

IME-UFF

ESTUDANDO EMPARELHAMENTOS E COMBATENDO INCÊNDIOS: EM
BUSCA DE NOVOS LIMITES EM TEORIA DOS GRAFOS

Vitor Costa Silva

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadores: Simone Dantas de Souza

Dieter Rautenbach

Niterói

Março de 2015

ESTUDANDO EMPARELHAMENTOS E COMBATENDO INCÊNDIOS: EM
BUSCA DE NOVOS LIMITES EM TEORIA DOS GRAFOS

Vitor Costa Silva

Tese submetida ao corpo docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, IME-UFF, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em matemática.

Examinada por:

Prof^a. Simone Dantas de Souza, D.Sc.
(Universidade Federal Fluminense) Orientador

Prof. Dieter Rautenbach, Ph.D.
(Universidade de Ulm) Co-orientador

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.
(Universidade Federal do Rio de Janeiro)

Prof. Danilo Artigas da Rocha, D.Sc.
(Universidade Federal Fluminense)

Prof. Vinícius Gusmão Pereira de Sá, D.Sc.
(Universidade Federal do Rio de Janeiro)

NITERÓI, RJ – BRASIL

MARÇO DE 2015

Costa Silva, Vitor

Estudando Emparelhamentos e Combatendo Incêndios:
Em Busca de Novos Limites em Teoria dos Grafos/Vitor
Costa Silva. – Niterói: IME-UFF, 2015.

IX, 73 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Simone Dantas de Souza

Dieter Rautenbach

Tese de doutorado – Combinatória – Programa de Pós-
graduação em Matemática, IME-UFF, 2015.

Referências Bibliográficas: p. 69 – 73.

1. Emparelhamento em grafos. 2. Grafos regulares.
3. Jogo firefighter. 4. Taxa de sobrevivência. I. Dantas de Souza, Simone *et al.* II. Universidade Federal Fluminense, IME, Programa de Pós-graduação em Matemática.
- III. Título.

*Dedicado ao meu querido irmão
Leonardo (in memoriam)*

Agradecimentos

A Deus, sem a intervenção Dele em minha vida eu não teria concluído este desafio.

À Débora, por todo amor, carinho, dedicação, compreensão e paciência à mim destinados ao longo desses anos que estamos juntos. Amo-te! Aos meus pais, Francisco e Naideci, e minha avó Adália por terem me dado a estrutura de uma família e por estarem sempre acreditando em mim, e me incentivando em todos os momentos da minha vida. Tenho certeza que sem essa estrutura e incentivo eu não teria êxito. Ao meu irmão Arthur, você é o meu maior e verdadeiro amigo, amo você! Aos meus familiares, todos vocês contribuíram para a formação da minha ética e do meu caráter. Ao Amendoim, Dendê e Melchizedek, meus bichanos, ajudaram muito a me distrair em momentos que eu estava muito estressado.

Aos meus amigos e companheiros de graduação: Flavio, Leandro, Manuel, Rômulo; de mestrado: Daniel, Fausto e de doutorado: André, Fernanda e Mauro. Valeu pelos materiais/livros emprestados, cópias de aulas e troca de exercícios. Aos amigos que fiz na UFF: André, Flavio, Mauro e Romulo obrigado pelas trocas de ideias ao longo desses anos, dos bate-papos no McCafé depois do almoço e pelos *happy hours* nas sextas-feiras. Aos amigos e companheiros do grupo da professora Simone. Aimée, José, Poly e Thiago, foi muito legal ter/prestar ajuda de/à vocês nos trabalhos.

Aos meus orientadores Simone Dantas e Dieter Rautenbach, a todos os professores da UFF e a todos que passaram pela minha vida estudantil, em particular ao professor Juan Limaco pela boa formação que me deu em análise, minha segunda área. Também aos professores de outras instituições que eu tive contato, em especial aos professores Mitre Dourado, Lucia Penso. Vocês contribuíram muito para o meu crescimento como matemático e como pessoa. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada ao IME-UFF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDANDO EMPARELHAMENTOS E COMBATENDO INCÊNDIOS: EM
BUSCA DE NOVOS LIMITES EM TEORIA DOS GRAFOS

Vitor Costa Silva

Março/2015

Orientadores: Simone Dantas de Souza, Dieter Rautenbach

Esta tese está dividida em duas partes. Inicialmente trabalhamos com problemas relacionados a emparelhamento em grafos. Petersen provou que todo grafo sem pontes 3-regular tem um emparelhamento perfeito. Motivados por este resultado, vários autores estabeleceram limites inferiores para o número de emparelhamento de um grafo de acordo com condições de grau e de cintura. Em 2012, Henning et al. mostraram um limitante inferior para grafos 3-regulares conexos. Estendemos este resultado através de limites inferiores para o número de emparelhamento de grafos d -regulares e cintura g , com d, g ímpares. Provamos que este limite é justo para muitos valores de d e g . Além disso, caracterizamos os grafos extremais para $d = g = 5$. Na segunda parte estudamos o jogo *firefighter*. O modelo do jogo *firefighter* de Hartnell tem como objetivo conter a propagação de uma propriedade indesejada dentro de uma rede. Na versão utilizada nesta tese, o jogador joga em rodadas, em um grafo G no qual f vértices são incendiados antes do início do jogo. A cada rodada o fogo se espalha para vértices vizinhos que não foram defendidos em rodadas anteriores. A ação do jogador é limitada à defesa de no máximo d vértices adicionais a cada rodada. O objetivo é salvar o maior número possível de vértices. Alguns resultados se concentram também em obter a média de vértices salvos, tecnicamente chamada de taxa de sobrevivência $\rho(G, F; d)$. A maioria das pesquisas trata o caso $f = d = 1$, que foi provado ser um problema difícil restrito a árvores. Estudamos o jogo para valores de f e d grandes. Apresentamos propriedades de estratégias ótimas em árvores, algoritmos aproximativos, e limites inferiores para taxa de sobrevivência.

Abstract of Thesis presented to IME-UFF as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

STUDYING MATCHINGS AND FIGHTING FIRES: IN THE SEARCH
OF NEW LIMITS ON GRAPH THEORY

Vitor Costa Silva

March/2015

Advisors: Simone Dantas de Souza, Dieter Rautenbach

This thesis is divided in two parts. First, we work on issues related to matching on graphs. Petersen proved that every 3-regular bridgeless graph has a perfect matching. Motivated by this result, several authors established lower bounds on the matching number of a graph subject to degree and girth conditions. In 2012, Henning et al. showed a lower bound for connected 3-regular graphs. We extend their result by establishing lower bounds on the matching number of graphs of given odd regularity d and odd girth g . We proved that these bounds is sharp for many values of d and g . Furthermore, we characterize all extremal graphs for $d = g = 5$. In the second part, we study the *firefighter* game. Hartnell's *firefighter* game models the containment of the spreading of an undesired property within a network. In the version used in this thesis, a one-player game played in rounds on a graph G in which a fire breaks out at f vertices before the beginning of the game. In each round the fire spreads to neighboring vertices which have not defended in previous rounds. The power of the player is limited in the sense that he can defend at most d additional vertices in each round. The objective is to save as many vertices as possible from burning. Some results focus on the average proportion of saved vertices, this average is technically called the surviving rate $\rho(G, f; d)$. Most research on this game concerned the case $f = d = 1$, which already leads to hard problem even restricted to trees. We study the game for larger values of f and d . We present properties of optimal strategies for the game on trees, approximation algorithms, and bounds on the surviving rate.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Contribuições	5
1.3 Organização da tese	7
2 Teoria dos grafos	10
2.1 Definições básicas	10
2.2 Emparelhamento	13
3 Emparelhamento	15
3.1 Limites inferiores para $\alpha'(G)$	15
3.2 Propriedades dos grafos $(2r + 1, t, g)$ -extremais	25
3.3 Estrutura dos grafos $(5, 3, g)$ -extremais	28
4 Jogo Firefighter	33
4.1 Firefighter: regras e terminologias	33
4.2 Firefighter: problemas de decisão e otimização	35
4.3 Propriedades das estratégias ótimas	36
4.4 Aproximação para árvores com f e d fixados	40
4.5 Taxa de sobrevivência em árvores	51
4.6 Estendendo o caso tratável de Finbow et al.	58
5 Conclusões	66
5.1 Principais contribuições desta tese	66
5.2 Trabalhos futuros	67

Lista de Figuras

3.1	Os dois grafos $(5, 1, 5)$ -extremais.	23
3.2	Esquema estrutural da árvore T , onde S está no primeiro nível, X no segundo e R no terceiro.	23
3.3	Grafo G com a cardinalidade dos conjuntos B_2, B_4, \dots, B_{g-1}	26
3.4	Grafo G com a cardinalidade dos conjuntos B_1, B_3, \dots, B_{g-2}	26
3.5	Exemplo do item (i): $G(1, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 1)$ e $g = 9$	29
3.6	Exemplo do item (ii): $G(1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 1, 4, 4, 1)$, $g = 13$ e $r = 2$	29
3.7	Exemplo do item (iii): $G(1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 1, 4, 4, 1, 3, 4, 2)$, $g = 17$, $r = 2$ e $s = 3$	29
4.1	Jogo <i>firefighter</i> com instância $(G, \{v\})$, onde G é o grafo de Petersen e o jogador defende no máximo 1 vértice por rodada. Representamos os vértices definidos com um ciclo em torno do mesmo e representamos os vértices queimados com a cor preta.	34
4.2	Se os graus de v_3 e v_7 são suficientemente grandes, então para uma instância $(T, \{v_1, v_5, v_9\})$ do MAX 3-1-FIREFIGHTER, uma estratégia ótima defende v_3 e v_7 nas duas primeiras rodadas, ou seja, quando o primeiro vértice é defendido, ele não tem um vizinho que foi queimado na rodada anterior.	36
4.3	Para a árvore T , $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $d = 1$, uma suposição razoável seria $\mathcal{D} = (\{d_1\}, \{d_2\}, \emptyset, \dots, \emptyset)$, ou seja, σ defende apenas d_1 e d_2 nas duas primeiras rodadas. Temos $T_F = T - \{u_1, \dots, u_6\}$ e σ salva exatamente 3 vértices de T_F . $L_1 = \{u_6\}$, $L_2 = \{u_3, u_5\}$ e $L_3 = \{u_1, u_4\}$. O único par de vértices relacionados por \preceq é u_3, u_4 com $u_3 \preceq u_4$. O vértice u_2 não pertence a L	43

4.4 Esquema do caminho P usado na demonstração do Teorema 17 na argumentação do item **(ii.)**, onde $1 \leq i \leq f$. Note, se $i = f$, o vértice defendido é exatamente o vértice que está $3f - 1$ distante de $p(u, F)$. 55

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo apresentamos uma visão geral desta tese. Aqui há breves descrições dos fatos que motivaram o trabalho, os nossos principais objetivos e as contribuições centrais. Este trabalho aborda dois temas amplamente estudados na área de teoria dos grafos: emparelhamento e o jogo *firefighter*. No entanto, estes tópicos não estão restritos somente à pesquisa teórica, eles tem uma ampla aplicabilidade em áreas afins, como mostraremos a seguir.

1.1 Motivação

A químico-matemática é uma área de pesquisa que busca novas aplicações matemáticas na química e se concentra principalmente na busca de modelos matemáticos para descrever fenômenos químicos [32]. Um dos ramos da químico-matemática é a aplicação do tópico *emparelhamento* da teoria dos grafos. Por exemplo, o Índice de Hosoya, que expõe várias propriedades físico-químicas para hidrocarbonetos, é obtida através do cálculo do polinômio de emparelhamento¹ de um grafo molecular². Outro exemplo, a Estrutura de Kekulé, que obtém algumas aplicações relacionadas a estabilidade de compostos químicos [3], é um *emparelhamento perfeito* na representação do grafo molecular do composto químico.

Mas o que é emparelhamento? Dado um grafo G , um conjunto de arestas M é

¹Dado um grafo G de ordem n , seja $m(G, k) = \#\{M \mid M \text{ emparelhamento com } k \text{ arestas}\}$. O *polinômio de emparelhamento* de G é definido por $Ma(G, x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k m(G, k) x^{n-2k}$ [6].

²Um *grafo molecular* é a representação da forma estrutural de um composto químico [6].

dito *emparelhamento*, se quaisquer duas arestas de M não compartilham vértices. Petersen publicou seu primeiro trabalho [47] que continha resultados explícitos de teoria dos grafos em 1891 (emparelhamento em grafos [40]). Este trabalho atraiu uma forte atenção sobre este tópico, culminando em contribuições como: a existência de emparelhamentos perfeitos em grafos bipartidos d -regulares de König [39], em 1916 e a caracterização de grafos com emparelhamento perfeito de Tutte [49], em 1947. Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento com $n/2$ arestas onde n é um inteiro positivo par e é o número de vértices do grafo.

Petersen [47] mostrou que todos os grafos 3-regulares sem pontes possuem emparelhamento perfeito.

Outra forma bastante abordada é a implementação de algoritmos que exibem emparelhamentos máximos ou perfeitos em grafos. Um dos primeiros trabalhos com este tipo de abordagem foi o algoritmo de emparelhamento máximo de Edmonds [26] em 1965. Atualmente, os algoritmos mais eficientes para exibir um emparelhamento máximo em um grafo com m aresta e n vértice são da ordem $O(\sqrt{nm})$, tanto em grafos bipartidos [36], quanto em grafos mais gerais [42]. Um emparelhamento perfeito pode ser encontrado de modo eficiente em grafos 3-regulares sem pontes e, também, em grafos bipartidos d -regulares [4, 12, 48].

Motivados por estes resultados e pelo fato de haver poucos trabalhos sobre o tema, vários autores procuraram estabelecer limites inferiores para o número de emparelhamento³ de um grafo para classes cada vez mais abrangentes. Tutte [50] mostrou que todo grafo G planar triangularizável 4-conexo⁴ tem um emparelhamento do tamanho $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Um grafo G é dito planar se é possível fazer um desenho que o represente de modo que nenhuma das arestas de G fiquem sobrepostas. Um grafo planar G é dito ser *triangularizável* (também chamado planar máximo) se a adição de uma aresta em G resulta em um grafo não planar. Nishizeki e Baybars [43] apresentaram limites inferiores para grafos planares em função do grau mínimo e da conectividade. Para ser mais preciso, eles mostraram que qualquer grafo planar 3-conexo, com n vértices, tem um emparelhamento com pelo menos $\frac{1}{3}(n+4)$ arestas,

³Dado um grafo G , o *número de emparelhamento* de G é definido como a maior cardinalidade de um emparelhamento. O número de emparelhamento de um grafo G é denotado por $\alpha'(G)$.

⁴Um grafo G com mais de k vértices é dito ser k -conexo se ao retirar menos que k vértices de G , o grafo remanescente permanece conexo.

para $n \geq 22$. Biedl et al. [5] provaram um limite inferior bem justo para o número de emparelhamento de um grafo 3-regular, resultado este que foi estendido por Henning e Yeo [35] para grafos $(2r + 1)$ -regular conexos com r natural. Suil O e West [45] deram uma demonstração simples para esses limites e caracterizaram todos os grafos extremais (grafos cuja cardinalidade do emparelhamento máximo é exatamente igual ao valor do limite inferior obtido para o número de emparelhamento). Além disso, trabalhos recentes mostram limites inferiores para o número de emparelhamento de grafos regulares utilizando condições sobre a conectividade das arestas ou dos autovalores [11, 44, 46]. Flaxman e Hoory [30] provaram um limite inferior para o número de emparelhamento de um grafo regular dada uma cintura do grafo (*cintura* de um grafo G é o menor comprimento de ciclo de G ou ∞ se o grafo é uma floresta).

Henning et al. [34] provaram

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n(G) - \frac{n(G) + 2}{3 \left(\lceil \frac{3}{4}(g-1) \rceil + 1 \right)} \right) \quad (1.1)$$

para um grafo 3-regular conexo G com número de vértices $n(G)$ e cintura ímpar pelo menos g (*cintura ímpar* é menor comprimento de um ciclo ímpar de um grafo e ∞ se o grafo é bipartido), e caracterizaram todos os grafos extremais. Além disso, o limite inferior de (1.1) é justo para cada inteiro g ímpar.

Na segunda parte desta tese, estudamos o jogo *firefighter*. Este jogo pode ser utilizado como uma forma de impedir que uma propriedade indesejada se espalhe em uma rede. Modelos epidemiológicos assumem que indivíduos de uma população estudada estão em contato com vários outros indivíduos, de modo que, qualquer par de indivíduos são propensos a contrair e/ou transmitir doenças um ao outro. A teoria dos grafos é ideal para modelar essas relações de contatos entre as pessoas, onde os vértices de um grafo representam os indivíduos e arestas representam o potencial de transmissão de doenças entre dois ou mais indivíduos. O jogo *firefighter* é um modelo de jogo combinatório em grafos que simula tal situação, bem como situações de incêndio em cidades, vírus de computadores propagados na web, etc. Basicamente o jogo transmite a ideia de que o fogo está se propagando em um grafo. Esta propagação transcorre em rodadas. A cada rodada, o jogador defende vértices que não foram queimados e, em seguida, o fogo se propaga para novos vértices que não foram queimados nem defendidos e estão relacionados com vértices queimados. O

objetivo é conter a propagação do fogo através de defesas em vértices estratégicos ao longo do grafo. Como o jogo tenta simular situações viáveis para a aplicabilidade em representações reais, o número de defesas feitas pelo jogador é limitada por rodada. Este problema tem sido fortemente estudado na última década, porém, a maioria das pesquisas se concentram na simulação em que o fogo é iniciado em apenas um vértice. Assim como o jogador também defende apenas um vértice por rodada. Embora essa simulação seja bem restrita, é sabido que a complexidade deste jogo é difícil mesmos em grafos com uma estrutura bem particular tais como as árvores.

No 25º Manitoba Conference on Combinatorial Mathematics and Computing na Universidade de Manitoba em Winnipeg no ano de 1995, Hartnell introduziu o modelo de jogo *firefighter*. O jogo *firefighter* consiste em um único jogador conter a propagação de uma propriedade indesejada em uma rede. Antes do início da partida há f vértices *queimados* no grafo G . O jogo *firefighter* é jogado em rodadas. A cada rodada o fogo se espalha por vértices que tem pelo menos um vizinho queimado e não foi defendido pelo jogador em rodadas anteriores. O número de vértices que o jogador defende é limitado por no máximo d vértices de G por rodada e o conjunto de vértices que são defendidos ao longo de todo o jogo é chamado de *estratégia*. O objetivo do jogador é salvar o maior número de vértices possíveis. No jogo *firefighter* introduzido por Hartnell os valores de f e d são iguais a 1. O nosso estudo se concentrou na variação do jogo onde f e d são inteiros positivos.

