$ , e portanto  $X \in OF$ .*
2. *Se  $x = 0$  não é invariante por  $Y$ , então  $\exp(X) \in OF$  se, e somente se,  $X \sim \lambda x \partial_x$  onde  $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$ .*

*Demonstração.* (1) Pelo teorema de Frobenius (ver teorema 1.3), existe uma mudança de coordenadas  $\psi = (xu(x, y), \psi_2(x, y))$  tal que  $X^* := \psi^* X = x^p u^p \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $u(0, 0) \neq 0$ . Note que  $x$  é uma integral primeira de  $u^p \frac{\partial}{\partial y}$ . Novamente pelo Teorema de Frobenius, existe uma mudança de coordenadas  $\phi = (x, \phi_2)$  tal que  $\phi^*(u^p \frac{\partial}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}$ . Logo  $\phi^*(X^*) = x^p \frac{\partial}{\partial y}$ .

(2) É claro que se  $X$  é da forma  $\lambda x \partial_x$  com  $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$ , então  $\exp(X) \in OF$ . Suponha que  $X \in OF$ . Vamos mostrar primeiro que  $Y$  é transversal a  $x = 0$ , isto é  $Y_1(0, 0) \neq 0$ . Suponha que não seja. Seja  $C$  a curva invariante de  $Y$  passando por  $(0, 0)$ . Então  $C$  é invariante por  $X$  e pode ser parametrizada por  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), t)$  onde  $\gamma_1(t) = O(t^2)$ . Consideremos agora a restrição de  $X_\gamma(t) = Z(t) \frac{\partial}{\partial t}$  de  $X$  a  $\gamma$ . Ou seja,  $X_\gamma$  é único campo satisfazendo

$$Z(t)(\gamma_1'(t), 1) = (x^p Y_1, x^p Y_2)(\gamma_1(t), t).$$

Comparando as segundas componentes obtemos  $Z(t) = O(\gamma_1'(t)) = O(t)$ . Como  $\gamma$  não é uma curva singular, deduz-se que  $X_\gamma$  não possui órbitas finitas pelo teorema da flor. Em particular,  $X$  não possui órbitas finitas, uma contradição. Assim, vamos assumir que  $Y$  é transversal a  $x = 0$ .

Fazendo uma mudança de coordenadas se necessário (a qual existe pelo Teorema de Frobenius), podemos supor que  $X = u(x, y)x^p \partial_x$  e  $u(0, 0) \neq 0$ . Como a restrição de  $X$  a cada reta  $y = y_0$  possui orbitas finitas, o teorema da flor implica  $p = 1$ . Mais ainda, os autovalores da parte linear da restrição  $X|_{\{y=y_0\}}$  em  $(0, y_0)$  pertencem a  $2\pi i\mathbb{Q}$ . Como  $u(0, 0) \neq 0$ , temos que  $u(0, y)$  pertence a  $2\pi i\mathbb{Q}^*$  para todo  $y$  numa bola  $B(0, \varepsilon)$ . Como  $u(\{0\} \times B(0, \varepsilon))$  é conexo, existe  $\lambda \in 2\pi i\mathbb{Q}^*$  tal

que  $u(0, y) \equiv \lambda$ . Em particular,  $u(x, y) = \lambda + \alpha(x, y)$  com  $\alpha$  holomorfa. Vamos buscar um biholomorfismo conjugando  $X$  com  $\lambda x \frac{\partial}{\partial x}$ .

Prova 1: Vamos buscar um difeomorfismo  $\rho(x, y) = (xv(x, y), y)$ . Em cada linha  $y = y_0$  o campo de vetores  $X|_{y=y_0}$  tem uma 1-forma dual  $\frac{dx}{u(x, y_0)x}$ . A condição  $u(0, y) \equiv \lambda$  garante que  $\frac{1}{u(x, y)x} = \frac{1}{\lambda x} + g(x, y)$  onde  $g$  é uma função holomorfa definida numa vizinhança da origem em  $\mathbb{C}^2$ . O difeomorfismo  $\rho|_{y=y_0}$  deve conjugar  $X|_{y=y_0}$  e  $\lambda x \partial_x$  ou equivalentemente conjugar as formas duais, i.e.  $\rho|_{y=y_0}^* \frac{dx}{\lambda x} = \frac{dx}{xu(x, y_0)}$  onde a diferencial é considerada em relação a coordenada  $x$  (a coordenada  $y$  é fixa). Daí devemos resolver a equação  $\frac{d(xv(x, y_0))}{\lambda xv(x, y_0)} = \frac{dx}{\lambda x} + g(x, y_0)$  ou equivalentemente

$$\frac{dv(x, y_0)}{\lambda v(x, y_0)} = g(x, y_0).$$

A equação é equivalente a  $d \log(v(x, y_0)) = \lambda g(x, y_0)$ . Agora seja  $G$  uma primitiva de  $\lambda g(x, y_0)$  em relação a coordenada  $x$ . Por exemplo se  $\lambda g(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$  podemos considerar  $G(x, y) = \sum_{ij} \frac{a_{ij}}{i+1} x^{i+1} y^j$ . A função  $v(x, y)$  pode ser definida como  $v(x, y) = e^{G(x, y)}$  e obviamente é uma unidade. Por construção  $\rho$  é um germe de difeomorfismo que em restrição a cada reta  $y = y_0$  conjuga  $X|_{y=y_0}$  e  $\lambda x \partial_x$ . Logo  $\rho$  conjuga  $X$  e  $\lambda x \partial_x$ . □

## 5.4 Teorema da flor e estabilidade de Lyapunov

Nesta seção, classificaremos a propriedade de órbitas finitas para uma certa família de campos de vetores. Em particular, construiremos campos de vetores nilpotentes não integráveis com a propriedade OF.

**Lema 5.3.** *Seja  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$  um campo de vetores e sejam  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  e  $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  funções holomorfas. Se  $X(f) = g \circ f$  e  $\gamma(t)$  é uma trajetória (real ou complexa) de  $X$  então  $f \circ \gamma(t)$  é uma trajetória de*

$$Z = g(z) \frac{\partial}{\partial z} \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}, 0).$$

*Demonstração.*  $(f \circ \gamma)' = X(f) \circ \gamma = g \circ f \circ \gamma$ . □

**Definição 5.4.** Sejam  $v, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Diremos que  $\lambda_1, \lambda_2$  são *perpendicularmente separados* por  $v$  se eles pertencem a componentes conexas distintas de  $\mathbb{C} \setminus L$ , onde  $L$  é a reta real de  $\mathbb{C}$  passando pela origem e perpendicular a  $v$ .

**Observação 5.2.** A propriedade de ser perpendicularmente separado é invariante pela ação de  $\mathbb{C}^*$  : se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separados por  $v$ , então  $c\lambda_1, c\lambda_2$  são perpendicularmente separados por  $cv$ , para todo  $c \in \mathbb{C}^*$ .

A seguir, utilizaremos a noção de *separação perpendicular* para classificar certas famílias de campos quanto à propriedade de órbitas finitas. Resolvemos apresentar dois teoremas, sendo que o primeiro, na verdade, é um caso particular do segundo. Resolvemos fazer isso por dois motivos. O primeiro é que o caso linear é um pouco mais simples, de modo que o leitor pode focar mais na ideia da prova. O segundo é que só precisaremos do caso linear para construir folheações especiais em dimensão 3 sem integrais primeiras. A ideia em ambas as provas é a mesma; associar um campo unidimensional  $Z$  ao campo bidimensional  $X$  dado, através do lema 5.3, e usar *separação perpendicular* e o Teorema de Leau-Fatou (ver teorema 1.8) para estudar as soluções do campo  $Z$ . Depois, utilizamos essas informações para entender as soluções do campo  $X$ .

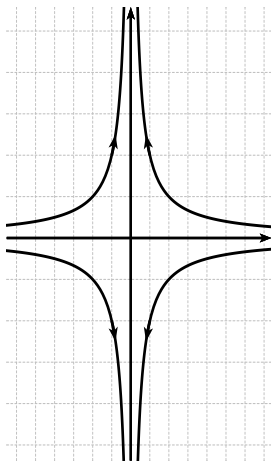
**Teorema 5.1.** *Seja  $X = x^p y^q (\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  um campo de vetores com  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Suponhamos que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ . Então:*

- (i)  *$X$  não possui trajetórias reais periódicas em nenhuma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .*
- (ii) *Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$  então  $X \in TF$ , ou equivalentemente  $X \in OF$ .*
- (iii) *Se  $X \in TF$  então  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ .*

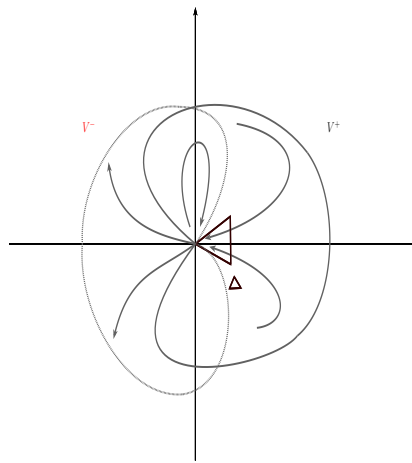
*Demonstração.* Fazendo uma mudança linear de coordenadas se necessário (cf. Fig. 5.1(c)), podemos supor que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \in \mathbb{R}_{<0}$  e  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ . Note que  $X(x^p y^q) = r(x^p y^q)^2$ . Segue do lema 5.3 que o monômio  $x^p y^q$  envia trajetórias de  $X$  em trajetórias do campo  $Z(z) = rz^2 \frac{\partial}{\partial z}$  em  $(\mathbb{C}, 0)$ . Usando uma versão contínua do teorema da flor de Leau-Fatou (cf. [Lor06]), existe uma vizinhança pontilhada  $V = V^- \cup V^+$  de  $0 \in \mathbb{C}$  tal que as trajetórias reais de  $Z$  são dadas como na figura 5.1(b).

Mais precisamente, a trajetória  $\gamma_z$  que começa em  $z \in V^+$  (resp.  $z \in V^-$ ) está definida em uma vizinhança  $[0, \infty)$  (resp.  $(-\infty, 0]$ ) e satisfaz

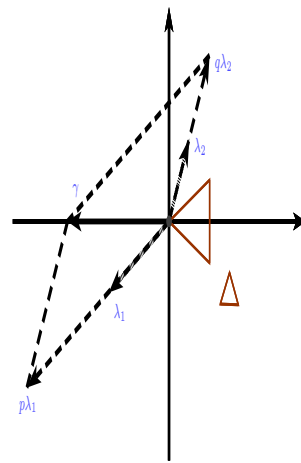
- (a)  $\gamma(t) \rightarrow 0$  e  $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \rightarrow 1$  (resp.  $\frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|} \rightarrow -1$ ), quando  $t \rightarrow \infty$  (resp.  $t \rightarrow -\infty$ );
- (b) se  $\gamma_z([0, \infty)) \subset V_+ \cup V_-$ , então  $z \in V_+$  e, se  $\gamma_z((-\infty, 0]) \subset V_+ \cup V_-$ , então  $z \in V_-$ .



(a) Figura 5.1



(b) Figura 5.1



(c) Figura 5.1

Fixamos uma vizinhança compacta  $W$  de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $x^p y^q \in V$  para cada  $(x, y) \in W$ .

A fim de mostrar (i), nós supomos que  $z = (x_0, y_0) \in W$  e que  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  é uma solução maximal de  $X$  com origem em  $z$ , definida em uma vizinhança de  $[0, \infty)$ . Então  $\gamma(t) := x(t)^p y(t)^q$  é uma trajetória real de  $Z$ , definida para cada  $t \geq 0$ . Em particular, segue de (a) e (b) que  $\gamma(t) \rightarrow 0$  e dessa forma  $\sigma(t)$  não pode ser uma trajetória periódica. Isso mostra (i).

Para provarmos o item (ii), podemos supor que  $\text{Re}(\lambda_1) < 0 < \text{Re}(\lambda_2)$  (cf. Fig. 5.1(c)). Notemos que existe  $\delta > 0$  com  $\frac{\text{Re}(\lambda_2)}{-\text{Re}(\lambda_1)} > \delta > 0$ . Além disso, podemos tomar um setor circular  $\Delta = \{z \in V^+; -\varepsilon < \text{Arg}(z) < \varepsilon\}$  tal que

1.  $\text{Re}(\lambda_1 z) < 0 < \text{Re}(\lambda_2 z)$  para cada  $z \in \Delta$ ;
2.  $\frac{\text{Re}(\lambda_2 z)}{-\text{Re}(\lambda_1 z)} = \frac{|z| \text{Re}(\lambda_2 z/|z|)}{-|z| \text{Re}(\lambda_1 z/|z|)} > \delta > 0$ , *i.e.*  $\text{Re}(\lambda_2 z) + \delta \text{Re}(\lambda_1 z) > 0$  para cada  $z \in \Delta$ .

Devemos mostrar que o domínio de definição de  $\sigma$  é limitado. Para isso, suponhamos que ele contém  $[0, \infty)$ ; então por (a) e (b) existe  $t_0 > 0$  tal que

3.  $\gamma(t) \in \Delta$  para cada  $t \geq t_0$ .

Aplicando o lema 5.1 sobre as funções holomorfas  $(x, y) \mapsto \ln x = \ln |x| + i \arg(x)$

e  $\ln y = \ln |y| + i \arg(y)$  vemos que

(5.1)

$$\operatorname{Re}(X)(\ln |x|) = \operatorname{Re}(X(\ln x)) = \operatorname{Re}(\lambda_1 x^p y^q) < 0 < \operatorname{Re}(\lambda_2 x^p y^q) = \operatorname{Re}(X)(\ln |y|)$$

sobre a região  $G = \{(x, y) \in W; x^p y^q \in \Delta\}$ . Portanto  $|x(t)|$  decresce e  $|y(t)|$  cresce a partir de  $t_0$ . Em particular, como  $\gamma(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ , nós devemos ter  $x(t) \rightarrow 0$ . Segue daí que  $\ln |x(t)| \rightarrow -\infty$ . Aplicando a desigualdade presente em (2) obtemos  $\operatorname{Re}(X)(\ln |y| + \delta \ln |x|) > 0$  sobre  $G$ . Segue de 3 que  $\ln |y(t)| + \delta \ln |x(t)|$  é crescente para  $t \geq t_0$ . Em particular, como  $\ln |x(t)| \rightarrow -\infty$ , segue que  $\ln |y(t)| \rightarrow \infty$  e obtemos uma contradição. Portanto, nas hipóteses do item (ii), vemos que os domínios positivos de soluções de  $X$  são limitados. Agora, suponha que o domínio de definição de  $\sigma(t)$  contém  $(-\infty, 0]$ . Nós colocamos  $\tilde{\Delta} = -\Delta = \{-z; z \in \Delta\}$ . Então

$$1' \operatorname{Re}(\lambda_1 z) > 0 > \operatorname{Re}(\lambda_2 z) \text{ para todo } z \in \tilde{\Delta};$$

$$2' \operatorname{Re}(\lambda_2 z) + \delta \operatorname{Re}(\lambda_1 z) < 0 \text{ e}$$

$$3' \text{ Existe } t_0 < 0 \text{ tal que } \gamma(t) \in \tilde{\Delta} \text{ para todo } t \leq t_0.$$