Após a introdução deste modelo por Hartnell, um grande número de problemas diferentes de decisão e otimização baseados no jogo *firefighter* tem sido propostos e estudados. Filbow et al. [28] mostrou que o problema de decisão FIREFIGHTER com $f = d = 1$ é NP-difícil restrito a instância $(T, \{r\})$ e um inteiro positivo k , onde T é uma árvore com grau máximo 3. Para a versão de otimização do problema FIREFIGHTER com $f = d = 1$ restrito à árvores gerais, Hartnell e Li [33] provaram que uma simples estratégia gulosa é um algoritmo $\frac{1}{2}$ -aproximativo. Cai et al. [9] descreveram um algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo baseando-se em uma programação linear inteira formulada por MacGillivray e Wang [41].

Para os piores casos, alguns autores se concentram em gerar garantias aproximadas através da *taxa de sobrevivência* (*surviving rate*) [10, 29] de um grafo. A taxa de sobrevivência $\rho(G, f; d)$ de um grafo G com $n(G)$ vértices é a média proporcional

dos vértices que podem ser salvos quando um conjunto de vértices F é selecionado aleatoriamente, ou seja,

$$\rho(G, f; d) = \frac{1}{\binom{n(G)}{f}} \sum_{F \in \binom{V(G)}{f}} \frac{MVS(G, F; d)}{n(G)}$$

onde $f = |F|$ e $\binom{V(G)}{f}$ é o conjunto de todos subconjuntos de ordem f com vértices de G . Cai et al. [8] provou que a estratégia gulosa de Hartnell e Li salva uma média de $n(T) - O(\log n(T))$ vértices em uma árvore T , isto implica que $\rho(T, 1; 1) \geq 1 - O\left(\frac{\log n(T)}{n(T)}\right)$. Além disso, eles mostraram que uma estratégia simples que defende no máximo dois vértices durante todo o jogo garante a mesma estimativa.

Em relação aos resultados com complexidade difícil, Finbow et al. [28] apresentaram um caso tratável interessante, eles mostraram que uma estratégia ótima para instância $(G, \{r\})$ no problema de otimização FIREFIGHTER com $f = d = 1$. Este problema pode ser determinado em tempo polinomial se G tem grau máximo 3 e r tem grau máximo 2. Duffy [25] mostrou que este resultado não pode ser estendido para grafos com pesos. Bazgan et al. [2] mostraram que uma estratégia ótima para instância $(G, \{r\})$ no problema de otimização FIREFIGHTER, com $f = 1$ e d um inteiro positivo, pode ser determinada em tempo polinomial se G é uma árvore com $\Delta(G) \leq d + 2$ e r tem grau máximo $d + 1$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de G . O “survey” de Finbow e MacGillivray [29] apresenta vários trabalhos que tem sido altamente investigados neste assunto e aponta novas direções de pesquisas sobre este tema. Os trabalhos [8, 24, 31] abordam o jogo *firefighter* com $f = 1$ e d um inteiro positivo e [22, 27] com f e d inteiros positivos.

1.2 Contribuições

Nossas contribuições relacionadas a emparelhamento em grafos foram baseadas em um resultado do trabalho de Henning et al [34]. Eles provaram o melhor limite inferior possível para o número de emparelhamento de um grafo 3-regular em termos do número de vértices e da cintura ímpar. Nós melhoramos este resultado estabelecendo limites inferiores para o número de emparelhamento de um grafo d -regular com cintura pelo menos g , onde d e g são inteiros positivos ímpares. Mais precisamente, obtivemos estes limites inferiores através de valores ótimos que estão em

função de d e g de uma programação linear inteira. Estudamos propriedades de certos grafos especiais com n vértices, grau máximo d , cintura ímpar pelo menos g e número de arestas $\frac{1}{2}(dn - t)$, onde t é um inteiro positivo ímpar, com a finalidade de obter uma classificação estrutural dos grafos extremais d -regulares com cintura pelo menos g . Nestes grafos determinamos algumas características e limites inferiores para o número de vértices. Por essas propriedades e pela programação linear, obtivemos limites inferiores precisos para o número de emparelhamento em muitos valores de d e g . Além disso, caracterizamos todos os grafos extremais para d e g iguais a 5.

Em relação ao jogo *firefighter*, estudamos o jogo com vários focos de incêndio, isto é, antes do início da partida há $f \geq 1$ vértices incendiados no grafo, assim como, o jogador faz até $d \geq 1$ defesas por rodada. Nós obtivemos resultados gerais para qualquer valor de f e d inteiros positivos.

Apresentamos propriedades e algoritmos aproximativos, que traçam estratégias de como o jogador pode proceder defesas a fim de diminuir o dano do incêndio no grafo. Estendemos o algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo para o jogo *firefighter* que foi proposto por Alspach [29] e analisado por Cai et al. [9]. Eles apresentaram este algoritmo para o jogo *firefighter* com $f = d = 1$ restrito a árvores. Nós obtivemos um algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo para a variação do jogo *firefighter* com valores arbitrários prefixados de f e d para árvores. Mostramos que $\rho(T, f; d) \geq 1 - O\left(\frac{\log n(T)}{n(T)}\right)$, onde T é uma árvore, para o jogo *firefighter* com valores gerais de f e d ; o mesmo limite inferior obtido por Cai et al. [8] com valores de $f = d = 1$. Trabalhamos também com uma variação do jogo *firefighter* com pesos sobre os vértices. Inspirados pelos resultados obtidos por Finbow et al. [28], nesta variação do jogo *firefighter*, obtivemos algoritmos aproximativos para $f = 1$ e d um inteiro positivo em grafos com o grau dos vértices restrito. Além disso, este algoritmo aproximativo retorna uma estratégia ótima para o caso em que todos vértices tem o mesmo peso.

Os resultados desta tese foram apresentados/publicados durante os últimos quatro anos em colóquios, conferências, periódicos, simpósios e workshops. Listamos estas publicações a seguir:

- “*Matchings in Graphs of Odd Regularity and Girth*” [16] Discrete Mathematics, 2013. Estabelecemos limites inferiores para emparelhamento máximo em

grafos dada a regularidade e cintura ímpar.

- “*Matchings in Graphs of Odd Regularity and Girth*” [17] apresentado no simpósio VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS 2013).
- “*More Fires and More Fighters*” [14] Discrete Applied Mathematics, 2013. Estudamos o jogo *firefighter* para valores grandes de f e d , apresentamos limites inferiores para a taxa de sobrevivência.
- “*Slash and burn on graphs - Firefighting with general weights*” [15] Discrete Applied Mathematics, in press. Estudamos a generalização do jogo *firefighter* com pesos nos vértices, pesos com valores positivos e também negativos.
- “*Firefighting with General Weights*” [13] apresentado na conferência European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb 2013).
- “*Asymptotic Surviving Rate of Trees with Multiple Fire Sources*” [21] Discrete Applied Mathematics, in press. Estudamos limites inferiores para a taxa de sobrevivência através do valor máximo da constante $c(f, d)$ que depende de f e d tal que $\rho(T, f, d) \geq c(f, d) - o(1)$ onde T é uma árvore de ordem n .
- “*Asymptotic Surviving Rate of Trees with Multiple Fire Sources*” [18] apresentado no colóquio IX International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics (ICGT 2014).
- “*The Burning of the Snarks*” [19] (será submetido na Matemática Contemporânea). Calculamos a taxa de sobrevivência de alguns snarks e apresentamos um algoritmo que retorna uma melhor estratégia.
- “*The Burning of the Snarks*” [20] apresentado no workshop VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCliques 2014).

1.3 Organização da tese

Esta tese está dividida em duas partes. A primeira parte, formada pelo Capítulo 3, trata do estudo relacionado ao tópico emparelhamento em grafos. A segunda parte, formada pelo Capítulo 4, trata do estudo relacionado ao tópico *firefighter*. Nossas contribuições são apresentadas nestes capítulos.

No Capítulo 2, Seções 2.1, 2.2 e ??, apresentamos definições básicas, definições específicas da teoria de emparelhamento, o enunciado do Teorema de Gallai-Edmonds e definições de teoria de probabilidade, respectivamente. O Teorema de Gallai-Edmonds é fortemente usado na demonstração do Teorema 2.

No Capítulo 3, Seção 3.1, apresentamos o Teorema 2. Este teorema fornece um limite inferior para o número de emparelhamento de um grafo d -regular e cintura ímpar pelo menos g e o Lema 3 que nos dá um limite inferior para o número de vértices dos grafos especiais com n vértices, grau máximo d , cintura ímpar pelo menos g e número de arestas $\frac{1}{2}(dn - t)$, onde t é um inteiro positivo ímpar. Combinando os dois resultados anteriores, fechamos a seção com o Corolário 6 que fornece um limite inferior preciso para grafos 5-regulares com cintura ímpar pelo menos 5 e apresentamos a estrutura dos grafos $(5, 1, 5)$ -extremais.

No Capítulo 3, Seção 3.2, melhoramos o limite inferior apresentado no Lema 3 para grafos $(2r + 1)$ -regulares com cintura ímpar pelo menos g tal que $r \equiv 0 \pmod{2}$ e $g \equiv 3 \pmod{4}$, $g \geq 7$. Descrevemos a formação estrutural da família dos grafos $(5, 3, g)$ -extremais com $g \equiv 1 \pmod{4}$ e, pela Proposição 9, provamos que esta descrição cobre todas as possibilidades de formação tais grafos extremais.

No Capítulo 4, Seções 4.1 e 4.2, apresentamos de modo formal as regras do jogo *firefighter*, definições e terminologias específicas para a leitura do restante da tese e descrevemos alguns problemas de decisão/otimização sobre este jogo.

No Capítulo 4, Seção 4.3, apresentamos propriedades para estratégias ótimas em árvores no jogo *firefighter*. No Teorema 12, mostramos que estratégias ótimas sob certas condições, para o jogo *firefighter* com $f = 2$ e d um inteiro positivo em árvores, são estratégias adjacentes, isto é, cada vértice defendido em uma certa rodada tem um vizinho que foi queimado na rodada anterior. No Teorema 14, mostramos que estratégias ótimas sob certas condições, para o jogo *firefighter* com f e d inteiros positivos em árvores, tem número de vértices defendidos limitado a

$2(f-1)$ na subárvore minimal que contém todos os focos de incêndio. Este resultado é de extrema importância para a descrição do algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo apresentado na seção seguinte.

No Capítulo 4, Seção 4.4, descrevemos um algoritmo que nos fornece uma estratégia de defesa para o jogo *firefighter* com f e d inteiros positivos em árvores. No Teorema 16, provamos que este algoritmo é $(1 - 1/e)$ -aproximativo.

No Capítulo 4, Seção 4.5, mostramos que $1 - O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ é um limite inferior para taxa de sobrevivência em árvores com n vértices e grau máximo Δ fixado, onde a constante implícita na $O(\cdot)$ -notação depende apenas de f e Δ .

No Capítulo 4, Seção 4.6, estão os resultados da versão do jogo *firefighter* com pesos. Descrevemos um algoritmo que nos fornece uma estratégia de defesa para esta variação do jogo com $f = 1$ e d um inteiro positivo em grafos com grau máximo $d+2$. Provamos que este algoritmo é aproximativo de desempenho absoluto limitado por um certo erro para o jogo *firefighter* com pesos e é polinomial determinístico para o jogo *firefighter* sem peso. Além disso, descrevemos outro algoritmo $1/2$ -aproximativo baseado no algoritmo anterior para o jogo *firefighter* com pesos com $f = 1$ e d um inteiro positivo em grafos com grau máximo $d + 2$.

Finalmente, no Capítulo 5, fazemos um breve comentário de trabalhos desenvolvidos ao longo do doutorado e trabalhos futuros.

Capítulo 2

Teoria dos grafos

Neste capítulo apresentamos as definições que são utilizadas nesta tese. Na Seção 2.1 apresentamos definições básicas da teoria dos grafos, em sequência, na Seção 2.2 apresentamos definições específicas para a teoria de emparelhamento. As referências utilizadas, nestas duas seções, foram Bondy e Murty [7], Lovazs [40] e West [51].

2.1 Definições básicas

Um *grafo* G consiste de um par $(V(G), E(G))$ onde $V(G)$ é um conjunto não vazio de *vértices* e $E(G)$ é um conjunto de pares de vértices uv , não ordenados, onde $u, v \in V(G)$ e cada par é chamado de *aresta*. A *ordem* $n(G) = |V(G)|$ é a cardinalidade do conjunto de vértices de $V(G)$ e o *tamanho* $m(G) = |E(G)|$ é a cardinalidade do conjunto de arestas de $E(G)$. Se não houver ambiguidade, usaremos as notações anteriores omitindo a letra que referencia o grafo.

Se uv é uma aresta de um grafo G , dizemos que u e v são *adjacentes* ou, simplesmente, dizemos que estão *ligados*. Além disso, dizemos que a aresta uv *incide* nos vértices u e v ou dizemos que u e v são *extremidades* da aresta uv . Um grafo G é dito *simples* se para cada aresta $uv \in E(G)$, u e v são vértices distintos e não possui arestas múltiplas (arestas múltiplas são arestas que tem as mesmas extremidades). Um conjunto de vértices é dito *independente* se quaisquer dois vértices deste conjunto são não adjacentes. Duas arestas que compartilham um mesmo vértice são chamadas de adjacentes. Similarmente, um conjunto de arestas é dito *independente* ou *emparelhado*, se quaisquer duas arestas deste conjunto são não adjacentes.

Dados dois grafos G e H são isomorfos se existe uma bijeção entre os conjuntos de vértices dos grafos G e H , $f : V(G) \rightarrow V(H)$, de tal forma que quaisquer dois vértices u e v de G são adjacentes em G se e somente se $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H .

A cardinalidade do conjunto de arestas que incide em um vértice $u \in V(G)$ é chamada de *grau* de u e denotada por $d_G(u)$. Dado dois vértices u, v e um conjunto de vértices S do grafo G , dizemos que u e v são *vizinhos* em G se $uv \in E(G)$ e dizemos que u é *vizinho* a S se existe um vértice $w \in S$ tal que $uw \in E(G)$. Definimos $N_G(u)$ como o conjunto de todos os vizinhos de u , ou seja, $N_G(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ e $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Chamamos $N_G(u)$ de *vizinhança aberta* de u e $N_G[u]$ de *vizinhança fechada* de u . Denotamos por $\Delta(G)$ o grau máximo de um grafo G , ou seja, qualquer vértice u de G tem $d_G(u) \leq \Delta(G)$. Um grafo em que todos os vértices tem o mesmo grau, digamos k , será chamado de k -regular.

Um (v_0, v_l) -caminho em um grafo, $G = (V, E)$, é uma sequência de vértices distintos v_0, v_1, \dots, v_l , com $v_0, \dots, v_l \in V$, tais que $v_i v_{i+1} \in E$, para todo $i \in \{0, \dots, l-1\}$. Se $v_0 = v_l$ então chamamos de *ciclo*. O comprimento de um caminho é o número de arestas que pertencem à ele. A *distância* entre dois vértices u e v em um grafo G , denotado por $\text{dist}_G(u, v)$, é o comprimento do menor caminho que inicia em u e termina em v . Similarmente ao caminho, o *comprimento de um ciclo* é o número de arestas que pertencem a ele. Dado um grafo G , o ciclo de menor comprimento em G é chamado de *cintura*. Igualmente, definimos *cintura ímpar* como o ciclo ímpar de menor comprimento em G . Convencionamos que grafos sem ciclos ímpares possuem *cintura ímpar infinita*.

O grafo H é um subgrafo do grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Dois grafos são disjuntos, se não tem vértices em comum. Dizemos que H é *subgrafo induzido* de G se qualquer $u, v \in V(H)$ tal que $uv \in E(G)$, então $uv \in E(H)$. Dado $S \subseteq V(G)$, o grafo $G[S]$ é o subgrafo de G induzido por S que tem como conjunto de vértices os vértices de S e qualquer $u, v \in S$ tal que $uv \in E(G)$, então $uv \in E(G[S])$. Procedemos da mesma forma quando S é um conjunto de arestas. Com intuito de simplificar a notação, dados os conjuntos $X \subset V(G)$ e $Y \subset E(G)$, denotaremos os grafos $G[V(G) \setminus X]$ e $G[E(G) \setminus Y]$ por $G - X$ e $G - Y$, respectivamente. Se $X = \{u\}$ e $Y = \{uv\}$, por simplicidade usaremos $G - u$ e $G - uv$, respectivamente.

Um conjunto de arestas ou vértices S de um grafo é dito *maximal* com respeito a uma propriedade Π , se S satisfaz a propriedade Π e nenhum conjunto \tilde{S} que contém S de modo próprio ($S \subsetneq \tilde{S}$) satisfaz tal propriedade. De modo análogo define-se conjunto *minimal* com respeito a propriedade Π .

Um grafo é dito conexo, se para quaisquer dois vértices u e v do grafo existe um (u, v) -caminho. Um subgrafo conexo maximal de um grafo G é chamado de *componente* de G . Uma componente é dita *componente ímpar* (*par*) se a cardinalidade do conjunto de vértices dela é ímpar (par).

Sejam H e \tilde{H} subgrafos de um grafo G , dizemos que os subgrafos H e \tilde{H} são ligados se existe uma aresta $uv \in E(G)$ tal que $u \in V(H)$ e $v \in V(\tilde{H})$. Dizemos que um vértice de um grafo é um *vértice de corte* se sua remoção aumenta a quantidade de componentes no grafo. Dizemos que uma aresta uv do grafo G é uma *aresta de corte* (ou *ponte*), se o grafo induzido $G - uv$ tem mais componentes que G . Um conjunto de arestas de um grafo G é dito *corte*, se é minimal e se ao omitirmos este conjunto o grafo G torna-se desconexo.

Se o conjunto de vértices de um grafo G pode ser particionado em dois conjuntos não vazios, digamos A e B , tais que $A \cup B = V(G)$ e qualquer aresta de G tem uma extremidade em A e a outra em B , então G é um grafo *bipartido* com uma *bipartição* A, B . Note que se o grafo é bipartido, então a cintura ímpar é ∞ .

Um grafo G conexo que não contém ciclos é chamado de *árvore*. Ao longo desta tese, na grande maioria das vezes, denotaremos uma árvore com letra T . Em uma árvore T , dizemos que os vértices de grau 1 são *folhas*. Dado um grafo conexo G , uma *árvore geradora* de G é um subgrafo induzido de G que contém todos vértices de G e é uma árvore. Uma árvore T é denominada *enraizada* se quando algum vértice $r \in V(T)$ é escolhido como especial, o vértice r é chamado de *raiz* de T . Sejam u e v vértices de uma árvore T com raiz r , dizemos que u é *antecessor* (*ancestral*) de v , assim como v é *sucessor* (*descendente*) de u , se u pertence ao (r, v) -caminho em T . Se (u, v) -caminho tem comprimento $i + 1$, onde i é um inteiro positivo, então u é *i -pai* de v , bem como v é *i -filho* de u ; por simplicidade, se (u, v) -caminho é apenas uma aresta ligando u a v dizemos que u é *pai* de v e v é *filho* de u .

2.2 Emparelhamento

A seguir apresentamos as definições relacionadas a teoria de emparelhamento e o famoso Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds. O enunciado do teorema aqui descrito é a versão encontrada do livro de Lovász e Pulmmer [40].