Agora temos

$$(5.2) \quad \operatorname{Re}(X)(\ln |x|) = \operatorname{Re}(\lambda_1 x^p y^q) > 0 > \operatorname{Re}(X)(\ln |y|) = \operatorname{Re}(\lambda_2 x^p y^q)$$

sobre a região  $G = \{(x, y) \in W; x^p y^q \in \tilde{\Delta}\}$ . Portanto  $|x(t)|$  decresce e  $|y(t)|$  cresce quando  $t \rightarrow -\infty$ ; logo  $x(t) \rightarrow 0$  e  $\ln |x(t)| \rightarrow -\infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ . Segue de (2') que  $\operatorname{Re}(X)(\ln |y| + \delta \ln |x|) < 0$ . Segue daí que  $|y(t)| \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow -\infty$ , uma contradição. Portanto o domínio de definição de  $\sigma$  é limitado, o que conclui (ii).

Para mostrar (iii), vamos mostrar que se  $\lambda_1, \lambda_2$  não são perpendicularmente separados então  $X \notin TF$ . Podemos assumir que

$$r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \in \mathbb{R}_{<0}, \operatorname{Re}(\lambda_1) < 0 \text{ e } \operatorname{Re}(\lambda_2) \leq 0.$$

Seja  $\Delta \subset V$  o setor já mencionado. Seja  $(x_0, y_0) \in W$  com  $x_0^p y_0^q \in \Delta \cap \mathbb{R}_{>0}$  e seja  $\sigma(t)$  a trajetória de  $X$  com  $\sigma(0) = (x_0, y_0)$ . Então  $\gamma(t) = (x^p y^q) \circ \sigma(t) \in \mathbb{R}^+$ . Como  $\operatorname{Re}(X)(\ln |y|) = \operatorname{Re}(\lambda_2 x^p y^q)$ , segue que  $\ln |y|$  é não crescente ao longo da trajetória real de  $(x_0, y_0)$ . Como  $\ln |x|$  decresce, segue que essa trajetória é não periódica, mas seu o domínio de definição positivo é  $[0, \infty)$ . Em particular, a trajetória é não fechada.  $\square$

**Corolário 5.1** ([RR15]). *Nas hipóteses do teorema anterior, se  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{<0}$  e  $r = p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ , então  $X \in OF$ .*

*Demonstração.* Sendo  $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}_{<0}$  e  $r = p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ , então necessariamente  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separados por  $r$  e portanto podemos usar o teorema anterior para concluir que  $\exp(X) \in (OF)$ .  $\square$

Com um pouco mais de trabalho podemos mostrar o seguinte:

**Teorema 5.2.** *Seja  $X = x^p y^q \left( \frac{1}{1-Cx^p y^q} \right) (\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  um campo de vetores com  $p, q \in \mathbb{N}$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . Suponhamos que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ . Então:*

- (i)  *$X$  não possui trajetórias reais periódicas em nenhuma vizinhança suficientemente pequena de  $(0, 0)$ .*
- (ii) *Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$  então  $X \in TF$ , ou equivalentemente  $X \in OF$ .*
- (iii) *Se  $X \in TF$  então  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ .*

*Esquema da prova.* A prova deste resultado segue as mesmas linhas do teorema anterior e apontaremos aqui os passos importantes. Inicialmente fazemos uma mudança de coordenadas linear de modo que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 = -1$  e  $\text{Re}(\lambda_1) < 0$ . Portanto  $X(x^p y^q) = -\frac{(x^p y^q)^2}{1-Cx^p y^q}$  e segue do Lema 5.3 que o monômio  $x^p y^q$  envia trajetórias reais de  $X$  em trajetórias do campo  $Z(z) = \frac{-z^2}{1-Cz} \frac{\partial}{\partial z}$  em  $(\mathbb{C}, 0)$ . Aplicando novamente a versão contínua do teorema da flor de Leau-Fatou (ver Teorema 1.8), podemos encontrar uma vizinhança pontilhada  $V = V^- \cup V^+$  de  $0 \in \mathbb{C}$  tal que as trajetórias reais de  $Z$  satisfazem (a) e (b) acima. Fixamos uma vizinhança compacta  $W$  de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  tal que  $x^p y^q \in V \cup \{0\}$  para cada  $(x, y) \in W$ .

O item (i) é mostrado exatamente como no teorema anterior: se  $z = (x_0, y_0) \in W$  e  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  é uma solução maximal de  $X$  com origem em  $z$ , definida em uma vizinhança de  $[0, \infty)$ , então  $\gamma(t) := x(t)^p y(t)^q$  é uma trajetória real de  $Z$ , definida para cada  $t \geq 0$ , e por (a) e (b) temos  $\gamma(t) \rightarrow 0$ ; dessa forma  $\sigma(t)$  não pode ser uma trajetória periódica. Isso mostra (i).

A prova de (ii) também é similar a do teorema anterior. Com efeito, podemos supor que  $\text{Re}(\lambda_1) < 0 < \text{Re}(\lambda_2)$ . Pondo  $u(z) = \frac{1}{1-Cz}$  vemos que  $u(0) = 1$  e portanto podemos construir um setor circular  $\Delta = \{z \in V^+; -\varepsilon < \text{Arg}(z) < \varepsilon\}$  tal que

$$\text{Re}(\lambda_1 z u(z)) < 0 < \text{Re}(\lambda_2 z u(z)) \text{ e } \text{Re}(\lambda_2 z u(z)) + \delta \text{Re}(\lambda_1 z u(z)) > 0 \text{ para } z \in \Delta.$$

Agora aplicamos o Lema 5.1 sobre as funções  $\ln x$  e  $\ln y$  para concluir que toda solução maximal  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  de  $X$  tem domínio limitado, mostrando (ii).

A prova do item (iii) é um pouco mais delicada. Vamos supor que  $\lambda_1, \lambda_2$  não são perpendicularmente separados. O objetivo é construir uma trajetória não fechada. Podemos assumir que  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 = -1$ ,  $\operatorname{Re}(\lambda_1) < 0$  e  $\operatorname{Re}(\lambda_2) \leq 0$ . Consideramos primeiro o caso  $\operatorname{Re}(\lambda_2) < 0$ . Vamos construir um setor circular  $\Delta = \{z \in V^+; -\varepsilon < \operatorname{Arg}(z) < \varepsilon\}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda_j z u(z)) < 0$  para  $z \in \Delta$ ,  $j = 1, 2$ . Daí podemos aplicar o Lema 5.1 para mostrar que se  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  é uma trajetória de  $X$  com  $\sigma(0) = (x_0, y_0) \in W$  e  $x_0^p y_0^q \in \Delta$  então  $\ln |x(t)|$  e  $\ln |y(t)|$  são não crescentes, de modo  $\sigma(t)$  está definida em  $[0, \infty)$  e portanto não é fechada. O caso mais difícil é quando  $\operatorname{Re}(\lambda_2) = 0$ , digamos  $\lambda_2 = ib$ ,  $b \in \mathbb{R}$ . Neste caso, ainda podemos construir um setor  $\Delta = \{z \in V^+; -\varepsilon < \operatorname{Arg}(z) < \varepsilon\}$  tal que  $\operatorname{Re}(\lambda_1 z u(z)) < 0$  para  $z \in \Delta$  e consequentemente uma trajetória  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  com  $\ln |x(t)|$  decrescente. Porém,  $\ln |y(t)|$  pode não ser decrescente. No entanto, podemos construir  $\sigma(t)$  de modo que  $|y(t)|$  não cresce muito. Em outras palavras, vamos mostrar que se escolhermos bem o  $y_0$ , então  $|y(t)|$  se mantém pequeno e portanto  $\sigma(t)$  está definida em  $[0, \infty)$ .

Seja

$$w = \psi(z) = \frac{1}{z} + C \ln z$$

a aplicação definida em  $\Delta$  transformando o campo  $Z$  no campo constante  $\frac{\partial}{\partial w}$ . Podemos supor que  $\operatorname{Re}(\psi(z)) > 1$  para  $z \in \Delta$ . As soluções  $\gamma(t) = x^p y^q \circ \sigma(t)$  de  $Z$  são enviadas em soluções de  $\frac{\partial}{\partial w}$  por  $\psi$ , ou seja  $\psi(\gamma(t)) = \psi(\gamma(0)) + t$ . Além disso, pondo  $v = \frac{1}{z}$ , vemos que

$$\psi = \frac{1}{z} + C \ln(z) = v - C \ln v = v(1 + o(1)),$$

onde  $o(1)$  representa qualquer função que converge a zero quando  $z \rightarrow 0$  (ou equivalentemente  $v \rightarrow \infty$ ). Daí temos

$$\frac{\psi}{v} = 1 + o(1) \implies \ln \psi - \ln v = \ln(1 + o(1)) = o(1) \implies \frac{\ln v}{\psi} = \frac{\ln \psi + o(1)}{\psi} = O\left(\frac{\ln \psi}{\psi}\right).$$



Note que  $O\left(\frac{\ln \psi}{\psi}\right) = o(1)$ , uma vez que  $\psi \rightarrow \infty$  quando  $z \rightarrow 0$ . Portanto

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}\left(\lambda_2 \frac{z}{1-Cz}\right) &= \operatorname{Re}\left(ib \frac{1}{v-C}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(ib \frac{1}{\psi + C \ln v - C}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{ib}{\psi} \frac{1}{1 + C \frac{\ln v}{\psi} - \frac{C}{\psi}}\right) \\
 &= \operatorname{Re}\left(\frac{ib}{|\psi|^2} \bar{\psi} \frac{1}{1 + O\left(\frac{\ln \psi}{\psi}\right)}\right) \\
 (5.3) \qquad &= -\frac{b}{|\psi|^2} \operatorname{Im}\left(\bar{\psi} \left(1 + O\left(\frac{\ln \psi}{\psi}\right)\right)\right).
 \end{aligned}$$

Agora, se  $\sigma(t)$  é uma trajetória  $X$  então

$$\begin{aligned}
 |\ln |y(t)| - \ln |y(0)|| &= \left| \int_0^t (\ln |y| \circ \sigma(s))' ds \right| \\
 &= \left| \int_0^t \operatorname{Re}(X)(\ln |y|) \circ \sigma(s) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^t \operatorname{Re}(X(\ln y)) \circ \sigma(s) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^t \operatorname{Re}\left(\lambda_2 \frac{\gamma(s)}{1-C\gamma(s)}\right) ds \right| \\
 &= \left| \int_0^t -\frac{b}{|\psi|^2} \operatorname{Im}(\bar{\psi}) \circ \gamma(s) ds \right| + \left| \int_0^t -\frac{b}{|\psi|^2} \operatorname{Im}\left(\bar{\psi} O\left(\frac{\log \psi}{\psi}\right)\right) \circ \gamma(s) ds \right| \\
 (5.4) \qquad &= A(t) + B(t).
 \end{aligned}$$

Fixemos  $R > 0$  tal que o polidisco  $D_R(0, 0) \subset W$ . Existe  $r > 0$  tal que  $re^R < R/2$ . Vamos escolher uma trajetória  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$  para  $X$  com que

1.  $|x(0)|, |y(0)| < r$  e  $x(0)^p y(0)^q \in \Delta$ ;
2.  $|b \operatorname{Im}(\bar{\psi}(\gamma(0)))| < R/2$ ;
3.  $\frac{|b|}{|\psi|^{0.5}} \operatorname{Im}\left(\bar{\psi} O\left(\frac{\log \psi}{\psi}\right)\right) \circ \gamma(s) < R/4$ .

Como  $\text{Im}(\bar{\psi})$  é constante ao longo de  $\gamma$ , segue de 1. e 2. que

$$A(t) \leq \frac{R}{2} \int_0^t \frac{1}{|\psi(\gamma(0)) + s|^2} ds \leq \frac{R}{2} \int_0^t \frac{1}{(1+s)^2} ds = \frac{R}{2} \left( -\frac{1}{1+t} + 1 \right) < \frac{R}{2},$$

onde a segunda desigualdade segue do fato que  $\text{Re}(\psi(\gamma(0))) > 1$  e portanto

$$|\psi(\gamma(0)) + s| > |\text{Re}(\psi(\gamma(0)) + s)| > 1 + s \quad \text{se } s > 0.$$

Adicionalmente, usando 3. tem-se

$$B(t) \leq \frac{R}{4} \int_0^t \frac{1}{|\psi(\gamma(0)) + s|^{1,5}} ds < \frac{R}{4} \int_0^t \frac{1}{(1+s)^{1,5}} ds = \frac{R}{4} \left( -\frac{2}{(1+t)^{1/2}} + 2 \right) < \frac{R}{2}$$

Substituindo em (5.4), temos

$$|y(t)| \leq |y(0)|e^R < \frac{R}{2}.$$

Portanto a solução  $\sigma(t)$  está definida para todo  $t \geq 0$ , sendo portanto não fechada.

## 5.5 Formas normais e propriedades de órbitas finitas

Seguindo o espírito da seção anterior, pretendemos agora estudar a propriedade de órbitas finitas para fluxos de campos da forma  $X = x^p y^q u(x, y) (\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$ ,  $u(0, 0) \neq 0$ , em função de  $p, q \in \mathbb{N}_0$  e  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ . A ferramenta chave usada aqui será a mudança de Teyssier (ver [Tey04]) para passar de  $u$  para uma função mais simples, com a qual sabemos trabalhar.

Seja  $X(x, y)$  um campo singular na origem e denotemos o seu fluxo por  $\phi^t(x, y)$ . Dada uma série formal  $f(x, y)$  com  $f(0, 0) = 0$ , Teyssier ([Tey04], p. 173) mostra que o objeto  $\psi(x, y) = \phi^{f(x, y)}(x, y)$  define uma mudança de coordenadas formal na origem tal que

$$(5.5) \quad \psi^* X = \frac{1}{1 + X(f)} X.$$

Note que se  $f(x, y)$  é holomorfa então  $\psi(x, y)$  também é holomorfa e a conjugação dada acima é analítica. Como  $\frac{1}{1+X(f)}$  vale 1 na origem, vemos essa conjugação não

mexe na parte linear. Podemos usar essa ferramenta para reduzir um campo a uma forma mais simples. Vejamos um exemplo de como isso pode ser feito.