Um emparelhamento num grafo G é um conjunto M de arestas tal que todo vértice de G incide em no máximo um elemento de M . Sejam v um vértice e M um emparelhamento de um grafo G , dizemos que v é *coberto* ou *saturado* por M se v é extremidade de alguma aresta de M , caso contrário, v é dito *não coberto* ou *não saturado* por M . Um emparelhamento de um grafo G é dito ser um *emparelhamento perfeito* se todo vértice de G é coberto pelo emparelhamento, e é um *emparelhamento quase perfeito* se cobre todos os vértices de G com exceção de um vértice.

Um grafo G é dito *fator-crítico* se, para cada vértice $u \in V(G)$, o grafo $G - u$ tem um emparelhamento perfeito. Em um grafo G bipartido com bipartição A, B , definimos os números $def_G(X) = def(X) = |X| - |N_G(X)|$ como a *deficiência* de X em G e $surplus_G(X) = surplus(X) = |N_G(X)| - |X| = -def(X)$ como o *excesso* de X em G onde X é um subconjunto de A .

Teorema 1 (Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds [40]). *Seja G um grafo. Denote por $D(G)$ o conjunto de todos os vértices de $V(G)$ que não são cobertos por pelo menos um emparelhamento máximo de G . Seja $X(G)$ o conjunto de vértices em $V(G) - D(G)$ adjacentes a pelo menos um vértice de $D(G)$ e seja $C(G) = V(G) - X(G) - D(G)$. Então:*

(a) *as componentes do subgrafo induzido por $D(G)$ são fatores-críticos, ou seja, cada uma delas são componentes ímpares;*

(b) *o subgrafo induzido por $C(G)$ tem um emparelhamento perfeito;*

(c) *o grafo bipartido obtido de G por:*

- *retirar os vértices de $C(G)$,*
- *retirar as arestas com incidência em $X(G)$ e*
- *contrair cada componente de $D(G)$ a um único vértice,*

tem excesso positivo;

- (d) Se M é um emparelhamento máximo de G , então M contém um emparelhamento quase perfeito em cada componente de $D(G)$, tem um emparelhamento perfeito para cada componente de $C(G)$ e cobre todos os vértices de $X(G)$ com vértices de componentes distintas de $D(G)$;
- (e) $\alpha'(G) = \frac{1}{2}(V(G) + |X(G)| - c(D(G)))$, onde $c(D(G))$ denota o número de componentes do grafo gerado pelo conjunto $D(G)$.

□

Capítulo 3

Emparelhamento

Neste capítulo apresentamos as contribuições da tese relacionadas ao tema emparelhamento. Logo no início, mostramos o resultado central deste tópico, o Teorema 2 que estende o resultado de Henning et al. [34] para grafos regulares com grau ímpar maior que 3. A partir dele obtivemos as propriedades e a classificação estrutural dos grafos extremais apresentados nas Seções 3.2 e 3.3.

3.1 Limites inferiores para $\alpha'(G)$

Seja r um inteiro positivo. Para os inteiros ímpares t e g com $1 \leq t \leq 2r - 1$ e $g \geq 5$, o menor inteiro ímpar n tal que existe um grafo conexo G de ordem n que tem:

- G tem grau máximo no máximo $2r + 1$;
- tamanho $\frac{1}{2}((2r + 1)n - t)$;
- G tem cintura ímpar pelo menos g .

Um grafo que satisfaz as condições acima e tem ordem $n(2r + 1, t, g)$ é chamado de $(2r + 1, t, g)$ -*extremal*.

A seguir o resultado que é a base para todos limites inferiores obtidos sobre número de emparelhamento nesta tese.

Teorema 2. *Seja r um inteiro positivo e seja g um inteiro ímpar com $g \geq 5$. Se G é um grafo $(2r + 1)$ -regular conexo de ordem n e cintura ímpar pelo menos g , então*

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{o_{\text{opt}}(2r + 1, g)}{2r + 1} \right), \quad (3.1)$$

onde $o_{\text{opt}}(2r + 1, g)$ é o valor ótimo do seguinte problema de programação linear inteira:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t \in T} (2r + 1 - t) o_t \\ \text{tal que} & \sum_{t \in T} ((2r - 1)n(2r + 1, t, g) - t + 2) o_t \leq (2r - 1)n + 2 \\ & o_t \in \mathbb{N}_0 \text{ com } t \in T, \end{aligned} \quad (3.2)$$

onde o_t é o número de componentes ímpares de $G - X$ que são ligadas a X por exatamente t arestas e $T = \{t \in \mathbb{N} : 1 \leq t \leq 2r - 1 \text{ e } t \text{ é ímpar}\}$. O conjunto $X \subset V(G)$ é obtido pelo Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds,.

Demonstração. Seja $d = 2r + 1$. Seja G um grafo d -regular conexo de ordem n e cintura ímpar pelo menos g . Pelo Teorema 1 (*Teorema Estrutural de Gallai-Edmonds*), existe um conjunto de vértices X de G com

$$\alpha'(G) = \frac{1}{2}(n + |X| - o), \quad (3.3)$$

onde o denota o número de componentes ímpares $G - X$. Além disso, X pode ser escolhido de tal forma que cada componente de $G - X$ é um fator-crítico.

Afirmção. Como G é d -regular e d é ímpar, o número de arestas ligando X a qualquer componente de G é ímpar.

De fato, dado uma componente de $G - X$, considere U e W os conjuntos de vértices de grau ímpar e grau par desta componente, respectivamente. Como esta componente é um fator-crítico, ela tem um número ímpar de vértices; e pelo fato de que o número de vértices de grau ímpar em qualquer grafo é par, temos que $|U|$ é par, e portanto, $|W|$ é ímpar. Como $|U|$ é par e todos os vértices de U adjacentes a X tem um número par de arestas ligando-os a X , temos que U contribui com um número par de arestas que liga a componente a X . Com um raciocínio análogo, concluir-se que W contribui com um número ímpar de arestas que liga a componente a X .

Para cada $t \in T$ e cada $s \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$, considere o_t^s o número de componentes ímpares C de $G - X$ tal que existem exatamente t arestas ligando X a C e C contém exatamente s vértices que tem pelo menos um vizinho em X . Além disso, temos $o_t = \sum_{s=1}^t o_t^s$. Uma componente ímpar C de $G - X$ que é ligada a X por menos que d arestas é chamada *crítica*.

Contando as arestas que ligam X às componentes ímpares de $G - X$, temos

$$d|X| \geq \sum_{t \in T} t o_t + d \left(o - \sum_{t \in T} o_t \right), \quad (3.4)$$

que implica,

$$|X| - o \geq -\frac{1}{d} \left(\sum_{t \in T} (d - t) o_t \right).$$

Por (3.3), temos

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{1}{d} \left(\sum_{t \in T} (d - t) o_t \right) \right). \quad (3.5)$$

Considere o grafo H gerado a partir de G omitindo os seguintes elementos:

- todas as arestas tais que ambas extremidades estão em alguma componente ímpar crítica de $G - X$; e
- todos os vértices que estão em alguma componente ímpar crítica de $G - X$ e que não possuem vizinho em X .

Note que a ordem de H é a ordem de G menos a cardinalidade do conjunto dos vértices das componentes ímpares críticas de G com exceção de vértices dessas componentes que estão ligados a X .

Como qualquer componente ímpar crítica de G tem cardinalidade maior ou igual a $n(d, t, g)$, temos que a ordem $n(H)$ de H satisfaz

$$n(H) \leq n - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (n(d, t, g) - s) o_t^s. \quad (3.6)$$

Afirmção. Como G é conexo, o grafo H tem no máximo

$$1 + \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (s - 1) o_t^s \quad (3.7)$$

componentes.

De fato, seja C uma componente ímpar crítica de G com t arestas ligando-a a X e s vértices que são vizinhos a X . Se omitirmos os vértices de C não-vizinhos a X , a componente C produzirá no máximo s novas componentes em H , ou seja, cada componente de G se transforma em no máximo $s - 1$ componentes em H .

Afirmção. Temos a inequação

$$m(H) \geq (n(H) - 1) - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (s - 1) o_t^s. \quad (3.8)$$

De fato, considere C_1, C_2, \dots, C_{o_H} componentes de H e v um vértice que não pertence a H . Seja \tilde{H} o grafo gerado a partir de H da seguinte maneira:

- $V(\tilde{H}) = \{v\} \cup V(H)$,
- $E(\tilde{H}) = \bigcup_{i=1}^{o_H} \{vw_i\} \cup E(H)$, onde $w_i \in V(C_i)$ com $1 \leq i \leq o_H$.

Sabemos, por um resultado clássico de teoria dos grafos, que qualquer árvore T nos fornece a equação $m(T) = n(T) - 1$, portanto, dado uma árvore geradora $T_{\tilde{H}}$ de \tilde{H} temos $m(\tilde{H}) \geq m(T_{\tilde{H}}) = n(\tilde{H}) - 1$. Por construção, temos que $m(\tilde{H}) - o_H = m(H)$ e $n(\tilde{H}) - 1 = n(H)$, logo,

$$\begin{aligned} m(H) &\geq n(H) - o_H \\ &\stackrel{(3.7)}{\geq} n(H) - \left(1 + \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (s - 1) o_t^s\right). \end{aligned}$$

Afirmção. Temos que existem $n(H) - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t s o_t^s$ vértices de grau d em H .

De fato, cada componente ímpar crítica de G com t arestas ligando-a a X e s vizinhos a X , produz s vértices para H . Portanto, para cada $t \in T$ e cada $s \in \{1, 2, 3, \dots, t\}$, as o_t^s componentes ímpares críticas de G produzirão $s o_t^s$ vértices para H com grau menor que d . Logo, temos um total de $\sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t s o_t^s$ vértices com grau menor que d em H .

Pelo fato da soma dos graus dos vértices de qualquer grafo ser igual a duas vezes o seu número de arestas e pela construção de H , temos que o tamanho de H satisfaz

$$2m(H) = \sum_{u \in V(H)} d_H(u) = \sum_{t \in T} t o_t + d \left(n(H) - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t s o_t^s \right). \quad (3.9)$$

Combinando (3.8) e (3.9), temos

$$2(n(H) - 1) - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t 2(s-1)o_t^s \leq \sum_{t \in T} to_t + d \left(n(H) - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t so_t^s \right). \quad (3.10)$$

Combinando (3.6) e (3.10), temos

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (ds - t - 2s + 2) o_t^s &\stackrel{(3.10)}{\leq} (d-2)n(H) + 2 \\ &\stackrel{(3.6)}{\leq} (d-2) \left(n - \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t (n(d, t, g) - s) o_t^s \right) + 2, \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t [(ds - t - 2s + 2) + (d-2)(n(d, t, g) - s)] o_t^s &\leq (d-2)n + 2, \\ \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t [(d-2)(n(d, t, g) - t + 2)] o_t^s &\leq (d-2)n + 2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} ((d-2)n(d, t, g) - t + 2) o_t &= \sum_{t \in T} \sum_{s=1}^t ((d-2)n(d, t, g) - t + 2) o_t^s \\ &\leq (d-2)n + 2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Pelas inequações (3.5) e (3.11), temos o resultado desejado. \square

A fim de obter limites mais aproximados a partir do Teorema 2, é necessário obter valores exatos ou pelo menos estimar valores para $n(2r+1, t, g)$. Para o caso $r=1$ o próximo lema corresponde ao Lemma 21 do trabalho de Henning et al. [34].

Lema 3. *Se r e t são inteiros com $1 \leq t \leq 2r-1$ e g é um inteiro ímpar com $g \geq 5$.*

Então

$$n(2r+1, t, g) \geq 2 \left\lceil \frac{(2r+1)g - (t+2)}{4} \right\rceil + 1. \quad (3.12)$$

Demonstração. Seja G um grafo com ordem n , grau máximo $2r+1$, tamanho $\frac{1}{2}((2r+1)n - t)$ e cintura ímpar pelo menos g . Como $(2r+1)n - t$ é par e t é ímpar, temos que n é ímpar. Note que a sequência de graus de G é obtida a partir da sequência de n cópias de $2r+1$ e pela redução de alguns destes valores de tal

maneira que a redução total seja t .

Afirmção. O grafo G não é bipartido.

Suponha, por absurdo, que exista (A, B) uma bipartição de G . Pela estrutura da sequência dos graus, existem inteiros não-negativos t_1 e t_2 , com $t_1, t_2 \leq 2r$, tais que

- $\sum_{u \in A} d_G(u) \equiv -t_1 \pmod{(2r+1)}$,
- $\sum_{u \in B} d_G(u) \equiv -t_2 \pmod{(2r+1)}$, e
- $t = t_1 + t_2$.

Como A e B formam uma partição de G , temos que $\sum_{u \in A} d_G(u) = \sum_{u \in B} d_G(u)$. Isto implica que $t_1 - t_2 \equiv \sum_{u \in B} d_G(u) - \sum_{u \in A} d_G(u) \pmod{(2r+1)}$. Uma vez que $-(2r-1) \leq t_1 - t_2 \leq 2r-1$, isto implica que $t_1 = t_2$, e portanto, $t = 2t_1 \equiv 0 \pmod{2}$, contrariando o fato de t ser ímpar. Logo G não é bipartido.

Seja C um ciclo ímpar de menor comprimento em G , com os vértices $u_0, \dots, u_{\ell-1}$ ordenados, onde $\ell \geq g$. Consideramos os índices dos vértices de C módulo ℓ . Sejam $K = V(G) \setminus V(C)$ e $k = |K|$. Denotaremos por $m_{C,K}$ o número de arestas de G que ligam $V(C)$ a K . Pela estrutura da sequência dos graus, temos $m_{C,K} \geq (2r-1)\ell - t$, pois, para o pior caso, todos os vértices com grau menor que $2r+1$ estão em C . Temos que nenhum vértice de K tem mais que dois vizinhos em $V(C)$, pois se existisse pelo menos um, existiria um ciclo de tamanho ímpar menor que g , uma contradição. Portanto, temos que $m_{C,K} \leq 2k$. Combinando os dois argumentos anteriores, temos

$$(2r-1)\ell - t \leq m_{C,K} \leq 2k, \quad (3.13)$$

portanto,

$$\begin{aligned} n &= \ell + k \\ &\stackrel{(3.13)}{\geq} \ell + \frac{(2r-1)\ell - t}{2} \\ &= \frac{(2r+1)\ell - t}{2} \\ &= 2 \left(\frac{(2r+1)\ell - (t+2)}{4} \right) + 1. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pelo fato de n ser ímpar, temos (3.12). □

Observação 4. No Lema 3, se existe algum vértice $v \in K$ que tem dois vizinhos em $V(C)$, digamos x e y , então, pela minimalidade de C , a distância de x e y é igual a dois em C .

Obtemos dois corolários combinando o Teorema 2 e o Lema 3. O primeiro nos dá um limite inferior para todos os valores de r e g . Ele depende da combinação de uma versão simplificada de (3.12), com uma relaxação do programa linear inteiro (3.2). O segundo corolário nos dá um limite inferior para valores específicos $2r+1 = g = 5$.

Corolário 5. Seja r um inteiro positivo e seja g um inteiro positivo ímpar com $g \geq 5$. Se G é um grafo $(2r+1)$ -regular conexo com ordem n e cintura ímpar pelo menos g . Então

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{4r((2r-1)n+2)}{(2r+1)((2r-1)((2r+1)g-1)+2)} \right). \quad (3.15)$$

Demonstração. Seja $d = 2r + 1$. Seja G um grafo d -regular conexo com ordem n e cintura ímpar pelo menos g . Pelo Lema 3, $n(d, t, g) \geq \frac{dg-t}{2}$. Pelo Teorema 2, temos $\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{o_{\text{lin}}}{d} \right)$, onde o_{lin} é o valor ótimo do seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} & \max \quad \sum_{t \in T} (d-t)o_t \\ \text{tal que} \quad & \sum_{t \in T} \left((d-2) \left(\frac{dg-t}{2} \right) - t + 2 \right) o_t \leq (d-2)n + 2 \\ & o_t \geq 0 \text{ para } t \in T, \end{aligned}$$

onde $T = \{t \in \mathbb{N} : 1 \leq t \leq 2r-1 \text{ e } t \text{ é ímpar}\}$.

Afirmção. Como $\frac{d-t}{((d-2)\left(\frac{dg-t}{2}\right) - t + 2)}$ é estritamente decrescente em relação a variável t , temos

$$o_{\text{lin}} = \frac{((d-2)n+2)(d-1)}{((d-2)\left(\frac{dg-1}{2}\right) + 1)}.$$

De fato, considere $f(t) = (d-2)\left(\frac{dg-t}{2}\right) - t + 2$. Se $t < t'$, temos $\frac{d-t}{f(t)} > \frac{d-t'}{f(t')}$. Dada a condição

$$f(t)o_t + f(t')o_{t'} = f(t) \left(o_t + \frac{f(t')}{f(t)} \varepsilon \right) + f(t')(o_{t'} - \varepsilon) \leq (d-2)n + 2,$$

para $\varepsilon \geq 0$, temos a mesma proporção em

$$(d-t) \left(o_t + \frac{f(t')}{f(t)} \varepsilon \right) + (d-t')(o_{t'} - \varepsilon),$$

para $\varepsilon \geq 0$. Fazendo de forma recursiva o argumento anterior para todo $1 \leq t \leq 2r - 1$, isto é,

$$\begin{aligned} & f(1)o_1 + f(3)o_3 + f(5)o_5 + f(7)o_7 + \dots \\ & f(1) \left(o_1 + \frac{f(3)}{f(1)}\varepsilon_3 \right) + f(3)(o_3 - \varepsilon_3) + f(5)o_5 + f(7)o_7 + \dots \\ & f(1) \left(\left(o_1 + \frac{f(3)}{f(1)}\varepsilon_3 \right) + \frac{f(5)}{f(1)}\varepsilon_5 \right) + f(3)(o_3 - \varepsilon_3) + f(5)(o_5 - \varepsilon_5) + f(7)o_7 + \dots, \end{aligned}$$

podemos considerar apenas a primeira parcela do somatório afim de obter o_{lin} . Basta tomar $\varepsilon_t = o_t$ para todo $t \in T \setminus \{1\}$. Agora, a programação pode ser considerada como

$$\begin{cases} \max & (d-1)\bar{o}_1 \\ \text{tal que} & f(1)\bar{o}_1 \leq (d-2)n + 2 \end{cases}$$

onde

$$\bar{o}_1 = \left(\left(o_1 + \frac{f(3)}{f(1)}\varepsilon_3 + \dots + \frac{f(2r-3)}{f(1)}\varepsilon_{2r-3} \right) + \frac{2r-1}{f(1)}\varepsilon_{2r-1} \right).$$

Portanto, $\bar{o}_1 = \frac{(d-2)n + 2}{(d-2)\left(\frac{dg-1}{2}\right) + 1}$. Onde concluímos que $o_{\text{lin}} = (d-1)\bar{o}_1$.

Fazendo uma manipulação algébrica em

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{\frac{((d-2)n+2)(d-1)}{\left(\frac{(d-2)\left(\frac{dg-1}{2}\right)+1\right)}}}{d} \right),$$

obtemos a expressão (3.15). □

O Corolário 5 implica que a fração dos vértices não cobertos pelo emparelhamento máximo no grafo $(2r+1)$ -regular e cintura ímpar pelo menos g tem um comportamento da ordem $O\left(\frac{1}{rg}\right)$. Flaximan e Hoory [30] provaram que a fração dos vértices não cobertos pelo emparelhamento é $O\left((d-1)^{-\frac{g}{2}}\right)$ para grafos d -regulares de cintura pelo menos g . Este trabalho proíbe não apenas os ciclos ímpares, mas também os ciclos curtos, isso conduz a um limite exponencialmente melhor.

Para $2r+1=3$, o limite (3.15) é igual a $\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{4(n+2)}{3(3g+1)} \right)$, que coincide com a estimativa bem precisa de (1.1),

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n(G) - \frac{n(G) + 2}{3 \left(\left\lceil \frac{3}{4}(g-1) \right\rceil + 1 \right)} \right),$$

de Henning et al. [34], sempre que $g \equiv 1 \pmod{4}$. Ou seja, o Corolário 5 é preciso pelo menos para certos valores de r e g .

Nos dois grafos da Figura 3.1, temos $n(5, 1, 5) = 13$, isto é, o Lema 3 é preciso para $2r + 1 = g = 5$ e $t = 1$. É simples checar que ambos os grafos da Figura 3.1 são fator-crítico. O grafo da esquerda tem um ciclo de comprimento 5 que contém apenas vértices de grau 5, enquanto que removendo o vértice de grau 4 do grafo da direita permite formar um grafo bipartido.

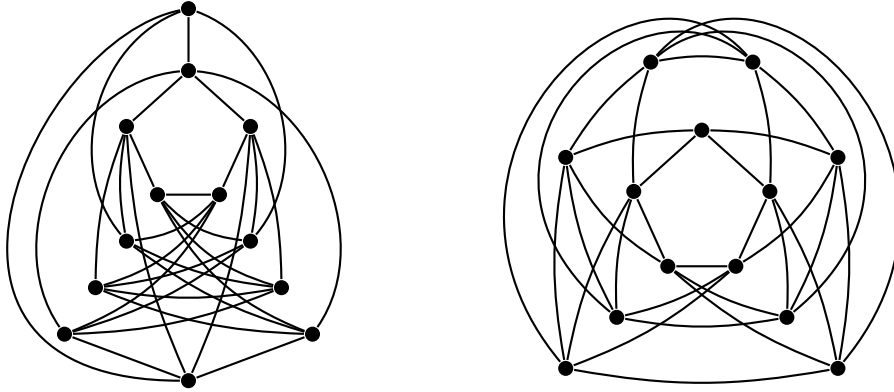


Figura 3.1: Os dois grafos $(5, 1, 5)$ -extremais.

A figura abaixo será utilizada como esquema estrutural da árvore T descrita no corolário a seguir.

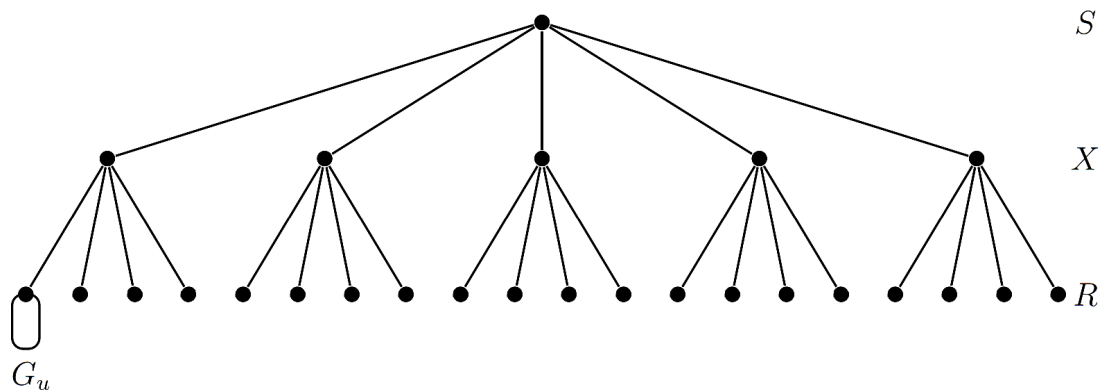


Figura 3.2: Esquema estrutural da árvore T , onde S está no primeiro nível, X no segundo e R no terceiro.

Corolário 6. *Se G é um grafo 5-regular conexo com ordem n e cintura pelo menos 5. Então,*

$$\alpha'(G) \geq \frac{47n - 2}{100} \quad (3.16)$$

atingindo a igualdade se, e somente se, G é formado por uma árvore T , onde

- $V(T)$ é a união de três conjuntos independentes X , R e S ,

- não existem arestas ligando R e S ,
- cada vértice em $X \cup S$ tem grau 5 em T e
- cada vértice em R tem grau 1 em T ,

pela adição de $|R|$ fatores-críticos disjuntos e grafos G_u $(5, 1, 5)$ -extremais com $u \in R$ tal que cada vértice $u \in R$ é identificado com o único vértice de grau 4 em G_u .

Demonstração. Pelo Lema 3, temos $n(5, 1, 5) \geq 13$ e $n(5, 3, 5) \geq 11$; e (3.2) é simplificado para:

$$\begin{aligned} \max \quad & 4o_1 + 2o_3 \\ \text{tal que} \quad & 40o_1 + 32o_3 \leq 3n + 2 \\ & o_1, o_3 \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

Afirmção. O valor ótimo desta programação linear inteira satisfaz $o_{\text{opt}}(5, 5) \leq \frac{3n+2}{10}$. De fato, temos $o_{\text{opt}}(5, 5) \leq 4o_1 + 2o_3$ tal que $40o_1 + 32o_3 \leq 3n + 2$. Considerando $o_3 = 0$, (o peso de o_1 é duas vezes maior que o_3), temos $o_1 \leq \frac{3n+2}{40}$. Portanto,

$$o_{\text{opt}}(5, 5) \leq 4o_1 \leq 4 \left(\frac{3n+2}{40} \right) = \frac{3n+2}{10}.$$

Pela afirmação anterior e pelo Teorema 2, temos $\frac{47n-2}{100} \leq \frac{1}{2} \left(n - \frac{o_{\text{opt}}(5,5)}{2r+1} \right)$, que nos assegura (3.16). Agora, suponha que G satisfaz a igualdade em (3.16). Por (3.1), temos

$$\frac{47n-2}{100} = \alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{o_{\text{opt}}(5,5)}{2r+1} \right).$$

Isto implica na igualdade em (3.1) e $o_{\text{opt}}(5, 5) = \frac{3n+2}{10}$, que por sua vez implicam em $o_1 = \frac{3n+2}{40}$ e $o_3 = 0$. Para atingirmos estas igualdades, temos que ter a igualdade em (3.11), (3.10), (3.8), (3.6), (3.5) e (3.4) no Teorema 2. Como $o_3 = 0$, o grafo H que aparece na demonstração do Teorema 2 é conexo, e a igualdade em (3.8) requer que H seja uma árvore. Pela igualdade em (3.4), temos $5|X| = o_1 + 5(o - o_1)$. Isto implica que o número de arestas entre X e as componentes ímpares de $G - X$ é igual ao número de arestas que incidem nos vértices de X , ou seja, quaisquer dois vértices em X não podem ser vizinhos. Logo a afirmação que X é um conjunto independente e que todas as componentes de $G - X$ são ímpares estão asseguradas. Pela construção de H , pelo fato de $o_3 = 0$ e pela igualdade em (3.6), temos que cada componente ímpar de $G - X$

- ou é fator-crítico, $(5, 1, 5)$ -extremal, e é ligada a X por exatamente uma aresta,
- ou consiste de um único vértice, e é ligado a X por exatamente cinco arestas.

Se S denota o conjunto de vértices isolados em $G - X$ e $R = V(H) \setminus (X \cup S)$, então G tem a estrutura igual à descrita no enunciado. Reciprocamente, se G é o grafo descrito no enunciado, segue facilmente que ele satisfaz a igualdade em (3.16). \square

3.2 Propriedades dos grafos $(2r + 1, t, g)$ -extremais

Nesta seção apresentamos algumas propriedades dos grafos $(2r + 1, t, g)$ -extremais. Nosso próximo resultado mostra que o Lema 3 não é preciso para certos valores dos números inteiros r, t e g .

Proposição 7. *Se r é um inteiro positivo e g é um inteiro ímpar com $r \equiv 0 \pmod{2}$, $g \geq 7$ e $g \equiv 3 \pmod{4}$, então*

$$n(2r + 1, 1, g) > 2 \left\lceil \frac{(2r + 1)g - 3}{4} \right\rceil + 1.$$

Demonstração. Seja $d = 2r + 1$. Como $2r + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, temos que $dg \equiv 3 \pmod{4}$, ou seja, $dg - 3 \equiv 0 \pmod{4}$, e portanto, $2 \left\lceil \frac{dg-3}{4} \right\rceil + 1 = \frac{dg-1}{2}$.

Suponha, por absurdo, que pelo Lema 3 temos $n(d, 1, g) = \frac{dg-1}{2}$. Seja G um grafo $(d, 1, g)$ -extremal. Note que G tem exatamente um vértice u^* de grau $d - 1$ enquanto que os outros vértices tem grau d . Como na demonstração do Lema 3, segue que G não é um grafo bipartido. Novamente, seja C o menor ciclo ímpar em G com os vértices ordenados $u_0, \dots, u_{\ell-1}$. Considere todos os índices modulo ℓ .

Na demonstração do Lema 3, seque que a igualdade é atingida em (3.14) e a cintura ímpar de G é igual a g , isto é, $g = \ell$, pois

$$n(d, 1, g) \stackrel{(\text{Lema 3})}{\geq} 2 \left(\frac{d\ell - 3}{4} \right) + 1 \geq \frac{dg - 1}{2} = n(d, 1, g).$$

Sejam K e $m_{C,K}$ tais como na demonstração do Lema 3. Como a igualdade em (3.14) é atingida, temos que a igualdade em (3.13) também é, ou seja,

$$(2r - 1)g - 1 = m_{C,K} = 2k.$$

Como $(2r - 1)g - 1 = m_{C,K}$, segue que u^* está em $V(C)$. Como $m_{C,K} = 2k$, segue que cada vértice v de K tem exatamente dois vizinhos em C e esses vizinhos estão a

uma distância 2 um do outro em C . Note que u^* tem $d-3$ vizinhos em K , enquanto todos os outros vértices em C tem $d-2$ vizinhos em K . Podemos assumir que $u_0 = u^*$.

Sejam $B_i = N_G(u_{i-1}) \cap N_G(u_{i+1}) \cap K$ e $b_i = |B_i|$. Considere $b_1 = p$. Como u_0 tem $d-3$ vizinhos em K e B_1 tem p vértices, temos que $b_{g-1} = d-3-p$. Considerando os vizinhos de u_2, u_4, \dots, u_{g-1} em K , as condições acima implicam em

- $b_{4i+1} = p$,
- $b_{4i+3} = d-2-p$,

para $i \in \{0, \dots, \frac{g-3}{4}\}$, pois $g \equiv 3 \pmod{4}$. Veja o diagrama estrutural do grafo G nas Figuras 3.3 e 3.4, acima de cada conjunto B_i está denotado a cardinalidade.

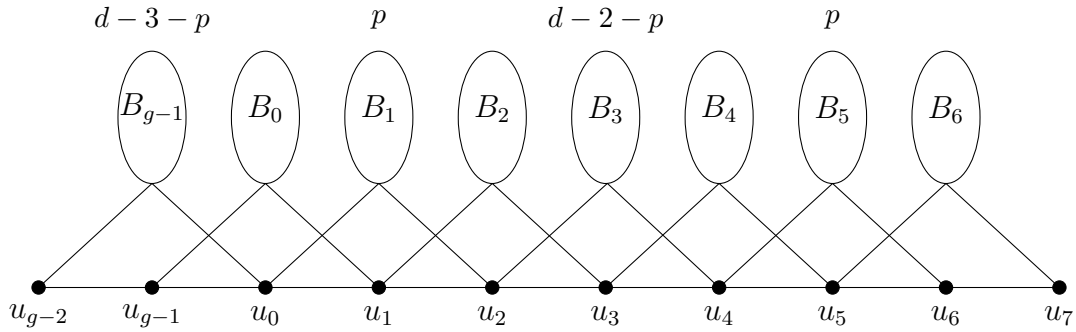


Figura 3.3: Grafo G com a cardinalidade dos conjuntos B_2, B_4, \dots, B_{g-1} .

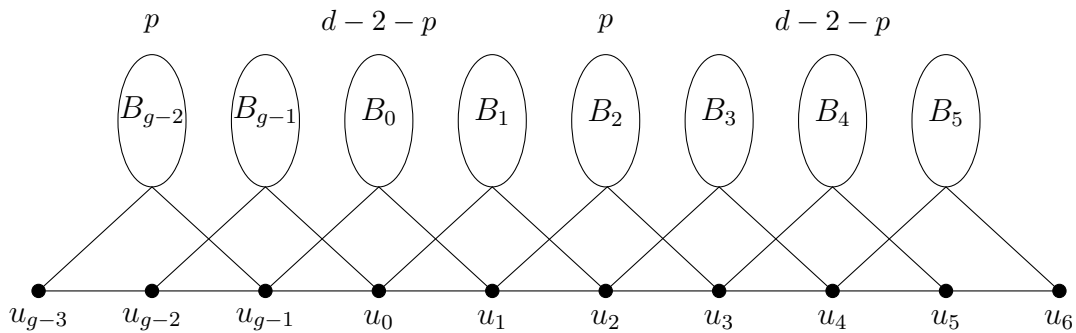


Figura 3.4: Grafo G com a cardinalidade dos conjuntos B_1, B_3, \dots, B_{g-2} .

Em particular, temos $b_0 = d-2-p$.

Agora, considerando os vizinhos de u_1, u_3, \dots, u_{g-2} em K , temos que as condições anteriores implicam indutivamente que

- $b_{4i} = d-2-p$,

- $b_{4i+2} = p$,

para $i \in \{0, \dots, \frac{g-3}{4}\}$.

Em particular, temos $b_{g-1} = p$. Como $d - 3 - p = b_{g-1} = p$, temos $p = \frac{d-3}{2}$. Consequentemente $b_0 = d - 2 - p > 0$. Seja $v \in B_0$. Como $N_G(v) \subseteq \{u_1, u_{g-1}\} \cup B_1 \cup B_{g-1}$, temos que $d_G(v) \leq 2 + 2p$, pois u_{g-1}, u_0 são vizinhos de v ; e B_1, B_{g-1} podem contribuir com no máximo p vizinhos cada. De onde obtemos a contradição, pois $d_G(v) \leq 2 + 2p = d - 1$. \square

A Proposição 7 melhora o limite inferior $n(2r+1, 1, g)$, o qual permite a melhoria do Corolário 5 com o corolário seguinte.

Corolário 8. *Seja r um inteiro positivo e seja g um inteiro ímpar com $r \equiv 0 \pmod{2}$, $g \geq 7$ e $g \equiv 3 \pmod{4}$. Se G é um grafo $(2r+1)$ -regular conexo com ordem n e cintura ímpar pelo menos g , então*

$$\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{4r((2r-1)n+2)}{(2r+1)((2r-1)((2r+1)g+3)+2)} \right).$$

Demonstração. Seja $d = 2r + 1$. Seja G um grafo conexo $(2r+1)$ -regular de ordem n e cintura ímpar pelo menos g . Como $dg \equiv 3 \pmod{4}$, $n(d, 1, g)$ é ímpar e pela Proposição 7, temos

$$n(d, 1, g) \geq \frac{dg+3}{2} = 2 \left\lceil \frac{dg-3}{4} \right\rceil + 3 > 2 \left\lceil \frac{dg-3}{4} \right\rceil + 1.$$

Pelo Lema 3, $n(d, t, g) \geq \frac{dg-t}{2}$ onde t é ímpar e $3 \leq t \leq d-2$. Pelo Teorema 2, temos $\alpha'(G) \geq \frac{1}{2} \left(n - \frac{o'_{\text{lin}}}{d} \right)$, onde o'_{lin} é o valor ótimo da seguinte programação linear:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{t \in T} (d-t)o_t \\ & \text{tal que } \left((d-2) \left(\frac{dg+3}{2} \right) + 1 \right) o_1 + \sum_{t \in T'} \left((d-2) \left(\frac{dg-t}{2} \right) - t + 2 \right) o_t \leq (d-2)n + 2 \\ & o_t \geq 0, \quad t \in \{1\} \cup T', \end{aligned}$$

onde $T' = \{t \in \mathbb{N} : 3 \leq t \leq 2r-1 \text{ e } t \text{ é ímpar}\}$.

Com uma argumentação análoga à do Corolário 5, obtemos

$$o'_{\text{lin}} = \frac{((d-2)n+2)(d-1)}{\left((d-2) \left(\frac{dg+3}{2} \right) + 1 \right)},$$

pois $\frac{d-1}{\left((d-2) \left(\frac{dg+3}{2} \right) + 1 \right)} > \frac{d-3}{\left((d-2) \left(\frac{dg-3}{2} \right) - 1 \right)}$ e a expressão $\frac{d-t}{\left((d-2) \left(\frac{dg-t}{2} \right) - t + 2 \right)}$ é estritamente decrescente em relação a variável t . Aplicando o'_{lin} na inequação (3.1) do Teorema 2, temos o resultado desejado. \square

3.3 Estrutura dos grafos $(5, 3, g)$ -extremais

Agora, vamos caracterizar a família $\mathcal{G}(5, 3, g)$ de todos os grafos $(5, 3, g)$ -extremais para $g \equiv 1 \pmod{4}$.

Seja g um inteiro positivo com $g \equiv 1 \pmod{4}$. Considere todos os índices módulo g . Para inteiros positivos n_0, n_1, \dots, n_{g-1} , o grafo $G(n_0, n_1, \dots, n_{g-1})$ tem o conjunto de vértices $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_{g-1}$, onde V_0, V_1, \dots, V_{g-1} são conjuntos disjuntos com $|V_i| = n_i$, $0 \leq i \leq g-1$. Além disso, cada V_i é um conjunto independente de vértices de $G(n_0, n_1, \dots, n_{g-1})$ e $V_i \cup V_{i+1}$ induz um subgrafo bipartido completo em $G(n_0, n_1, \dots, n_{g-1})$.

A família $\mathcal{G}(5, 3, g)$ consiste em todos os $G(n_0, \dots, n_{g-1})$ tais que uma das três opções são válidas (exemplos nas Figuras 3.5, 3.6 e 3.7).