**Lema 5.4.** *Seja  $X = u(x, y)(\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  um campo de vetores com  $\lambda_2 \neq 0$  e  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ . Então  $X$  é linearizável.*

*Demonstração.* Note que  $X$  é linearizável se e somente se  $u(0, 0)^{-1}X$  é linearizável. Assim, podemos supor que  $u(0, 0) = 1$ . Seja  $X_0 := \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$  e seja  $\phi^t(x, y)$  o fluxo de  $X$ . Vamos construir a conjugação da forma  $\psi = \phi^f(x, y)$  onde  $f$  é uma função a determinar. Usando a identidade de Teyssier (5.5) vemos que a equação  $\psi^*(X) = X_0$  é equivalente à seguinte:

$$(5.6) \quad X_0(f) = \frac{u-1}{u} =: g$$

Substituindo  $f = \sum_{m+n \geq 1} f_{m,n} x^m y^n$  em (5.6), obtemos  $f_{m,n} = (m\lambda_1 + n\lambda_2)^{-1} g_{m,n}$ . Como  $g$  é holomorfa e  $|(m\lambda_1 + n\lambda_2)^{-1}|$  admite uma cota superior uniforme (pois  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ ), temos que  $f$  é holomorfa e  $\psi$  é uma conjugação holomorfa em alguma vizinhança de  $(0, 0)$  com  $\psi^*X = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$ . □

Gostaríamos de usar a identidade de Teyssier para estudar formas normais nilpotentes  $X = x^p y^q u(\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  e a seguir estudar a propriedades de órbitas finitas. Note que, na tentativa de conjugar  $X$  com um campo da forma  $Y = x^q y^q v(\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  usando mudança de Teyssier, devemos resolver a equação

$$\frac{u-v}{uv} \frac{1}{x^p y^q} = X_0(f)$$

Em particular, devemos ter  $v = u + x^p y^q w(x, y)$  para garantir que o lado esquerdo da equação seja uma função holomorfa. No entanto, isso é ruim, pois nossa ferramenta para reduzir a dimensão apresentada na seção anterior funciona melhor quando  $v$  é uma função de  $x^p y^q$  como foi o caso do Teorema 5.2. Uma forma de contornar isso é buscar uma mudança do tipo Teyssier na forma  $\psi(x, y) = \phi^{\frac{f(x,y)}{x^p y^q}}(x, y)$ . Neste caso, perdemos *a priori* a convergência e a igualdade 5.5. Podemos recuperá-la em alguns casos, como é mostrado a seguir.

**Definição 5.5.** Uma *solução holomorfa maximal* de um campo  $X$  em um aberto  $U$  é uma solução  $\gamma : D_r(0) \rightarrow U$  de  $X$  que não se estende a um disco maior.

**Observação 5.3.** É fácil ver que as soluções maximais acumulam no bordo de  $U$  (i.e.  $\overline{\gamma(D)} \cap \partial U \neq \emptyset$ ).

**Lema 5.5.** *Seja  $X = x^p y^q u(x, y)(\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  um campo holomorfo com  $u(0, 0) = 1$ . Se  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é holomorfa, existem  $R, r > 0$  tais que :*

(\*) *Para todo  $(x_0, y_0) \in D_r^{**}(0, 0)^2$ . existe uma trajetória  $\gamma_0 : D_{\delta_0}(0) \rightarrow D_R(0, 0)$  de  $X$  com  $\gamma_0(0) = (x_0, y_0)$  e  $\delta_0 > \left| \frac{f(x_0, y_0)}{x_0^p y_0^q} \right|$ .*

*Demonstração.* Temos que

- $X\left(\frac{1}{x^p y^q}\right) = -(p\lambda_1 + q\lambda_2)u(x, y)$
- $X(\ln x) = x^p y^q u(x, y)\lambda_1$
- $X(\ln y) = x^p y^q u(x, y)\lambda_2$

Portanto, existem  $M, R, r > 0$  tais que

- $|X\left(\frac{1}{x^p y^q}\right)| \leq M$  em  $D_R(0, 0)$
- $|\lambda_j u| < M$  sobre  $D_R(0, 0)$ ,  $j = 1, 2$ .
- $|f|_R := \sup\{|f(x, y)|; (x, y) \in D_R(0, 0)\} \leq \frac{1}{2M}$ .
- $r < \frac{R}{2e}$ .

Afirmamos que as trajetórias holomorfas maximais em  $D_R(0, 0)$  de pontos de  $D_r(0, 0)$  satisfazem o lema. Suponhamos que isso não seja verdade. Então existe  $(x_0, y_0) \in D_r^{**}(0, 0)$  com trajetória maximal  $\gamma : D_\delta(0) \rightarrow D_R(0, 0)$ ,  $\delta \leq \left| \frac{f(x_0, y_0)}{x_0^p y_0^q} \right|$ . Notemos que

$$\left( \frac{1}{x^p y^q} \circ \gamma(t) \right)' = X \left( \frac{1}{x^p y^q} \right) \circ \gamma(t), \quad t \in D_\delta(0).$$

Segue do Teorema Fundamental do Cálculo que

$$\frac{1}{x^p y^q} \circ \gamma(t) = \frac{1}{x_0^p y_0^q} + \int_0^t X \left( \frac{1}{x^p y^q} \right) \circ \gamma(s) ds$$

Como  $\left| \int_0^t X \left( \frac{1}{x^p y^q} \right) \circ \gamma(s) ds \right| \leq |t|M \leq \left| \frac{f(x_0, y_0)}{x_0^p y_0^q} \right| M < \frac{1/2}{\left| \frac{f(x_0, y_0)}{x_0^p y_0^q} \right|}$ , segue que

$$(5.7) \quad |x^p y^q \circ \gamma(t)| \leq 2|x_0^p y_0^q|, \quad \text{se } t \in D_\delta(0).$$

---


$${}^2 D_r^{**}(0, 0) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2; 0 < |x| < r \text{ e } 0 < |y| < r\}$$

Agora vamos escrever  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ . Como  $\{x = 0\}$  é invariante por  $X$  vemos que  $\gamma_1$  não se anula no domínio simplesmente conexo  $D_\delta(0)$ ; portanto podemos definir um ramo do logaritmo  $\ln \gamma_1$  em  $D_\delta(0)$  (ver [Con78], pag. 94). Além disso,

$$(\ln \gamma_1(t))' = (\ln x \circ \gamma(t))' = X(\ln x) \circ \gamma(t).$$

Portanto

$$\ln \gamma_1(t) = \ln x_0 + \int_0^t X(\ln x) \circ \gamma(s) ds.$$

Tomando exponencial e usando as estimativas, temos

$$|\gamma_1(t)| = |x_0 e^{\int_0^t X(\ln x) \circ \gamma(s) ds}| \leq r e^{|\int_0^t X(\ln x) \circ \gamma(s) ds|} \leq r e^{\frac{(|f|_R)(2|x_0^p y_0^q|)|\lambda_1 u|_R}{|x_0^p y_0^q|}} \leq r e < \frac{R}{2}$$

para  $t \in D_\delta(0)$ . Analogamente, mostra-se que  $|\gamma_2(t)| < \frac{R}{2}$ . Mas isso é um absurdo, pois as soluções maximais deveriam acumular no bordo de  $D_R(0, 0)$ . □