(i) ou

$$n_i = \begin{cases} 1, & (i \equiv 0 \pmod{4}) \vee (i \equiv 1 \pmod{4}), \\ 4, & (i \equiv 2 \pmod{4}) \vee (i \equiv 3 \pmod{4}), \end{cases}$$

(ii) ou existe um inteiro r com $1 \leq r \leq \frac{g-1}{4}$ e

$$n_i = \begin{cases} 1, & (i \equiv 0 \pmod{4}) \vee [(i \equiv 1 \pmod{4}) \wedge (4r+1 \leq i \leq g-4)], \\ 2, & (i \equiv 1 \pmod{4}) \wedge (1 \leq i \leq 4r-3), \\ 4, & (i \equiv 2 \pmod{4}) \vee [(i \equiv 3 \pmod{4}) \wedge (4r+3 \leq i \leq g-2)], \\ 3, & (i \equiv 3 \pmod{4}) \wedge (3 \leq i \leq 4r-1), \end{cases}$$

(iii) ou existem dois inteiros r e s com $1 \leq r \leq s \leq \frac{g-5}{4}$ e

$$n_i = \begin{cases} 1, & [(i \equiv 0 \pmod{4}) \wedge (0 \leq i \leq 4s)] \vee [(i \equiv 1 \pmod{4}) \wedge (4r+1 \leq i \leq g-4)], \\ 2, & [(i \equiv 1 \pmod{4}) \wedge (1 \leq i \leq 4r-3)] \vee [(i \equiv 0 \pmod{4}) \wedge (4s+4 \leq i \leq g-1)], \\ 4, & [(i \equiv 2 \pmod{4}) \wedge (2 \leq i \leq 4s-2)] \vee [(i \equiv 3 \pmod{4}) \wedge (4r+3 \leq i \leq g-2)], \\ 3, & [(i \equiv 3 \pmod{4}) \wedge (3 \leq i \leq 4r-1)] \vee [(i \equiv 2 \pmod{4}) \wedge (4s+2 \leq i \leq g-3)]. \end{cases}$$

Nos exemplos das Figuras 3.5, 3.6 e 3.7 o conjunto V_i corresponde ao conjunto $\{u_i\} \cup B_i$, com $0 \leq i \leq g-1$.

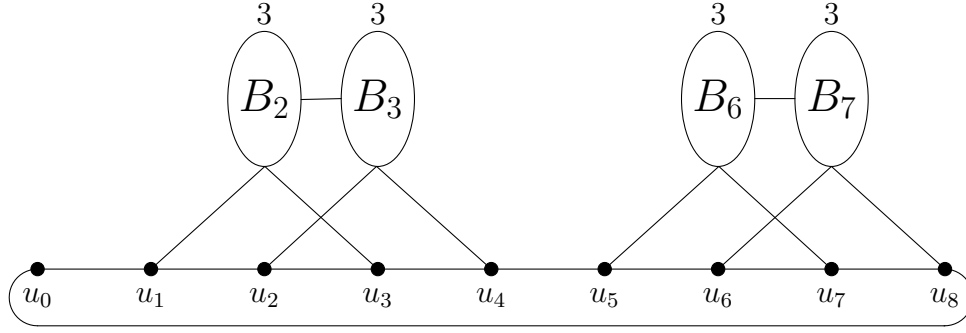


Figura 3.5: Exemplo do item (i): $G(1, 1, 4, 4, 1, 1, 4, 4, 1)$ e $g = 9$.

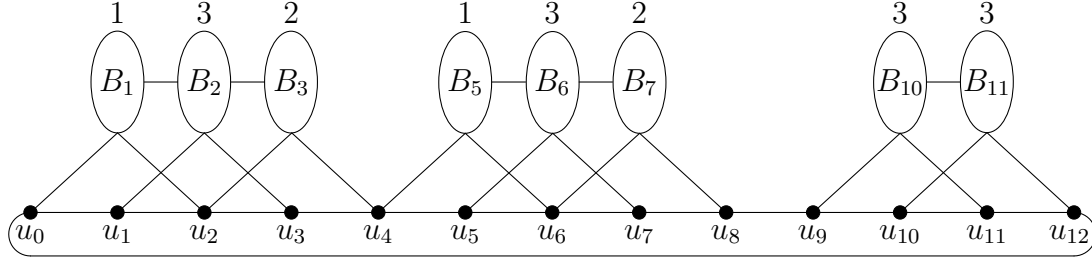


Figura 3.6: Exemplo do item (ii): $G(1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 1, 4, 4, 1)$, $g = 13$ e $r = 2$.

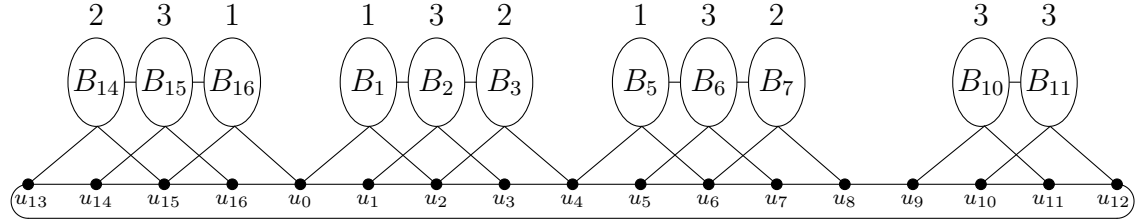


Figura 3.7: Exemplo do item (iii): $G(1, 2, 4, 3, 1, 2, 4, 3, 1, 1, 4, 4, 1, 3, 4, 2)$, $g = 17$, $r = 2$ e $s = 3$.

Proposição 9. *Se g é um inteiro ímpar com $g \equiv 1 \pmod{4}$, então $\mathcal{G}(5, 3, g)$ é a família de todos os grafos $(5, 3, g)$ -extremais.*

Demonstração. É imediato verificar que cada grafo G de $\mathcal{G}(5, 3, g)$ é um grafo $(5, 3, g)$ -extremal. De fato, todos os grafos de $\mathcal{G}(5, 3, g)$ tem cardinalidade do conjunto de vértices igual a $\frac{5g-3}{2}$, tem cintura ímpar g e tem a sua sequência de graus descrita nos itens a seguir:

- se G tem a estrutura do item (i), então o único vértice em V_0 tem grau 2 e todos os outros vértices tem grau 5,
- se G tem a estrutura do item (ii), então o único vértice em V_0 tem grau 3 e o único vértice em V_{4r} tem grau 4 e todos os outros vértices tem grau 5,

- se G tem a estrutura do item (iii), então os três vértices em $V_0 \cup V_{4r} \cup V_{4s+1}$ tem grau 4 e todos os outros tem grau 5.

Pelo Lema 3, segue que $n(5, 3, g) = \frac{5g-3}{2}$ e conseqüentemente todos grafos de $\mathcal{G}(5, 3, g)$ são grafos $(5, 3, g)$ -extremais.

Resta mostrar que cada grafo $(5, 3, g)$ -extremal pertence a $\mathcal{G}(5, 3, g)$. Seja G um grafo $(5, 3, g)$ -extremal. Considere novamente, a notação utilizada na demonstração do Lema 3, sejam C , K e $m_{C,K}$; e considere todos os índices módulo ℓ . Como $n(5, 3, g) = \frac{5g-3}{2}$, temos que a igualdade em (3.14) e (3.13) são atingidas; e a cintura ímpar de G é g . Isto é, $n = 2\left(\frac{5\ell-5}{4}\right) + 1$ e $3\ell - 3 = m_{C,K} = 2k$, portanto, $g = \ell$. Sejam $B_i = N_G(u_{i-1}) \cap N_G(u_{i+1}) \cap K$ e $b_i = |B_i|$. Como a igualdade em (3.14) é atingida, a escolha de C implica que:

- $V(C)$ contém uma das seguintes opções a seguir:
 - ou um vértice de grau 2,
 - ou um vértice de grau 3 e um outro de grau 4,
 - ou há três vértices de grau 4,

enquanto os vértices restantes de G tem grau 5;

- $K = B_0 \cup \dots \cup B_{g-1}$, ou seja, cada vértice de K tem exatamente dois vizinhos no conjunto C ; e
- cada vértice de B_i tem exatamente três vizinhos de $B_{i-1} \cup B_{i+1}$.

Dividimos a análise dos graus dos vértices de C em três casos:

Caso 1 C contém um vértice de grau 2.

Podemos assumir que $d_G(u_0) = 2$. Considerando os vizinhos de $u_2, u_6, \dots, u_{4i+2}, \dots, u_{g-3}$ em K , obtemos indutivamente que $b_{4i+3} = 3$ para $i \in \{0, \dots, \frac{g-5}{4}\}$. De fato, cada u_{4i+2} , com $0 \leq i \leq \frac{g-5}{4}$, tem três vizinhos em K . Como u_0 não tem vizinho em K , u_2 tem seus três vizinhos em B_3 , seguindo este argumento de forma recursiva, temos que u_6 tem seus vizinhos em B_7 , e assim por diante. Em particular, temos $b_{g-2} = 3$. Agora considerando os vizinhos de $u_1, u_5, \dots, u_{4i+1}, \dots, u_{g-4}$ em K , temos que $b_{4i+2} = 3$ para $i \in \{0, \dots, \frac{g-5}{4}\}$. As condições das arestas entre os vértices

u_i 's e K nos dois argumentos anteriores implicam que G é como o grafo descrito no item (i) da definição de $\mathcal{G}(5, 3, g)$.

Caso 2 C contém um vértice de grau 3 e um outro de grau 4.

Podemos assumir que $d_G(u_0) = 3$. Como B_1 e B_{g-1} tem seus vértices vizinhos a u_0 , podemos assumir que $b_1 = 1$ e $b_{g-1} = 0$. Como $b_1 + b_{g-1} < 3$, temos $b_0 = 0$. Pois se existisse pelo menos um vértice v em B_0 , v teria três vizinhos em $B_{g-1} \cup B_1$. Como $b_1 > 0$, existem pelo menos três vértices em $B_0 \cup B_2$; como $b_0 = 0$, temos que $b_2 \geq 3$. Como $d_G(u_1) \leq 5$, temos que $b_2 \leq 3$. Portanto, $b_2 = 3$. Como u_3 é vizinho dos vértices de B_2 e $d_G(u_3) \leq 5$, temos que $b_4 = 0$. Como $b_2 > 0$, existem pelo menos três vértices em $B_1 \cup B_3$, e portanto, $b_3 \geq 2$. Como $d_G(u_2) \leq 5$, temos que $b_3 \leq 2$. Portanto, $b_3 = 2$.

Se para algum inteiro positivo i , tivermos $b_{4i-1} = 2$, $b_{4i} = 0$ e $d_G(u_{4i}) = 5$. Então, $b_{4i+1} = 1$ e uma sequência análoga da argumentação anterior é iniciada, ou seja, $b_{4i+2} = 3$, $b_{4i+4} = 0$ e $b_{4i+3} = 2$. Através de argumentação indutiva, existe algum inteiro r com $1 \leq r \leq \frac{g-1}{4}$ tal que

$$\begin{aligned} d_G(u_{4r}) &= 4 \text{ e} \\ (b_0, \dots, b_{4r-1}, b_{4r}, b_{4r+1}) &= (0, 1, 3, 2, 0, 1, 3, 2, \dots, 0, 1, 3, 2, 0, 0), \end{aligned}$$

ou seja, a sequência dos conjuntos $\{b_{4i+1}, b_{4i+2}, b_{4i+3}, b_{4i+4}\} = \{1, 3, 2, 0\}$, com $0 \leq i \leq r-1$, chega ao fim em b_{4r} .

Agora, considere os vizinhos de $u_{4r+1}, u_{4r+2}, u_{4r+5}, u_{4r+6}, \dots, u_{g-4}, u_{g-3}$ em K . Como u_{4r+1} é vizinho dos vértices de $B_{4r} \cup B_{4r+2}$, $b_{4r} = 0$ e $d_G(u_{4r+1}) = 5$, temos $b_{4r+2} = 3$. Com um argumento análogo ao anterior conclui-se que $b_{4r+3} = 3$. Como u_{4r+3} é vizinho dos vértices de $B_{4r+2} \cup B_{4r+4}$, $b_{4r+2} = 3$ e $d_G(u_{4r+3}) = 5$, temos $b_{4r+4} = 0$. Com um argumento análogo ao anterior conclui-se que $b_{4r+5} = 0$. Através de argumentação indutiva, obtemos

$$(b_{4r+2}, b_{4r+3}, b_{4r+4}, b_{4r+5}, \dots, b_{g-1}) = (3, 3, 0, 0, 3, 3, 0, 0, \dots, 3, 3, 0).$$

As condições das arestas entre os vértices u_i 's e K nos argumentos anteriores implicam que G é como o grafo descrito no item (ii) da definição de $\mathcal{G}(5, 3, g)$.

Caso 3 C contém três vértices de grau 4.

Podemos assumir que $d_G(u_0) = 4$. Primeiramente, como hipótese adicional, assumiremos que para cada u_i de grau 4 teremos a configuração $\{b_{i-1}, b_{i+1}\} = \{0, 2\}$. Como B_1 e B_{g-1} tem seus vértices adjacentes a u_0 , temos que $b_1 = 2$ e $b_{g-1} = 0$. Como $b_{g-1} + b_1 < 3$, temos $b_0 = 0$.

Afirmção. Se para algum inteiro positivo i , tem-se $b_{4i-4} = 0$ e $b_{4i-3} = 2$, então $b_{4i} = 0$, $b_{4i+1} = 2$ e $d_G(u_{4i-3}) = d_G(u_{4i-2}) = d_G(u_{4i-1}) = d_G(u_{4i}) = 5$.

De fato, temos que:

- (a) $b_{4i-3} > 0$, $d_G(u_{4i-3}) \leq 5$ e $d_G(u_{4i-1}) \leq 5$, implica que $b_{4i-2} = 3$ e $b_{4i} = 0$, portanto, $d_G(u_{4i-3}) = 5$ e $d_G(u_{4i-1}) = 5$; e
- (b) $b_{4i-3} = 2$, $b_{4i-2} > 0$ e $d_G(u_{4i-2}) \leq 5$, implica que $b_{4i-1} = 1$, portanto, $d_G(u_{4i-2}) = 5$.

Justificativa de (a): todos os vértices de B_{4i-3} são vizinhos de $B_{4i-4} \cup B_{4i-2}$; como $b_{4i-4} = 0$ e cada vértice de B_{4i-3} tem três vizinhos além dos dois vizinhos em C , temos que $b_{4i-2} = 3$.

Justificativa de (b): todos os vértices de B_{4i-2} são vizinhos de $B_{4i-3} \cup B_{4i-1}$; como $b_{4i-3} = 2$ e cada vértice de B_{4i-2} tem três vizinhos além dos dois vizinhos em C , temos que $b_{4i-1} = 1$.

Pela hipótese adicional $b_{4i-1} = 1$, temos que $d_G(u_{4i}) = 5$; se u_{4i} tivesse grau 4, teríamos $b_{4i-1} = 0$ e $b_{4i+1} = 2$; mas $b_{4i-1} = 1$. Como $b_{4i-1} = 1$ e $d_G(u_{4i}) = 5$, temos $b_{4i+1} = 2$.

Como $b_0 = 0$ e $b_2 = 2$, (estamos na situação da hipótese adicional para $i = 1$), temos que todos os vértices u_j tem grau igual a 5, com $j \geq 1$. Mas isso contradiz o fato de haver três vértices de grau 4.

Logo, a hipótese adicional gera uma contradição, ou seja, desses três vértices de grau 4 existe algum u_i com a configuração $\{b_{i-1}, b_{i+1}\} = \{1, 1\}$.

Agora, podemos aplicar uma argumentação análoga ao Caso 2 em ambas “direções”, isto é, nas direções $u_0, u_1, u_2, \dots, u_{g-1}$ e $u_0, u_{g-1}, u_{g-2}, \dots, u_1$, e obter a estrutura das arestas entre os vértices u_i 's e K em G , e daí, concluir que G é como o grafo descrito no item (iii) da definição de $\mathcal{G}(5, 3, g)$. \square

Capítulo 4

Jogo Firefighter

Neste capítulo apresentamos as regras, definições, terminologias usadas no jogo *firefighter*, Seções 4.1 e 4.2, e em seguida as nossas contribuições relacionadas a este tema. Na Seção 4.3, apresentamos propriedades para estratégias ótimas que serão usadas nas seções seguintes. Na Seção 4.4, descrevemos um algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo que retorna uma estratégia para o jogo *firefighter* em árvores. Na Seção 4.5, mostramos que se T é uma árvore de ordem n e grau máximo Δ fixado, então a taxa média dos vértices salvos é maior que $1 - O(\frac{\log n}{n})$. Finalmente, na última seção, apresentamos os algoritmos que fornecem estratégias próximas de uma estratégia ótima para a variação do jogo *firefighter* com pesos sobre os vértices de um grafo.

4.1 Firefighter: regras e terminologias

Considere um par ordenado (G, F) onde G é um grafo simples, conexo e F é um subconjunto de $V(G)$ com $|F| = f$ inteiro positivo fixo. O jogo *firefighter* procede em rodadas. Antes do início do jogo os vértices de F estão *queimados*, chamaremos esses tais vértices de *focos de incêndio* ou simplesmente *focos*. Em cada rodada, no máximo d vértices de G são *defendidos* pelo jogador, onde d é um inteiro positivo fixo e então, todos os vértices de G que não estão queimados ou defendidos, e tem um vizinho queimado, são queimados. Todos os vértices, uma vez queimados ou defendidos, permanecem neste estado até o fim do jogo. O jogo termina na primeira rodada em que não há mais vértices queimados com vizinhos que não

foram queimados nem defendidos em rodadas anteriores. Ao final do jogo, todos os vértices de G que não estão queimados são chamados de *salvos*.

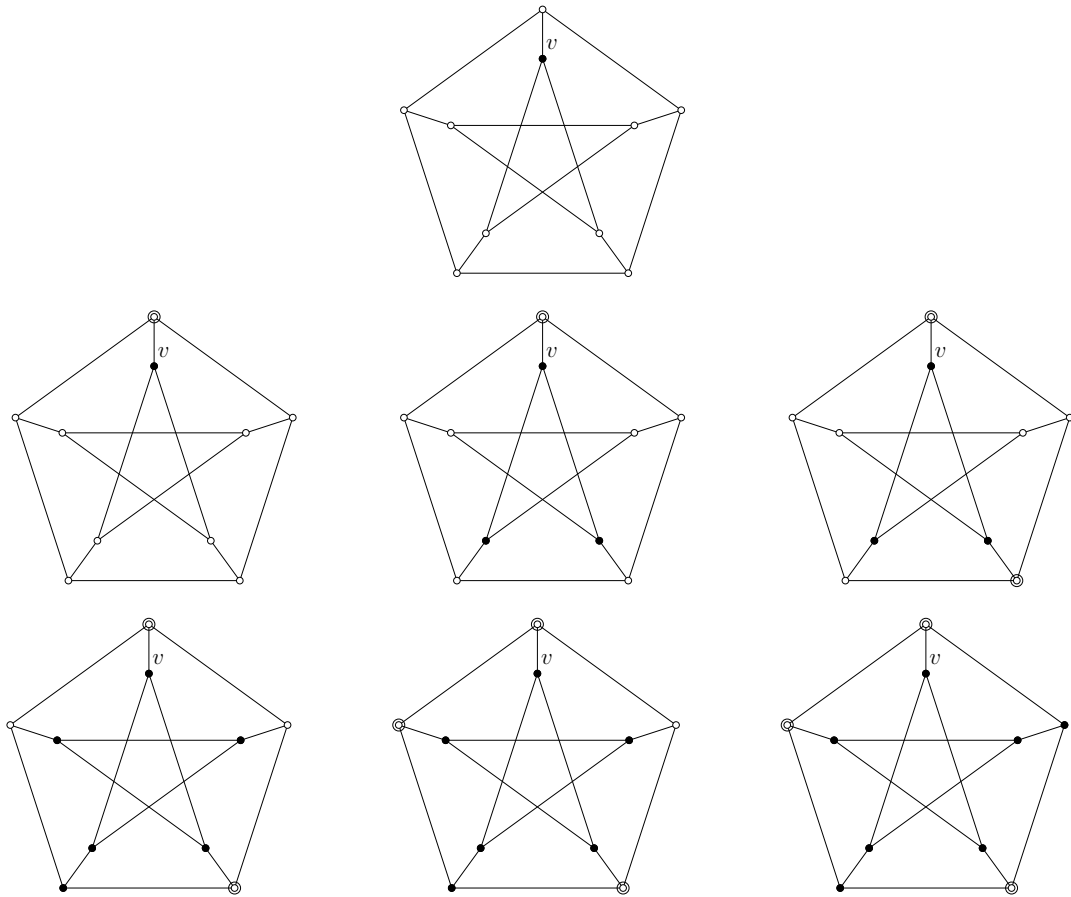


Figura 4.1: Jogo *firefighter* com instância $(G, \{v\})$, onde G é o grafo de Petersen e o jogador defende no máximo 1 vértice por rodada. Representamos os vértices definidos com um ciclo em torno do mesmo e representamos os vértices queimados com a cor preta.

Dado um par ordenado (G, F) do jogo *firefighter*, há diferentes maneiras do jogador, a cada nova rodada, escolher os vértices que são defendidos. Considere a sequência $\sigma = (D_1, D_2, \dots)$ de subconjuntos de vértices de $V(G)$ com $|D_i| \leq d$ onde D_i denota o conjunto dos vértices que são defendidos na rodada i . Uma estratégia σ é dita *adjacente* se cada vértice defendido pela estratégia σ , em qualquer rodada durante o jogo, tem um vizinho que foi queimado na rodada anterior. De modo similar, uma estratégia σ é chamada *minimal*, se cada vértice defendido pela estratégia σ durante o jogo, tem um vizinho que é queimado em algum momento até o fim do jogo. Claramente, cada estratégia adjacente é minimal.

4.2 Firefighter: problemas de decisão e otimização

Um dos problemas mais pesquisados sobre o jogo *firefighter* com $f = d = 1$ é o problema de decisão FIREFIGHTER que tem como instância o par ordenado $(G, \{r\})$ e um inteiro positivo k . Nele questiona-se: existe uma estratégia σ que salva no mínimo $n(G) - k$ vértices? Um resultado interessante relacionado a este problema foi dado por Finbow et al. [28] que mostra que FIREFIGHTER é NP-completo para árvores com grau máximo três, porém este mesmo problema é polinomial se r tem grau dois. Outro problema de decisão bastante conhecido é o 3FL-FIRE que tem como instância o par ordenado $(T, \{r\})$ e $\Delta(T) \leq 3$ onde T é uma árvore. Nele questiona-se: existe uma estratégia que salva todas as folhas de T ? MacGillivray e King [38] mostraram que este problema é também NP-completo.

Há uma infinidade de objetivos para o jogo *firefighter*, por exemplo: salvar o número máximo possível de vértices do grafo, minimizar o número de rodadas para se terminar o jogo, determinar se um conjunto de vértices específico pode ser salvo, etc. Cada um destes objetivos nos remetem a diferentes problemas de decisão ou de otimização. Neste trabalho nos concentramos em dois problemas de otimização: o primeiro consiste em maximizar o número total de vértices salvos, e o segundo consiste em, dado um grafo rotulado com pesos nos vértices, maximizar a soma de todos os pesos dos vértices salvos ao final do jogo. Em sequência estão as definições formais destes dois problemas.

MAX f - d -FIREFIGHTER

Instância: (G, F) onde G é um grafo e F é um subconjunto de vértices de G de ordem f .

Questão: Determinar uma estratégia $\sigma = (D_1, D_2, \dots)$ para o jogo *firefighter* com configuração inicial (G, F) e no máximo d vértices defendidos por rodada que salva o número máximo possível de vértices.

MAX WEIGHTED f - d -FIREFIGHTER

Instância: $((G, w), F)$ onde G é um grafo, $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma função peso não negativa e F é um conjunto de vértices de G com cardinalidade f .

Questão: Determinar uma estratégia $\sigma = (D_1, D_2, \dots)$ para o jogo *firefighter* com configuração inicial (G, F) e no máximo d vértices defendidos por rodada que maximize o peso total dos vértices salvos.

4.3 Propriedades das estratégias ótimas

Nesta seção apresentamos propriedades para estratégias ótimas em árvores no jogo *firefighter*.

Para cada instância (G, F) do MAX f - d -FIREFIGHTER sempre existe uma estratégia ótima que é minimal. De fato, suponha, por absurdo, que qualquer estratégia ótima é não minimal para uma instância (G, F) . Então dado uma estratégia ótima σ , existe algum vértice u defendido na rodada i tal que nenhum vértice de $N_G(u)$ é queimado até término do jogo, ou seja, todo (v_f, u) -caminho com $v_f \in F$ tem um vértice diferente de u que foi defendido. Logo, podemos obter uma nova estratégia σ' que defende, na rodada i , um vértices vizinho de outro vértice que foi queimado na rodada $i - 1$ ao invés de u e nas outras defesas σ' faz as mesmas que σ . Portanto, temos que σ' salva pelo menos um vértice a mais do que σ , uma contradição.

MacGillivray e Wang [41], bem como Hartnell e Li [33] observaram que cada estratégia ótima para uma instância $(T, \{r\})$ do MAX f - d -FIREFIGHTER é adjacente, onde T é uma árvore. Similarmente, é fácil ver que cada estratégia ótima minimal para uma instância $(T, \{r\})$ do MAX f - d -FIREFIGHTER é também adjacente, para T uma árvore. Porém, este fato não é mais verdade para $f \geq 3$ como apresentamos no exemplo da Figura 4.2. Segue então o resultado:

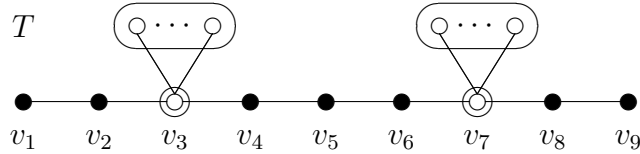


Figura 4.2: Se os graus de v_3 e v_7 são suficientemente grandes, então para uma instância $(T, \{v_1, v_5, v_9\})$ do MAX 3-1-FIREFIGHTER, uma estratégia ótima defende v_3 e v_7 nas duas primeiras rodadas, ou seja, quando o primeiro vértice é defendido, ele não tem um vizinho que foi queimado na rodada anterior.

Lema 10. *Se σ é uma estratégia para o jogo firefighter com configuração inicial (G, F) e D é um conjunto de vértices defendidos por σ em alguma rodada durante o jogo, então, σ é minimal se, e somente se, para cada vértice $u \in D$, existe um caminho P_u em G entre u e um vértice de F tal que nenhum vértice interno de P_u pertence ao conjunto $D \cup F$.*

Demonstração. Segue trivialmente da definição de estratégia minimal. \square

Para uma árvore T e um conjunto F de vértices de T , considere T_F a subárvore minimal de T que contém todos os vértices de F . Nosso próximo resultado mostra que a observação anterior em relação a minimalidade ainda é assegurada para vértices que não estão em T_F .

Lema 11. *Sejam f e d dois inteiros positivos. Seja σ uma estratégia ótima minimal para uma instância (T, F) do MAX f - d -FIREFIGHTER onde T é uma árvore. Cada vértice que não pertence a T_F e é defendido por σ em alguma rodada i durante o jogo, tem um vizinho que foi queimado na rodada $i - 1$. Ou seja, σ é uma estratégia adjacente no conjunto $T \setminus T_F$.*

Demonstração. Suponha, por contradição, que algum vértice u que não pertence a T_F é defendido por σ na rodada i , mas não tem nenhum vizinho queimado na rodada $i - 1$. Seja v o vizinho de u no único (v_f, u) -caminho mais curto em T onde v_f é um vértice de T_F . Como σ é minimal, v é queimado até o fim do jogo, porém, pela hipótese, ele não é queimado na rodada $i - 1$. Portanto, defendendo v ao invés de u na rodada i e mantendo a sequência de defesa da estratégia σ no restante das rodadas, salvamos pelo menos um vértice a mais do que na estratégia σ . Logo, obtemos uma contradição. \square

Em vista do exemplo Figura 4.2 o seguinte resultado é um pouco surpreendente, pois ele mostra que todo exemplo necessita de $f \geq 3$.

Teorema 12. *Seja d um inteiro positivo. Toda estratégia ótima minimal σ para uma instância (T, F) do MAX 2 - d -FIREFIGHTER é adjacente, onde T é uma árvore.*

Demonstração. Seja σ uma estratégia ótima minimal para (T, F) . Seja D o conjunto de vértices defendidos por σ em alguma rodada durante o jogo. Temos que T_F é o único caminho P em T que liga os dois vértices de F . Considere $P : v_1 v_2 \dots v_l$. Se $D \cap V(P)$ é vazio, $D \subset T \setminus T_F$, pelo Lema 11, temos que σ é adjacente. Portanto, podemos considerar apenas os vértices em $D \cap V(P)$ e podemos assumir que $D \cap V(P)$ é não vazio. Como P é um caminho e σ é minimal, pelo Lema 10, temos que $D \cap V(P)$ contém no máximo dois vértices.

Primeiramente, assumimos que $D \cap V(P)$ contém exatamente dois vértices, digamos v_x e v_y com $x < y$. Como σ é ótimo, v_x é defendido na rodada x ou antes, e v_y

é defendido na rodada $l - y$ ou antes. Suponha, por absurdo, que v_x é defendido em alguma rodada e que até a rodada anterior o vértice v_{x-1} não foi queimado. Então podemos defender v_{x-1} ao invés de v_x nesta rodada e manter as mesmas defesas das outras rodadas de σ , e assim conseguiríamos salvar mais vértices com essa nova estratégia do que com a estratégia σ . Mas isso contraria o fato de σ ser ótima. Com um argumento parecido ao anterior, concluímos v_{l-y+1} foi queimado na rodada anterior à rodada em que v_{l-y} foi defendido.

Agora, considere o caso que $D \cap V(P)$ tem exatamente um vértice, digamos v_x . Suponha que v_x foi defendido na rodada i . Suponha, por absurdo, que $i < \min\{x, l - x\}$, ou seja, nem v_{x-1} nem v_{x+1} foram queimados na rodada $i - 1$. Se o jogo termina na rodada i , então, como σ é ótimo, v_{x-1} e v_{x+1} são queimados na rodada i . Porém, se defendermos v_{x-1} ao invés de v_x na rodada i , defendermos v_x na rodada $i + 1$ e fazendo as mesmas defesas da rodada 1 até $i - 1$ de σ , conseguiríamos salvar mais vértices com essa estratégia do que com a estratégia σ contrariando o fato de σ ser ótimo. Se o jogo não termina na rodada i , então, seja u um vértice defendido na rodada $i + 1$. Como $u \notin T_F$, pelo Lema 11, temos que u tem um vizinho v queimado na rodada i que está no único caminho entre u e um vértice de P em T . Então, se defendermos v ao invés de v_x na rodada i , defendermos v_x ao invés de u na rodada $i + 1$ e fizermos as mesmas defesas das outras $i - 1$ rodadas de σ , conseguiríamos salvar mais vértices com essa estratégia do que com a estratégia σ , contrariando o fato de σ ser ótimo. Estas contradições implicam que cada vértice defendido em alguma rodada durante o jogo tem um vizinho que foi queimado na rodada anterior. Portanto, σ é adjacente. \square

O próximo lema explora a caracterização da minimalidade dada no Lema 10.

Lema 13. *Sejam T uma árvore, e F, D dois subconjuntos de vértices de $V(T)$. Se*

- (i) *todas as folhas de T pertencem a F ,*
- (ii) *D e F são conjuntos disjuntos,*
- (iii) *para cada vértice u em D , existe um caminho P_u em T que liga u a um vértice de F tal que nenhum vértice interno de P_u pertence a $D \cup F$,*

então $|D| \leq 2(|F| - 1)$.

Demonstração. Esta prova será por indução sobre a ordem n da árvore T . Se $n = 1$, temos que T é um vértice, portanto, apenas um foco de incêndio. Logo, temos que a inequação é verdadeira. Agora, suponha que $n \geq 2$. Seja v uma folha de T . Seja P um caminho maximal em T começando em v e tal que todos os vértices internos de P tem grau 2 e não pertencem a F . Note que P tem ordem ao menos 2. Denote por w outro vértice extremo de P distinto de v . Note que, se $w \notin F$, então w tem pelo menos grau 3. Seja $T' = T - (V(P) \setminus \{w\})$, $F' = F \setminus \{v\}$ e $D' = D \setminus V(P)$.

Afirmção. Há no máximo dois vértices internos de P que estão em D .

De fato, suponha que exista mais que dois vértices de D em P , a saber w_1, w_2, \dots, w_k . Então para cada vértice w_i com $2 \leq i \leq k - 1$, os vértices w_1 e w_k seriam vértices internos de qualquer caminho P_{w_i} , o que contraria a hipótese do item (iii) do lema.

Primeiramente, assumiremos que $w \in F$. Aplicando a hipótese de indução no terno (T', F', D') , temos $|D| \leq |D'| + 2 \leq 2(|F'| - 1) + 2 = 2(|F| - 1)$. A primeira desigualdade vem da afirmação anterior e a segunda desigualdade vem da hipótese de indução.

Agora, considere que w não pertence a F . Se o terno (T', F', D') satisfaz as hipóteses, podemos fazer um argumento idêntico ao anterior e concluir que $|D| \leq 2(|F| - 1)$. Então, suponha que o terno (T', F', D') não satisfaz as hipóteses.

Afirmção. Se o terno (T', F', D') não satisfaz as hipóteses, então nenhum vértice interno de P pertence a D .

De fato, temos que (T', F', D') satisfaz o primeiro item da hipótese, pois w tem grau pelo menos três; e claramente satisfaz o segundo item da hipótese, pois D' e F' são subconjuntos de D e F , respectivamente. Portanto, (T', F', D') não satisfaz o terceiro item das hipóteses. Logo, existe algum $u \in D'$ tal que para todo $v' \in F'$ existe pelo menos um vértice de $D' \cup F'$ no conjunto dos vértices internos do (u, v') -caminho. Porém, $u \in D$ e (T, F, D) satisfaz as hipóteses, portanto, existe algum caminho P_u que inicia em u e termina em algum vértice de $F \setminus F'$ tal que nenhum vértice interno deste caminho tem algum vértice de $D \cup F$. Como $F \setminus F' = \{v\}$, temos que P_u só pode ser o (u, v) -caminho que contém o caminho P .

Onde concluímos que não pode haver um vértice de D no caminho P .

Seja T'' a árvore construída a partir de T contraindo o caminho P a um novo vértice x , ou seja, pegaremos todos os vértices de P e substituiremos por x . Como P tem pelo menos uma aresta, temos que T'' tem pelo menos um vértice a menos que T . Sejam $F'' = (F \setminus \{v\}) \cup \{x\}$ e $D'' = D$. Por construção, o terno (T'', F'', D'') satisfaz as hipóteses. Portanto, aplicando a hipótese de indução, temos $|D| = |D''| \leq 2(|F''| - 1) = 2(|F| - 1)$. \square

Os Lemas 10 e 13 implicam no seguinte resultado.

Teorema 14. *Sejam f e d dois inteiros positivos. Para cada estratégia ótima minimal σ e para uma instância (T, F) do MAX f - d -FIREFIGHTER onde T é uma árvore, o número de vértices de T_F defendidos por σ durante o jogo é no máximo $2(|F| - 1)$.*

Demonstração. Segue diretamente dos Lemas 10 e 13. Basta observar que se σ é minimal, então, pelo Lema 10, σ satisfaz as hipóteses do Lema 13 e consequentemente temos a tese deste mesmo lema. \square

4.4 Aproximação para árvores com f e d fixados

Nesta seção estendemos o algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo para MAX 1-1-FIREFIGHTER restrito a árvores (proposto por Alspach [29]) e analisado por Cai et al. [9]) para MAX f - d -FIREFIGHTER com valores arbitrários de f e d fixos.

Considere f e d números inteiros positivos fixos e seja (T, F) uma instância do MAX f - d -FIREFIGHTER, onde T é uma árvore de ordem n .

A ideia chave para obter esse algoritmo aproximativo é considerar todos os possíveis comportamentos de uma estratégia ótima minimal σ em T_F , ou seja, considerar em quais vértices de T_F a estratégia σ defende e em que rodada. Observe, pelo Teorema 14, o número total de vértices defendidos em T_F por σ em algum ponto do jogo é no máximo $2(f - 1)$. Além disso, como o número máximo de rodadas para o jogo é limitado por n , existem no máximo n rodadas para que um vértice específico possa ser defendido por σ . Portanto, o número possível de maneiras diferentes de

defesa para σ sobre T_F é da ordem $O(n^{4(f-1)})$. De fato, sabemos que há $\binom{n}{2(f-1)}$ escolhas para $2(f-1)$ vértices que serão defendidos; para cada escolha há n possíveis rodadas para defender esses vértices em T_F , ou seja,

$$\binom{n}{2(f-1)} \cdot \underbrace{(n.n \dots n)}_{2(f-1) \text{ termos}} \leq n^{2(f-1)} n^{2(f-1)} = n^{4(f-1)}.$$

Sabemos que uma estratégia σ pode ser completamente descrita através de uma sequência

$$\mathcal{D} = (D_1^0, D_2^0, \dots, D_n^0), \quad (4.1)$$

onde D_i^0 denota o conjunto de vértices de T_F defendido por σ na rodada i . Dizemos que a sequência \mathcal{D} como em (4.1) é uma *suposição razoável*, se:

- os D_i^0 são conjuntos disjuntos com cardinalidade no máximo d ,
- $|D_1^0 \cup D_2^0 \cup \dots \cup D_n^0| \leq 2(f-1)$,
- a estratégia σ^0 que defende na rodada i , $1 \leq i \leq n$, os vértices do conjunto D_i^0 que não foram queimados na rodada $i-1$ salva todos os vértices do conjunto $D_1^0 \cup D_2^0 \cup \dots \cup D_n^0$.

Note que a primeira condição assegura que nenhum vértice é defendido mais de uma vez, a segunda condição é por causa do Teorema 14 e a última condição assegura que nenhum vértice queimado de T_F será defendido. As possíveis escolhas de defesa de cada estratégia ótima minimal sobre T_F corresponde a alguma suposição razoável.