**Lema 5.6.** *Seja  $X = x^p y^q u(x, y) (\lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y})$  uma forma normal e seja  $\phi^t(x, y)$  seu fluxo. Se  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  é holomorfa limitada, então o objeto  $\psi = \phi^F(x, y)$ ,  $F = \frac{f(x, y)}{x^p y^q}$ , define uma mudança de coordenadas holomorfa na origem tal que*

$$(5.8) \quad (\phi^F)^* X = \frac{X}{1 + X(F)}$$

*Demonstração.* Pelo lema anterior, o objeto  $\psi$  define uma aplicação holomorfa limitada em  $D_r^{**}(0, 0)$ . Pelas propriedades do fluxo ela satisfaz 5.8 neste conjunto (ver [Tey04]). Usando teorema de extensão analítica de Riemann, podemos estender  $\psi$  analiticamente sobre  $D_r(0, 0)$ . Por continuidade, vemos que  $\psi$  satisfaz 5.8 sobre  $D_r(0, 0)$ . □

**Teorema 5.3.** *Seja  $X = x^p y^q u(x, y) \left( x(\lambda_1 + h.o.t.) \frac{\partial}{\partial x} + y(\lambda_2 + h.o.t.) \frac{\partial}{\partial y} \right)$  um campo de vetores com  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$  e  $\lambda_1 / \lambda_2 \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{Q}_{>0}$ . Então  $X$  é conjugado a um campo da forma*

$$x^p y^q \left( \frac{1}{1 - C x^p y^q} \right) \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

onde  $C$  é uma constante. Em particular, se  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ , então

(i)  $X$  não possui trajetórias reais periódicas em nenhuma vizinhança suficiente-

mente pequena de  $(0, 0)$ .

(ii) Se  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$  então  $X \in TF$ , ou equivalentemente  $X \in OF$ .

(iii) Se  $X \in TF$  então  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separadas por  $r$ .

*Demonstração.* Como  $x = 0$  e  $y = 0$  são invariantes pelo saturado, a folheação pode ser linearizada com uma conjugação que envia cada eixo sobre ele próprio pelo teorema de linearização de Poincaré. Assim, podemos supor  $hot = 0$ . Ponha  $X_0 = \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y}$ . Nosso objetivo é encontrar uma função holomorfa  $f(x, y)$  tal que  $\psi(x, y) = \phi^{\frac{f(x,y)}{x^p y^q}}(x, y)$  satisfaça

$$\psi^*(X) = x^p y^q \left( \frac{1}{1 - C x^p y^q} \right) X_0$$

Usando o lema anterior, temos que para qualquer germe  $v(x, y)$  de função holomorfa na origem temos, a igualdade  $x^p y^q v X_0 = \psi^*(X)$  é equivalente a

$$g := \frac{1}{v} - \frac{1}{u} = \sum_{m,n} f_{m,n} ((m-p)\lambda_1 + (n-q)\lambda_2) x^m y^n.$$

Agora ponhamos  $v = \frac{1}{1 - C x^p y^q}$  com  $-C$  sendo o cociente de  $x^p y^q$  no desenvolvimento de  $\frac{1}{u}$ . Definamos

$$f_{p,q} = 0 \text{ e } f_{m,n} = \frac{g_{m,n}}{(m-p)\lambda_1 + (n-q)\lambda_2}.$$

As condições sobre os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  garantem que 0 não pertence ao fecho do conjunto cujos elementos têm a forma  $(m-p)\lambda_1 + (n-q)\lambda_2$  com  $(m, n) \neq (p, q)$ . Portanto  $f$  é convergente e  $\psi$  conjugua  $X$  com  $x^p y^q \left( \frac{1}{1 - C x^p y^q} \right) X_0$ . Os itens (i), (ii) e (iii) seguem agora do teorema 5.2.  $\square$

## Capítulo 6

# Folheações não integráveis em $(\mathbb{C}^3, 0)$ com holonomia de órbitas finitas

Uma folheação de dimensão um em  $(\mathbb{C}^n, 0)$  pode ser entendida como um campo de vetores singular  $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{C}^n, 0)$ . Diremos que  $X$  é integrável se  $X$  possui uma integral primeira holomorfa não trivial, isto é, se existe uma função holomorfa não constante  $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  tal que  $f$  é constante ao longo das folhas de  $X$ . Esta última afirmação é equivalente a  $X(f) = 0$ .

Um resultado clássico sobre a existência de integrais primeiras para folheações em dimensão 2 é o teorema de Mattei e Moussu que diz o seguinte:

**Teorema 6.1.** [MM80] *Seja  $U$  uma vizinhança de  $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$  e  $\mathcal{F}$  uma folheação em  $U$  com singularidade isolada na origem. Então  $\mathcal{F}$  admite uma integral primeira holomorfa  $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$  se e somente se as seguintes condições são satisfeitas:*

1.  $\mathcal{F}$  possui apenas finitas folhas acumulando na origem e
2. As folhas de  $\mathcal{F}$  são fechadas em  $U \setminus \{(0, 0)\}$ .

Uma questão levantada em [CS09] é a de decidir se uma folheação  $\mathcal{F}$  em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  possuindo holonomia finita com respeito a uma curva invariante sempre possuiria duas integrais primeiras independentes. Eles mostram que no caso de uma singularidade do tipo Siegel com a holonomia tendo o ponto base como ponto fixo isolado existem. Esperava-se que o mesmo valeria se a holonomia não tivesse um ponto fixo isolado (ver revisões de Genzmer e Abate). No entanto, Rebelo e

Reis mostraram em [RR15] isso não era verdade, fornecendo um contra-exemplo possuindo uma única integral primeira.

**Teorema 6.2** ([RR15]). *Seja  $\mathcal{F}$  a folheação em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  gerada pelo campo*

$$X = x(1 + x^2yz^3) \frac{\partial}{\partial x} + y(1 - x^2yz^3) \frac{\partial}{\partial y} - z \frac{\partial}{\partial z},$$

*a qual possui uma singularidade do tipo Siegel na origem. Esta folheação não possui duas integrais primeiras holomorfas independentes, embora possui uma integral primeira holomorfa não constante  $xyz^2$ . Além disso, a aplicação de holonomia associada com o eixo  $\{x = 0 = y\}$  possui órbitas finitas, mas não é periódica.*

Neste capítulo, forneceremos muitos exemplos de folheações em dimensão 3 que não admitem nenhuma integral primeira holomorfa. Estas folheações podem ser construídas com singularidade do tipo Siegel e o tipo sela-nó de codimensão 2.

## 6.1 Holonomia

Nesta seção vamos relembrar algumas fatos a respeito da holonomia de uma folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão 1 em  $(\mathbb{C}^3, 0)$ . Para maiores detalhes, consultar [LNS97].

Seja  $\mathcal{F}$  a folheação de dimensão 1 em  $(\mathbb{C}^3, 0)$  gerada pelo campo holomorfo

$$X = A(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + B(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + C(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}.$$

Suponhamos que  $S = \{x = 0 = y\}$  é uma separatriz de  $X$  e que  $C(0, 0, z) = 0$  se e somente se  $z = 0$ . Por simplicidade, vamos considerar a holonomia definida na seção transversal  $z = 1$ . Seja  $\gamma(t)$  o caminho em  $S$  dado por  $\gamma(t) = (0, 0, e^{2\pi it})$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Se  $p = (x_0, y_0, 1)$  é um ponto da transversal  $z = 1$  próximo do ponto  $(0, 0, 1)$ , podemos tomar o levantamento  $\tilde{\gamma}(t) = (x(t), y(t), e^{2\pi it})$  de  $\gamma$  na folha passando por  $p$  de modo que a holonomia é definida por  $H(x_0, y_0) = (x, y) \circ \tilde{\gamma}(1)$ , e pode ser interpretada como o fluxo em tempo 1 associada com a equação diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dx dz}{dz dt} = \frac{A(x, y, e^{2\pi it})}{C(x, y, e^{2\pi it})} 2\pi i e^{2\pi it} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dy dz}{dz dt} = \frac{B(x, y, e^{2\pi it})}{C(x, y, e^{2\pi it})} 2\pi i e^{2\pi it} \end{aligned}$$



Note que se  $C = -2\pi iz$ , então a holonomia satisfaz

$$(H(x, y), 1) = (x, y) \circ \exp(-X)(x, y, 1).$$

Com efeito, temos que

$$\tilde{\gamma}'(t) = (x'(t), y'(t), 2\pi i e^{2\pi i t}) = (-A(x, y, e^{2\pi i t}), -B(x, y, e^{2\pi i t}), 2\pi i e^{2\pi i t}) = -X(\tilde{\gamma}(t)).$$

Logo  $\tilde{\gamma}$  é uma solução de  $-X$  e o fluxo em tempo 1 de  $-X$  é  $\tilde{\gamma}(1)$ .

## 6.2 Campos não integráveis com holonomia de órbitas finitas

Lembramos que se dois campos de vetores  $X$  e  $Y$  comutam ( $[X, Y] = 0$ ), então  $\exp(X + Y) = \exp(X) \circ \exp(Y)$ . Além disso, temos o seguinte:

**Lema 6.1.** *Sejam  $\lambda_j \in \mathbb{C}$  e  $p_j \in \mathbb{N}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , temos*

$$\left[ \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \lambda_n x_n \frac{\partial}{\partial x_n}, x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0 \Leftrightarrow p_1 \lambda_1 + \dots + p_n \lambda_n = \lambda_j.$$

*Demonstração.* Fixemos  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$  e ponhamos

$$\begin{aligned} \langle p, \lambda \rangle &= p_1 \lambda_1 + \dots + p_n \lambda_n \\ x^p &= x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n} \\ S &= \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \frac{\partial}{\partial x_k} \\ T &= x^p \frac{\partial}{\partial x_j}. \end{aligned}$$

Para cada  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , tem-se

$$\begin{aligned} [S, T](x_k) &= S(T(x_k)) - T(S(x_k)) \\ &= S(\delta_{k,j} x^p) - T(\lambda_k x_k) \\ &= \delta_{k,j} \langle p, \lambda \rangle x^p - \delta_{k,j} \lambda_k x^p \\ &= \delta_{k,j} (\langle p, \lambda \rangle - \lambda_k) x^p. \end{aligned}$$

Segue da última igualdade que  $[S, T] = 0 \Leftrightarrow \langle p, \lambda \rangle = \lambda_j$ .

□

Considere o campo holomorfo

$$(6.1) \quad X = (2\pi ix - \lambda_1 x^2 y z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (2\pi iy - \lambda_2 x y^2 z^2) \frac{\partial}{\partial y} - 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z},$$

onde  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$ . Podemos escrever  $X = X_S + X_N$ , onde

$$X_S := 2\pi ix \frac{\partial}{\partial x} + 2\pi iy \frac{\partial}{\partial y} - 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z}$$

é semisimples e

$$X_N := X - X_S = -\lambda_1 x^2 y z^2 \frac{\partial}{\partial x} - \lambda_2 x y^2 z^2 \frac{\partial}{\partial y}$$

é nilpotente. Além disso, segue do Lema 6.1 que  $[X_S, X_N] = 0$ . Portanto  $X = X_S + X_N$  é a decomposição semisimples/nilpotente de Jordan do campo  $X$ . Por fim, como o espectro de  $X$  na origem não contém o zero, vemos que a origem é uma singularidade isolada de  $X$ .

**Lema 6.2.** *As separatrizes de  $X$  são as retas pela origem do plano  $z = 0$  e o eixo  $z$ .*

*Demonstração.* Um cálculo direto mostra que as retas mencionadas são separatrizes de  $X$ . Vamos mostrar que são as únicas. Uma consequência da decomposição de Jordan é que toda separatriz de  $X$  é uma curva invariante de  $X_S$ . As funções  $xz$  e  $yz$  são integrais primeiras do campo  $X_S$ . Portanto, qualquer separatriz de  $X_S$  deve estar contida em  $\{xz = 0\}$  e  $\{yz = 0\}$ , ou seja, estará contida em  $\{z = 0\}$  ou  $\{x = y = 0\}$ . Portanto será uma reta pela origem ou o eixo  $\{x = y = 0\}$ . □

**Teorema 6.3.** *Se  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*$  são perpendicularmente separados por  $\lambda_1 + \lambda_2$ , então o campo*

$$X = (2\pi ix - \lambda_1 x^2 y z^2) \frac{\partial}{\partial x} + (2\pi iy - \lambda_2 x y^2 z^2) \frac{\partial}{\partial y} - 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z}$$

*é do tipo Siegel, e a holonomia  $H$  da transversal  $z = 1$  em relação à separatriz isolada  $\{x = y = 0\}$  tem a propriedade de órbitas finitas, mas  $X$  não possui integrais primeiras não constantes.*

*Demonstração.* Consideremos as funções

$$u = xz \quad \text{e} \quad v = yz.$$

Então

$$X(u) = X(xz) = -\lambda_1 u^2 v$$

e

$$X(v) = X(yz) = -\lambda_2 uv^2.$$

Procedendo como no Lema 5.3, vemos que se  $\gamma(t)$  é uma solução de  $X$ , então  $(u, v) \circ \gamma(t)$  é uma solução do campo

$$Z = -uv \left( \lambda_1 u \frac{\partial}{\partial u} + \lambda_2 v \frac{\partial}{\partial v} \right).$$

Agora, vamos definir

$$A(x, y) = x \circ \exp(-X)(x, y, 1) \quad \text{e} \quad B(x, y) = y \circ \exp(-X)(x, y, 1).$$

Então a holonomia  $H$  associada ao eixo- $z$  e definida no plano  $z = 1$  satisfaz

$$H(x, y) = (x, y) \circ \exp(-X)(x, y, 1) = (A(x, y), B(x, y)).$$

Portanto

$$H(x, y) = (A(x, y), B(x, y)) = (u, v) \circ (H(x, y), 1) = \exp(-Z)(x, y).$$

Como  $\lambda_1, \lambda_2$  são perpendicularmente separados por  $\lambda_1 + \lambda_2$ , o Teorema 5.1 garante que  $H$  tem a propriedade de órbitas finitas. Agora, vamos mostrar que  $X$  não possui integral primeira não constante. Inicialmente, notemos que  $X$  não possui integral primeira se  $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_{<0}$ . Seja  $f(x, y, z)$  um germe de integral primeira holomorfa de  $X$  e ponha  $f_1(x, y) = f(x, y, 1)$ . Então

$$f_1(x, y) = f(x, y, 1) = f(H(x, y), 1) = f(\exp(-Z)(x, y), 1) = f_1 \circ \exp(-Z)(x, y).$$

Como  $Z$  é nilpotente, segue daí que  $f_1$  é uma integral primeira de  $Z$  e a condição nos autovalores implica  $f(x, y, 1) = f_1(x, y) \equiv f(0, 0, 0)$ . De forma inteiramente análoga, podemos mostrar que  $f_z(x, y) = f(x, y, z) = f(0, 0, 0)$  para todo  $z$ . Isso conclui a demonstração.  $\square$

Finalizaremos este capítulo construindo mais uma família de folheações com holonomia de órbitas finitas em relação a uma separatriz. Isso seguirá do Teorema 5.3. A nova família é uma generalização daquela dada no Teorema 6.3; basta considerar  $p = 1, q = 1$  e  $u \equiv 1$ .