A partir de agora considere, até o restante desta seção, que $\mathcal{D} = (D_1^0, D_2^0, \dots, D_n^0)$ é uma suposição razoável fixada.

Vamos adaptar uma programação linear inteira formulada por MacGillivray e Wang no artigo [41] a fim de determinar uma estratégia minimal σ tal que:

- (σ_1) a possível escolha de defesa de σ sobre T_F corresponde a \mathcal{D} , ou seja, na rodada i a estratégia σ defende exatamente estes vértices de T_F que pertencem ao conjunto D_i^0 ,
- (σ_2) a estratégia σ só defende um vértice u que não pertencente a $V(T_F)$ em alguma rodada i , se u tem pelo menos um vizinho que foi queimado na rodada $i-1$,

(σ_3) sujeito as condições (σ_1) e (σ_2), a estratégia σ salva o número máximo possível de vértices de T .

Note que as condições (σ_1), (σ_2) e (σ_3) asseguram que σ é uma suposição razoável, satisfaz o Lema 11 e é uma estratégia ótima, respectivamente.

Seja $T^0 = T - (D_1^0 \cup D_2^0 \cup \dots \cup D_n^0)$. Denote por L_i o conjunto de vértices $u \in V(T) \setminus V(T_F)$ cuja distância ao conjunto F na árvore T^0 é exatamente i com $1 \leq i \leq n$, ou seja,

$$L_i = \left\{ u \in V(T) \setminus V(T_F) \mid \min\{\text{dist}_{T^0}(u, v) \mid v \in F\} = i \right\}.$$

Considere $L = L_1 \cup \dots \cup L_n$. Veja um exemplo de uma árvore onde são descritos os seus conjuntos L_i 's na Figura 4.3.

Por (σ_1), o conjunto \mathcal{D} determina completamente os vértices de T_F que serão salvos por σ . De modo similar, todos os vértices de $V(T) \setminus (V(T_F) \cup L)$ serão salvos por σ , pois esses conjuntos são componentes de T^0 que não contém vértices de F .

Agora analisaremos as situações em que σ salva um vértice em L . Seja v_j um vértice em L_j . Considere $v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ o único caminho mais curto entre $v_i \in T_F$ e v_j em T , ou seja, $v_l \in L_l$ com $i+1 \leq l \leq j$. Note que v_i não pertence ao conjunto L_i .

Afirmção. A estratégia σ salva v_j se, somente se, existe algum inteiro k com $i+1 \leq k \leq j$ tal que σ defende v_k na rodada k e σ não defende nenhum vértice no conjunto $\{v_l \mid i+1 \leq l \leq j\} \setminus \{v_k\}$.

(\Rightarrow) Claramente algum vértice v_k do conjunto $v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ tem que ser defendido. O problema está em saber em qual rodada ocorrerá a defesa. Pela condição (σ_2), temos que σ é adjacente em $T \setminus T_F$. Portanto, se v_k for defendido, então esta defesa ocorre na rodada posterior a rodada em que algum vizinho de v_k foi queimado; e, por definição, temos que os vértices de L_{k-1} só podem ser queimados na rodada $k-1$. Logo, v_k só pode ser defendido na rodada k .

(\Leftarrow) Suponha, por absurdo, que v_k é defendido em alguma rodada l anterior à rodada k . Portanto, v_k não tem nenhum vizinho que foi queimado na rodada $l-1$, pois, por definição, os vértices de L_{k-1} só podem ser queimados na rodada $k-1$. Logo, temos que σ não satisfaz a condição (σ_2) gerando uma contradição.

Dado dois vértices u e v de L , não necessariamente distintos, se u pertence ao único caminho mais curto entre v e algum vértice de T_F em T , denotaremos por $u \preceq v$.

Veja a Figura 4.3 como exemplo.

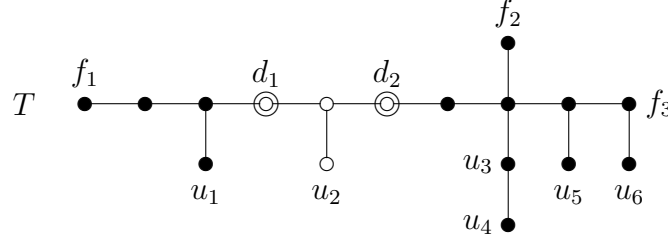


Figura 4.3: Para a árvore T , $F = \{f_1, f_2, f_3\}$ e $d = 1$, uma suposição razoável seria $\mathcal{D} = (\{d_1\}, \{d_2\}, \emptyset, \dots, \emptyset)$, ou seja, σ defende apenas d_1 e d_2 nas duas primeiras rodadas. Temos $T_F = T - \{u_1, \dots, u_6\}$ e σ salva exatamente 3 vértices de T_F . $L_1 = \{u_6\}$, $L_2 = \{u_3, u_5\}$ e $L_3 = \{u_1, u_4\}$. O único par de vértices relacionados por \preceq é u_3, u_4 com $u_3 \preceq u_4$. O vértice u_2 não pertence a L .

Note que na rodada i , σ pode defender no máximo $d_i = d - |D_i^0|$ vértices que não pertencem a T_F , pois σ defendeu $|D_i^0|$ vértices em T_F .

As argumentações anteriores nos conduzem ao seguinte problema de programação linear inteira, onde para cada vértice $u \in L$, a 0-1-variável x_u é exatamente igual a 1, se a estratégia σ defende o vértice u .

$$\begin{aligned}
 & \text{maximize} && \sum_{v \in L} \sum_{u: u \preceq v} x_u \\
 & \text{sujeito a} && \sum_{u \in L_i} x_u \leq d_i \quad \text{para cada } i \text{ com } 1 \leq i \leq n \\
 & && \sum_{u: u \preceq v} x_u \leq 1 \quad \text{para cada } v \text{ em } L \\
 & && x_u \in \{0, 1\} \quad \text{para cada } u \text{ em } L.
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A primeira condição limita o número de defesas de σ em $T \setminus T_F$, pois σ só pode defender algum vértice em L_i na rodada i se $0 < d_i = d - |D_i^0|$; a segunda condição garante que nenhum descendente de um vértice defendido seja defendido também. Note que cada vértice $v \in L$ que tem um ancestral $u \in L$ defendido por σ e que pertence ao único caminho mais curto entre v e algum vértice de T_F em T , contribui com uma unidade no somatório.

Afirmação. Como a função objetivo em (4.2) é o número de vértices em L que são salvos por σ , cada solução ótima de (4.2) corresponde a uma estratégia σ que satisfaz as condições (σ_1) , (σ_2) e (σ_3) .

De fato, (σ_1) é satisfeito, pois, por construção, \mathcal{D} satisfaz às condições de suposição razoável; (σ_2) é satisfeito pela afirmação anterior; e (σ_3) é satisfeito pela maximização da função objetivo em (4.2) e, pelo Teorema 14, há um número limitado de opções de escolhas para \mathcal{D} .

De maneira similar a argumentação de Cai et al. [9], obtemos o seguinte resultado relacionado ao programa linear inteiro descrito anteriormente.

Lema 15. *Seja $(\tilde{x}_u)_{u \in L}$ uma solução ótima do programa linear inteiro construído a partir de (4.2), relaxando a condição “ $x_u \in \{0, 1\}$ ” para “ $0 \leq x_u \leq 1$ ” para todo u pertencente a L . Existe um algoritmo em tempo polinomial que determina uma solução viável $(x_u)_{u \in L}$ para (4.2) tal que*

$$\sum_{v \in L} \sum_{u: u \preceq v} x_u \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{v \in L} \sum_{u: u \preceq v} \tilde{x}_u.$$

Demonstração. Primeiramente, descreveremos um algoritmo randomizado e então esclareceremos o processo de derandomização deste algoritmo. Para $u \in L_i$, seja $p_u = \frac{\tilde{x}_u}{d_i}$. Como $\sum_{u \in L_i} p_u = \sum_{u \in L_i} \frac{\tilde{x}_u}{d_i} \leq 1$ para cada i , podemos considerar os valores de p_u , para $u \in L_i$, como probabilidades, pois $\sum_{u \in L_i} \tilde{x}_u \leq d_i$. Para cada i com $1 \leq i \leq n$, executamos d_i seleções aleatórias e independentes da forma a seguir. Em cada seleção única, escolhemos aleatoriamente ou um elemento de L_i , ou \emptyset tal que $u \in L_i$ é selecionado com a probabilidade p_u e \emptyset é selecionado com a probabilidade $1 - \sum_{u \in L_i} p_u$. Resumindo, nós realizamos um total de $d_1 + d_2 + \dots + d_n$ seleções de forma aleatória e independente.

Agora, defina $(x_u)_{u \in L}$. Se algum $v \in L$ foi selecionado pelo menos uma vez e nenhum vértice $u \in L$ distinto de v com $u \preceq v$ foi selecionado, então considere $x_v = 1$. Caso contrário, considere $x_v = 0$. Como executamos d_i seleções relacionadas aos vértices de L_i , temos $\sum_{u \in L_i} x_u \leq d_i$, para cada i com $1 \leq i \leq n$. Além disso, como $u \preceq v$, temos que, x_u ou x_v são zeros, logo $\sum_{u: u \preceq v} x_u \leq 1$ para cada $v \in L$. Portanto, $(x_u)_{u \in L}$ é uma solução viável para (4.2).

Seja $v \in L$. Considere $\tilde{y}_v = \sum_{u: u \preceq v} \tilde{x}_u$ e $y_v = \sum_{u: u \preceq v} x_u$. Considere $v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ o

único caminho mais curto em T entre $v_i \in T_F$ e $v = v_j \in L_j$. Note que $y_v = 0$ se, somente se, nenhum vértice de $\{v_l \mid i + 1 \leq l \leq j\}$ foi selecionado.

Afirmção.

$$\mathbf{P}[y_v = 0] = \prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l}. \quad (4.3)$$

De fato, para que y_v seja igual a zero, todos os x_u 's tem que receber a atribuição zero, ou seja, $\mathbf{P}[y_v = 0] = \mathbf{P}[(x_{v_{i+1}} = 0) \cap (x_{v_{i+2}} = 0) \cap \dots \cap (x_{v_j} = 0)]$. Como a probabilidade de atribuir o valor 0 para cada x_{v_l} , $i + 1 \leq l \leq j$, é feita de modo independente em cada nível L_l , temos que $\mathbf{P}[(x_{v_{i+1}} = 0) \cap (x_{v_{i+2}} = 0) \cap \dots \cap (x_{v_j} = 0)] = \prod_{l=i+1}^j \mathbf{P}[x_{v_l} = 0]$, pois todas seleções dos vértices v_l são independentes. Além disso, para que os x_{v_l} 's tenham a atribuição zero, nenhum v_l com $i + 1 \leq l \leq j$ pode ser selecionado. Como a probabilidade de v_l não ser selecionado é $1 - p_{v_l}$ e existem d_l no máximo seleções em L_l , temos que a probabilidade de não selecionar v_l é $(1 - p_{v_l})^{d_l}$. Logo, $\mathbf{P}[x_{v_l} = 0] = (1 - p_{v_l})^{d_l}$ com $i + 1 \leq l \leq j$.

Afirmção.

$$\left(\prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \right)} \leq \frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j d_l (1 - p_{v_l}) \right). \quad (4.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \left(\prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \right)} &= \exp \left[\ln \left[\left(\prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right)^{\left(\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \right)} \right] \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \ln \left(\prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right) \right] \\ &= \exp \left[\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j \ln (1 - p_{v_l})^{d_l} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left[\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j d_l \ln(1 - p_{v_l}) \right) \right] \\
&\stackrel{(*)}{\leq} \exp \left[\ln \left[\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j d_l (1 - p_{v_l}) \right) \right] \right] \\
&= \frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j d_l (1 - p_{v_l}) \right),
\end{aligned}$$

onde (*) é assegurado pela Desigualdade de Jensen [37] aplicado à função côncava $\ln(x)$ e o comportamento não decrescente da função $\exp(x)$.

As duas afirmações anteriores implicam,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}[y_v = 1] &= 1 - \mathbf{P}[y_v = 0] \\
&\stackrel{(4.3)}{=} 1 - \prod_{l=i+1}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \\
&\stackrel{(4.4)}{\geq} 1 - \left(\frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j d_l (1 - p_{v_l}) \right) \right)^{\sum_{l=i+1}^j d_l} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{1}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \left(\sum_{l=i+1}^j \tilde{x}_{v_l} \right) \right)^{\sum_{l=i+1}^j d_l} \\
&= 1 - \left(1 - \frac{\tilde{y}_v}{\sum_{l=i+1}^j d_l} \right)^{\sum_{l=i+1}^j d_l} \\
&\stackrel{(**)}{\geq} 1 - e^{-\tilde{y}_v} \\
&\stackrel{(***)}{\geq} \left(1 - \frac{1}{e} \right) \tilde{y}_v,
\end{aligned}$$

onde (**) é assegurado pelo fato da sequência $\left(\left(1 + \frac{x}{k} \right)^k \right)_{k \in \mathbb{Z}_+}$ ser crescente com $x \in \mathbb{R}$ e pelo fato $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^k = e^x$; e (***) é assegurado pelo fato das funções

$$\begin{array}{ccc} \xi : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - e^{-x} \end{array} \quad e \quad \begin{array}{ccc} \zeta : [0, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1 - 1/e)x \end{array}$$

serem côncava e linear, respectivamente, e $\xi(0) = \zeta(0) = 0$, $\xi(1) = \zeta(1) = 1 - 1/e$. Finalmente, a linearidade da esperança implica que o valor esperado da função objetivo em (4.2) pela solução viável $(x_u)_{u \in L}$ satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \left[\sum_{v \in L} \sum_{u: u \preceq v} x_u \right] &= \mathbf{E} \left[\sum_{v \in L} y_v \right] \\ &= \sum_{v \in L} \mathbf{E} [y_v] \\ &= \sum_{v \in L} \mathbf{P} [y_v = 1] \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{v \in L} \tilde{y}_v \\ &= \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{v \in L} \sum_{u: u \preceq v} \tilde{x}_u. \end{aligned}$$

Resta mostrar a derandomização do algoritmo descrito, onde usaremos o método de esperança condicional. As definições e terminologias usadas neste métodos são baseadas no manuscrito 26º Colóquio Brasileiro de Matemática no IMPA [23], no curso de Introdução de Algoritmos Randomizados, em julho de 2007 e também podem ser encontradas no livro do Alon e Spencer [1].

Seja $L_l = \{v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{|L_l|}}\}$ com $1 \leq l \leq n$ e para cada $v_{l_i} \in L_l$, defina x_{l_i} a 0-1-variável referente ao vértice v_{l_i} .

$$\begin{array}{ccc} \text{Seja } \varphi_1 : & \{0, 1\}^{\sum_{l=1}^n |L_l|} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ & \underbrace{(x_{1_1}, \dots, x_{1_{|L_1|}})}_{X_1}, \underbrace{(x_{2_1}, \dots, x_{2_{|L_2|}})}_{X_2}, \dots, \underbrace{(x_{n_1}, \dots, x_{1_{|L_n|}})}_{X_n} & \longmapsto \sum_{v_i \in L} \sum_{u: u \preceq v_i} x_u \end{array}$$

Como as seleções entre os níveis L_l de L são independentes, temos

$$\mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)] = \sum_{\bar{X} \in \binom{|L_1|}{d_1}} \mathbf{P}[X_1 = \bar{X}] \cdot \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid X_1 = \bar{X}].$$

Como a soma das probabilidades de todos os eventos possíveis em um espaço amostral é igual a 1, temos

$$\sum_{\bar{X} \in \binom{|L_1|}{d_1}} \mathbf{P}[X_1 = \bar{X}] = 1.$$

Os dois argumentos anteriores implicam que existe $\bar{X}_1 \in \binom{[L_1]}{d_1}$ tal que

$$\mathbf{E}[\varphi_1(\bar{X}_1, X_2, \dots, X_n)] \geq \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)].$$

De fato, se não existisse, teríamos

$$\mathbf{E}[\varphi_1(\bar{X}, X_2, \dots, X_n)] < \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)]$$

para todo $\bar{X} \in \binom{[L_1]}{d_1}$, e portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)] &= \sum_{\bar{X} \in \binom{[L_1]}{d_1}} \mathbf{P}[X_1 = \bar{X}] \cdot \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n) \mid X_1 = \bar{X}] \\ &< \sum_{\bar{X} \in \binom{[L_1]}{d_1}} \mathbf{P}[X_1 = \bar{X}] \cdot \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ &= \mathbf{E}[\varphi_1(X_1, X_2, \dots, X_n)], \end{aligned}$$

gerando uma contradição.

Como há $\binom{[L_1]}{d_1}$ escolhas para determinar todas as entradas de \bar{X}_1 e $\binom{[L_1]}{d_1} \leq |L_1|^{d_1}$, temos que o tempo gasto para determinar \bar{X}_1 é da ordem $O(|L_1|^{d_1})$, ou seja, podemos exibir \bar{X}_1 em tempo polinomial.

Seja $A_1 \subset L$ tal que, para todo $v \in A_1$ o único caminho $v_i v_{i+1} \dots v_{j-1} v_j$ com a menor distância entre $v_i \in F$ e $v = v_j$ em T tem o vértice v_{i+1} defendido. Denote $L \setminus A_1$ como o conjunto B_1 .

Se $v \in A_1$, temos que o vértice $u \in L_1$ tal que $u \preceq v$ foi selecionado, portanto,

$$\mathbf{P} \left[\sum_{u: u \preceq v} x_u = 1 \right] = \mathbf{P}[y_v = 1] = 1 - \left((1 - 1/d_1)^{d_1} \left(\prod_{l=2}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right) \right),$$

onde j é a distância entre v e o vizinho de u pertencente a F .

Se $v \in B_1$, temos que o vértice de L_1 ancestral v não foi selecionado, portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left[\sum_{u: u \preceq v} x_u = 1 \right] &= \mathbf{P}[y_v = 1] = 1 - \left((1 - 0/d_1)^{d_1} \left(\prod_{l=2}^j (1 - p_{v_l})^{d_l} \right) \right) \\ &= 1 - \prod_{l=2}^j (1 - p_{v_l})^{d_l}, \end{aligned}$$

onde j é a distância entre v e o vértice de F mais próximo dele.