**Teorema 6.4.** *Seja*

$$X = -2\pi ix \frac{\partial}{\partial x} - 2\pi iy \frac{\partial}{\partial y} + 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z} + u(xz, yz)x^p y^q z^{p+q} \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

um germe de campo de vetores holomorfo com  $p, q \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ ,  $\lambda_1 / \lambda_2 \notin \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{Q}_{>0}$  e  $r := p\lambda_1 + q\lambda_2 \neq 0$ . Suponha que  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são perpendicularmente separados por  $r$ . Então a holonomia associada ao eixo- $z$  possui órbitas finitas.

*Demonstração.* Definamos

$$Y = u(x, y)x^p y^q \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right) + 2\pi iz \frac{\partial}{\partial z}.$$

A holonomia  $H$  da folheação induzida por  $Y$  associada ao eixo- $z$ , definida na transversal  $z = 1$  é igual a

$$H = \exp \left( u(x, y)x^p y^q \left( \lambda_1 x \frac{\partial}{\partial x} + \lambda_2 y \frac{\partial}{\partial y} \right) \right).$$

Segue do Teorema 5.3 que  $H$  tem a propriedade de órbitas finitas. Vamos mostrar que esta holonomia é conjugada à holonomia de  $X$  com relação ao eixo  $z$  na transversal  $z = 1$ . Seja  $\pi$  a explosão da origem  $0 \in \mathbb{C}^3$ . Se  $(x_1, y_1, z_1)$  são as coordenadas canônicas na terceira carta do blow-up  $(\widetilde{\mathbb{C}^3}, 0)$ , então  $x = x_1 z_1$ ,  $y = y_1 z_1$  e  $z = z_1$ . Portanto

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{z_1} \frac{\partial}{\partial y_1} \\ \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} - \frac{x_1}{z_1} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{y_1}{z_1} \frac{\partial}{\partial y_1}. \end{cases}$$

Daí, o transformado de  $Y$  pela explosão da origem é igual a

$$\tilde{Y} = u(x_1 z_1, y_1 z_1)x_1^p y_1^q z_1^{p+q} \left( \lambda_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \lambda_2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \right) + 2\pi i \left( -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \right)$$

Note que  $X = \tilde{Y}$ . Seja  $\gamma(t) = (0, 0, e^{2\pi it})$  nas coordenadas  $(x, y, z)$ . A holonomia de  $Y$  ao longo do caminho  $\gamma$  é analiticamente conjugada à holonomia de  $\tilde{Y}$  ao longo do transformado  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ , uma vez que  $\gamma$  não contém o centro da explosão na sua imagem e a explosão  $\pi$  da origem define um biholomorfismo  $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^3 \setminus \pi^{-1}(0, 0) \rightarrow \mathbb{C}^3 \setminus \{(0, 0)\}$ . Como  $x_1 = \frac{x}{z}, y_1 = \frac{y}{z}$  e  $z_1 = z$  temos

$$\tilde{\gamma}(t) = \left( \frac{0}{e^{2\pi it}}, \frac{0}{e^{2\pi it}}, e^{2\pi it} \right) = (0, 0, e^{2\pi it}).$$

Logo, as holonomias de  $Y$  e  $X$  associadas ao eixo- $z$  na transversal  $z = 1$  são analiticamente conjugadas, o que implica que a holonomia associada ao eixo- $z$  para o campo  $X$  tem órbitas finitas.

□

# Bibliografia

- [BM88] Edward Bierstone and Pierre D. Milman. Semianalytic and subanalytic sets. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 67:5–42, 1988.
- [Bre] G. E. Bredon. *Geometry and Topology*.
- [CCD13] Dominique Cerveau, Felipe Cano, and Julie Déserti. *Théorie élémentaire des feuilletages holomorphes singuliers*. Collection Echelles. Berlin, 2013.
- [Con78] John B. Conway. *Functions of one complex variable*, volume 11 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, second edition, 1978.
- [CS82] César Camacho and Paulo Sad. Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields. *Ann. of Math. (2)*, 115(3):579–595, 1982.
- [CS87] César Camacho and Paulo Sad. *Pontos singulares de equações diferenciais analíticas*. 16º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [CS09] Leonardo Câmara and Bruno Scárdua. On the integrability of holomorphic vector fields. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 25(2):481–493, 2009.
- [CS17] Leonardo Câmara and Bruno Scárdua. Periodic complex map germs and foliations. *An. Acad. Bras. Ciênc.*, 89(4):2563–2579, 2017.
- [Ebe07] Wolfgang Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*. *Transl. from the German by Philip G. Spain*. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS), 2007.
- [Eng89] Ryszard Engelking. *General topology*, volume 6 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

- [Hen99] J Henrikson. Completeness and total boundedness of the hausdorff metric. *MIT Undergraduate Journal of Mathematics*, 1:69–79, 01 1999.
- [IY08] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [LHS15] Lopez-Hernanz-Sanz. Parabolic curves of diffeomorphisms asymptotic to formal invariant curves. 2015.
- [LNS97] A. Lins Neto and B. Scárdua. *Folheações algébricas complexas*. 21° Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, Rio de Janeiro, 1997.
- [Loj64] S. Lojasiewicz. Triangulation of semi-analytic sets. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Ser. 3, 18(4):449–474, 1964.
- [Lor06] Frank Loray. Pseudo-groupe d’une singularité de feuilletage holomorphe en dimension deux. 01 2006.
- [LRRS17] Lorena López-Hernanz, Jasmin Raissy, Javier Ribón, and Fernando Sanz-Sánchez. Stable manifolds of two-dimensional biholomorphisms asymptotic to formal curves. *arXiv e-prints.*, page arXiv:1710.03728, Oct 2017.
- [Mar81] Jean Martinet. Normalisation des champs de vecteurs holomorphes. In *Séminaire Bourbaki : vol. 1980/81, exposés 561-578*, number 23 in Séminaire Bourbaki, pages 55–70. Springer-Verlag, 1981. talk:564.
- [Mil06] John Milnor. *Dynamics in one complex variable. 3rd ed.*, volume 160. Princeton, NJ: Princeton University Press, 3rd ed. edition, 2006.
- [MM80] J.-F. Mattei and R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(4):469–523, 1980.
- [Mun00] James R. Munkres. *Topology. 2nd ed.* Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2nd ed. edition, 2000.
- [PM97] Ricardo Pérez-Marco. Fixed points and circle maps. *Acta Math.*, 179(2):243–294, 1997.

- [Rib05] Javier Ribón. Families of diffeomorphisms without periodic curves. *Mich. Math. J.*, 53(2):243–256, 2005.
- [Rib15] J. Ribón. Algebraic properties of groups of complex analytic local diffeomorphisms. In *VIII Escuela Doctoral Intercontinental de Matemáticas PUCP - UVA*, pages 185–230, 2015.
- [RR15] Julio C. Rebelo and Helena Reis. A note on integrability and finite orbits for subgroups of  $\text{Diff}(\mathbb{C}^n, 0)$ . *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 46(3):469–490, 2015.
- [Rud76] Walter Rudin. Principles of mathematical analysis. 3rd ed. International Series in Pure and Applied Mathematics. Düsseldorf etc.: McGraw-Hill Book Company. X, 342 p. DM 47.80 (1976)., 1976.
- [Rue89] David Ruelle. *Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory*. Boston, MA etc.: Academic Press, Inc., 1989.
- [Tey04] Loïc Teyssier. Équation homologique et cycles asymptotiques d’une singularité nœud-col. *Bull. Sci. Math.*, 128(3):167–187, 2004.