Como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\varphi_1(\bar{X}_1, X_2, \dots, X_n)] &= \mathbf{E} \left[\sum_{v_i \in L} \sum_{u: u \preceq v_i} x_u \right] \\
&= \mathbf{E} \left[\sum_{v_i \in L} y_{v_i} \right] \\
&= \sum_{v_i \in A_1} \mathbf{E} [y_{v_i}] + \sum_{v_i \in B_1} \mathbf{E} [y_{v_i}] \\
&= \sum_{v_i \in A_1} \mathbf{P} [y_{v_i} = 1] + \sum_{v_i \in B_1} \mathbf{P} [y_{v_i} = 1]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

e os vértices de A_1 estão todos salvos, temos que o primeiro somatório em (4.5) nos dá um número fixado por \bar{X}_1 , considere

$$S_1 = \sum_{v_i \in A_1} \mathbf{P} [y_{v_i} = 1].$$

Como para todo $v \in B_1$, temos

$$\mathbf{P}[y_v = 1] = 1 - \prod_{l=2}^j (1 - p_{v_l})^{d_l},$$

ou seja, os vértices de A_1 não influenciam na probabilidade dos y_v 's com $v \in B_1$, podemos repetir os mesmos argumentos que descreve o algoritmo em L no conjunto B_1 . Com isso concluiremos

$$\mathbf{E} \left[\sum_{v \in B_1} \sum_{u: u \preceq v} x_u \right] \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{v \in B_1} \sum_{u: u \preceq v} \tilde{x}_u.$$

Em seguida, repetindo os mesmos argumentos de derandomização usando o método de esperança condicional através da nova função

$$\begin{array}{ccc}
\varphi_2 : & \{0, 1\}^{\sum_{l=2}^n |L_l|} & \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\
& \underbrace{(x_{2_1}, \dots, x_{2_{|L_2|}})}_{X_2}, \underbrace{(x_{3_1}, \dots, x_{3_{|L_3|}})}_{X_3}, \dots, \underbrace{(x_{n_1}, \dots, x_{1_{|L_n|}})}_{X_n} & \longmapsto \sum_{v_i \in B_1} \sum_{u: u \preceq v_i} x_u,
\end{array}$$

vamos obter $\bar{X}_2 \in \binom{|L_2|}{d_2}$ tal que

$$\mathbf{E}[\varphi_2(\bar{X}_2, X_3, \dots, X_n)] \geq \mathbf{E}[\varphi_2(X_2, X_3, \dots, X_n)].$$

E por seguinte, teremos o conjunto de vértices salvos A_2 que nos fixará o número

$$S_2 = \sum_{v_i \in A_2} \mathbf{P} [y_{v_i} = 1]$$

e nos dará poder de repetir o processo novamente no conjunto $(B_1 \setminus A_2) = B_2$.

Como as seleções entre os níveis de L são independentes, temos

$$\mathbf{E}[\varphi_1(\bar{X}_1, X_2, \dots, X_n)] = S_1 + \mathbf{E}[\varphi_2(X_2, \dots, X_n)].$$

Repetindo esse processo recursivamente até fixarmos o nível L_n , teremos

$$\mathbf{E}[\varphi_1(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_n)] = \sum_{l=1}^n S_l \geq \left(1 - \frac{1}{e}\right) \sum_{v \in L} \sum_{u: u \leq v} \tilde{x}_u.$$

Para cada l com $1 \leq l \leq n$, nós derandomizamos a decisão do algoritmo relativo a L_l , ou seja, nós definimos deterministicamente o valor de x_u para $u \in L_l$. Para cada l , os valores são definidos de tal modo que o valor esperado da função objetivo em (4.2) condicionada aos valores de x_u para $u \in L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_l$ é não decrescente.

Afirmção. Temos que avaliar e comparar $O(n^d)$ valores esperados condicionais para cada l com $1 \leq l \leq n$.

De fato, dado l fixo, como nós derandomizamos imediatamente a decisão relacionada a todos os vértices de L_l e o número de 0-1-variáveis x_u com atribuição 1 é no máximo d_l para os vértices $u \in L_l$, temos que o número de seleções “erradas” de defesa para os vértices que devem ser selecionados na rodada l é

$$\underbrace{n(n-1) \dots (n-(d-1))}_{d \text{ termos}}$$

no máximo. Logo, o número de escolhas na rodada i é da ordem $O(n^d)$.

Como d é fixo, essa avaliação e comparação poder ser feita por um algoritmo determinístico polinomial na qual produzirá uma solução viável $(x_u)_{u \in L}$ de (4.2). \square

Agora, apresentamos o principal resultado desta sessão.

Teorema 16. *Sejam f e d inteiros positivos. Existe um algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo para o jogo MAX f - d -FIREFIGHTER restrito à instâncias (T, F) onde T é uma árvore.*

Demonstração. Seja (T, F) uma instância. Para cada suposição razoável \mathcal{D} das $O(n^{4(f-1)})$ possíveis suposições razoáveis em (T, F) , determinamos uma solução viável $(x_u)_{u \in L}$ em (4.2) usando um algoritmo polinomial do Lema 15. Deste modo

\mathcal{D} determina $(x_u)_{u \in L}$ e \mathcal{D} juntamente com $(x_u)_{u \in L}$ determina uma estratégia $\sigma_{\mathcal{D}}$. Portanto, o algoritmo geral retorna a estratégia $\sigma_{\mathcal{D}_{\max}}$ que salva o maior número de vértices.

Seja σ^* uma estratégia ótima minimal de (T, F) e seja \mathcal{D}^* a suposição razoável correspondente aos vértices selecionados pela estratégia σ^* em T_F . Agora, considerando $\sigma_{\mathcal{D}^*}$ e a suposição razoável correspondente à \mathcal{D}^* juntamente com a solução viável $(x_u)_{u \in L}$ retornada pelo algoritmo do Lema 15. Temos que $\sigma_{\mathcal{D}^*}$:

- salva exatamente os mesmos vértices que σ^* em $V(T) \setminus L$,
- pelo Lema 15, salva pelo menos $(1 - 1/e)$ dos vértices de L salvos por σ^* .

Portanto, $\sigma_{\mathcal{D}^*}$ salva pelo menos $(1 - 1/e)$ dos vértices salvos por σ^* . Como $\sigma_{\mathcal{D}_{\max}}$ salva pelo menos o mesmo número de vértices que $\sigma_{\mathcal{D}^*}$, temos o resultado desejado. \square

Se adaptarmos a ideia descrita nesta seção usando o algoritmo guloso proposto por Hartnell e Li [33] ao invés do algoritmo randômico do Lema 15, novamente, poderíamos analisar em tempo polinomial, os possíveis comportamentos para uma estratégia ótima em T_F e fazer escolhas gulosas para os vértices restritos ao conjunto $V(T) \setminus V(T_F)$. Este algoritmo retornaria a melhor estratégia sobre todas as suposições razoáveis. A análise a partir de [33] finalmente estende este procedimento o que nos fornece um algoritmo polinomial simples 1/2-aproximativo para MAX f - d -FIREFIGHTER restrito a instância (T, F) onde T é uma árvore.

4.5 Taxa de sobrevivência em árvores

Cai et al. [8] provaram que $\rho(T, 1; 1) \geq 1 - O\left(\frac{\log n(T)}{n(T)}\right)$ para árvore T , no qual é o melhor limite inferior possível sobre árvores ternárias completas. Provavelmente o aspecto mais surpreendente do resultado deles é a simplicidade da estratégia que defende no máximo dois vértices durante todo o jogo usada nas provas (veja *Theorem 2.4* em [8]). Nesta seção, usaremos uma variação da estratégia deles usada no artigo [8] a fim de obter resultados para valores gerais de f e d .

Seja T uma árvore enraizada. Para algum vértice u de T , seja $n_{\geq u}(T)$ o número de vértices que são: ou iguais a u ou descendentes de u . Se $v_0 \dots v_l$ é um caminho em T tal que v_i é um filho de v_{i-1} , para $1 \leq i \leq l$, então v_0 é um l -pai de v_l . Se u é

um filho de v e $2n_{\geq u}(T) > n_{\geq v}(T)$, então u é um *filho grande* de v . Se $v_0 \dots v_l$ é um caminho em T tal que v_i é um filho grande de v_{i-1} , para $1 \leq i \leq l$, então v_l é um *l-filho grande* de v_0 . Note que um *l-filho grande* é único, se existir.

Teorema 17. *Sejam f e Δ dois inteiros positivos.*

Se T é uma árvore com grau máximo Δ , então $\rho(T, f; 1) \geq 1 - O\left(\frac{\log n(T)}{n(T)}\right)$ onde as constantes implícitas na $O(\cdot)$ -notação dependem apenas de f e Δ .

Demonstração. Seja T uma árvore de ordem n e de grau máximo Δ . Enraizamos a árvore T em um vértice r arbitrário. Um conjunto F com f vértices de T é *simples* se

- ele não contém nenhum vértice de T com distância menor que f em relação à raiz r ,
- a distância entre quaisquer dois vértices de F é pelo menos $6f$.

Afirmção. Como Δ e f são constantes, existem $\binom{n}{f} - O(n^{f-1})$ possíveis escolhas para formar um conjunto simples com f elementos, ou seja,

$$\#\{F \subseteq V(T) \mid F \text{ simples e } |F| = f\} = \binom{n}{f} - O(n^{f-1}). \quad (4.6)$$

De fato, se F não é simples temos:

- (1) F contém um elemento u em níveis L_1, \dots, L_f ,
- (2) F contém pelo menos dois vértices u, v tais que a distância $\text{dist}_T(u, v) < 6f$.

Analisando (1): Existe um número fixo $\varrho(f, \Delta) = \varrho$ (depende de f e Δ) que é o número de possibilidades de escolha de u em T . Portanto, $\varrho \in o(1)$, isto é, o número de possibilidades de escolha de u em T é da ordem $o(1)$. Escolhendo um segundo elemento para F , temos que há $(n-1)$ possibilidades em T . Generalizando, para escolhermos o i -ésimo elemento de F , com $2 \leq i \leq f$, há $(n-(i-1))$ possibilidades em T . Logo, temos

$$o(1) \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(f-1)) = \varrho \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-(f-1)) \quad (4.7)$$

possibilidades de escolhermos os elementos de F em T não simples satisfazendo (1).

Analisando **(2)**: Existem n possibilidades para a escolha de $u \in F$ em T e temos um número fixo $\bar{\varrho}(f, \Delta) = \bar{\varrho}$ (depende de f e Δ) que é o número de possibilidade de escolhas de $v \in F$ em T . Escolhendo um terceiro elemento de F , temos que há $n - 2$ possibilidades em T . Generalizando, para escolhermos o i -ésimo elemento de F , $3 \leq i \leq f$, há $(n - (i - 1))$ possibilidades em T . Logo, temos

$$n.o(1).(n - 2).\dots.(n - (f - 1)) = \bar{\varrho}.n.(n - 2).\dots.(n(f - 1)) \quad (4.8)$$

Portanto, pelas equações 4.7 e 4.8, o total de possibilidades de escolha dos vértices para que F seja não simples é

$$[\varrho.(n - 1) + \bar{\varrho}.n].(n - 2).\dots.(n - (f - 1)).$$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{[\varrho.(n - 1) + \bar{\varrho}.n].(n - 2).\dots.(n - (f - 1))}{n^{f-1}} \right) \right] = \varrho + \bar{\varrho},$$

temos que o total de escolhas possíveis para F não ser simples é da ordem $O(n^{f-1})$.

Logo, o número de escolhas possíveis para F simples em T é da ordem $\binom{n}{f} - O(n^{f-1})$, pois o número de escolhas possíveis para F qualquer em T é $\binom{n}{f}$ e para F não simples em T é $O(n^{f-1})$.

Seja F um conjunto simples, com $F = \{b_1, \dots, b_f\}$ e considere a seguinte estratégia σ para o jogo *firefighter* com configuração inicial (T, F) na qual defende apenas $2f$ vértices durante as $2f$ primeiras rodadas:

- para $1 \leq i \leq f$, defenda na rodada i o i -pai de b_i ,
- para $f + 1 \leq i \leq 2f$, defenda na rodada i o $(2i - f)$ -filho grande do $(i - f)$ -pai de b_{i-f} , se ele existir.

Um *par ruim* para a estratégia σ é um par (u, F) , onde $u \in V(T)$ e $F = \{b_1, \dots, b_f\}$ é um conjunto simples, tal que a execução de σ no jogo *firefighter*, com configuração inicial (T, F) , o vértice u é queimado no fim do jogo. Para cada par ruim (u, F) , selecionamos um vértice $b(u, F) \in F$ tal que o caminho entre $b(u, F)$ e u é eventualmente completamente queimado até o término do jogo¹. Se $1 \leq i \leq f$ é tal que $b(u, F) = b_i$, então considere $p(u, F)$ o $(i - 1)$ -pai de $b(u, F)$.

¹Não necessariamente o caminho entre $b(u, F)$ e u tem seu último vértice queimado na última rodada, esse caminho pode estar completamente queimado antes.

Em vista da estratégia σ , obtemos as seguintes afirmações:

- i. u é um descendente de $p(u, F)$, e
- ii. se o caminho P em T entre u e $p(u, F)$ tem tamanho maior que $3f$, então pelo menos um dos vértices internos de P não é um filho grande do seu pai.

Analisando **i.**: Temos três possíveis posições dos vértices u , $p(u, F)$ e $b(u, F)$ em um caminho que contém os três vértices.

(a) ou $\dots u \dots p(u, F) \dots b(u, F) \dots$,

(b) ou $\dots p(u, F) \dots u \dots b(u, F) \dots$,

(c) ou $\dots p(u, F) \dots b(u, F) \dots u \dots$

Temos que refutar o posicionamento no item **(a)**. Como $b(u, F) = b_i$ para $1 \leq i \leq f$, temos que, pelo primeiro item da estratégia σ , o i -pai de b_i é defendido, ou seja, o pai de $p(u, F)$. Como u é antecessor de $p(u, F)$, temos que pelo menos um vértice do caminho entre u e $b(u, F)$ não é queimado, uma contradição.

Analisando **ii.**: Como o caminho entre u e $p(u, F)$ tem tamanho maior que $3f$, temos que o vértice u não é antecessor de $b(u, F)$ e u não é nenhum descendente de $b(u, F)$ tal que a distância $\text{dist}_T(u, b(u, F)) \leq 3f - (i - 1)$, ou seja, temos que $p(u, F), b(u, F)$ e u estão em P exatamente nesta ordem, (veja a Figura 4.4). Se todos os vértices internos do caminho P fossem filhos grandes, cada um de seu pai, então pelo segundo item da estratégia σ , o $(2(f+i) - f)$ -filho grande do $((f+i) - f)$ -pai do $b_{((f+i)-f)}$ seria defendido na rodada $(f+i)$. Como o i -pai de $b(u, F) = b_i$ é o pai de $p(u, F)$ e o $(2(f+i) - f)$ -filho grande do pai de $p(u, F)$ está entre u e $b(u, F)$, temos que pelo menos um vértice do caminho entre u e $b(u, F)$ que não é queimado, uma contradição.

Afirmção. Temos que para cada vértice $u \in V(T)$, o número de vértices possíveis do tipo $p(u, F)$ é da ordem $O(\log n)$.

De fato, sejam $F_1, F_2, \dots, F_j, \dots$ configurações de conjuntos simples com f elementos tais que existe $p(u, F)$. Pelo item **(ii.)**, existe pelo menos um vértice interno ao caminho P_j em T entre u e $p(u, F_j)$ que não é um filho grande de seu pai, considere y_j este tal vértice; se houver mais de um satisfazendo tais condições, considere y_j o mais próximo de $p(u, F_j)$ em P_j .

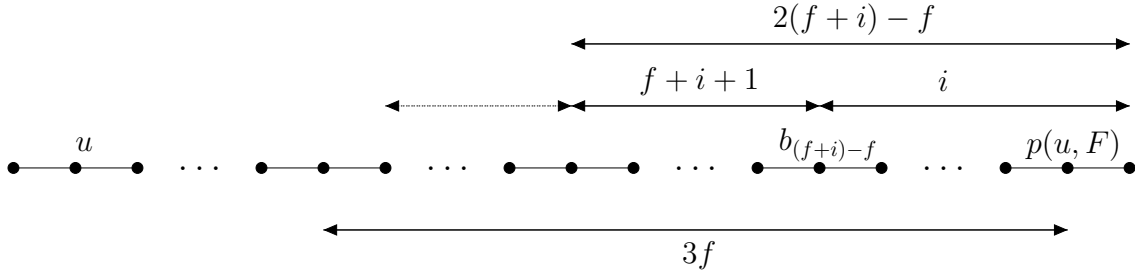


Figura 4.4: Esquema do caminho P usado na demonstração do Teorema 17 na argumentação do item (ii.), onde $1 \leq i \leq f$. Note, se $i = f$, o vértice defendido é exatamente o vértice que está $3f - 1$ distante de $p(u, F)$.

Como u é descendente de $p(u, F_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que $p(u, F_j)$ está no caminho P em T entre r e u . Portanto, y_j está em P para todo $j \in \mathbb{N}$. Sejam $r, y_{\tau(1)}, y_{\tau(2)}, \dots, y_{\tau(j)}, \dots, u$ a ordem dos vértices y_j ao longo de P . Como os $y_{\tau(j)}$'s não são filhos grandes, cada um de seu pai, temos

$$n_{\geq r} \geq 2^1 n_{\geq y_{\tau(1)}} \geq 2^2 n_{\geq y_{\tau(2)}} \geq \dots \geq 2^j n_{\geq y_{\tau(j)}} \geq \dots$$

Portanto,

$$n_{\geq r} \geq 2^j n_{\geq y_{\tau(j)}} \text{ para todo } j \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$1 \geq \frac{j \log(n_{\geq y_{\tau(j)}})}{\log(n)} \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Se $j \rightarrow \infty$, então $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\lim_{j, n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{j \log(n_{\geq y_{\tau(j)}})}{\log(n)} \right] \leq 1,$$

de onde concluímos a afirmação.

Como f e Δ são constantes, para cada $u \in V(T)$ o número dos vértices do tipo $b(u, F)$ é o número dos vértices do tipo $p(u, F)$ multiplicado por uma constante que depende de f e Δ . Portanto, para cada $u \in V(T)$ o número de possíveis vértices do tipo $b(u, F)$ é da ordem $O(\log(n))$.

Afirmção. Para cada $u \in V(T)$ o número de pares ruins (u, F) possíveis para estratégia σ é da ordem $O(n^{f-1} \log(n))$, ou seja, para cada u temos que

$$\#\{F \mid (u, F) \text{ par ruim para } \sigma\} \in O(n^{f-1} \log(n)). \quad (4.9)$$

De fato, seja $b_u = b(u, F)$ associado ao conjunto F com f elementos tal que (u, F) é um par ruim para estratégia σ . Vamos estimar de quantas maneiras possíveis podemos escolher os elementos de F em T . Temos que a possibilidade de escolher b_u em T é menor que n . Como o único elemento que obrigatoriamente tem que estar em F é o vértice b_u , temos que há menos de $\binom{n-1}{f-1}$ maneiras diferentes de escolher os restantes dos vértices de F em T . Portanto, temos que há menos de $n\binom{n-1}{f-1}$ possibilidades para escolha dos vértices do conjunto F com cardinalidade f que tem obrigatoriamente o vértice b_u . Como a quantidade de escolhas de b_u em T é da ordem $O(\log(n))$, temos

$$\#\{F \mid (u, F) \text{ par ruim para } \sigma\} \leq n \binom{n-1}{f-1} O(\log(n)).$$

Agora, suponha que $\xi(n) \in O(\log(n))$, sabemos $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\xi(n)}{\log(n)} \right) \right] = M$, onde M é uma constante. Como,

$$\begin{aligned} \frac{n \binom{n-1}{f-1} \xi(n)}{n^{f-1} \log(n)} &= \frac{1}{(f-2)!} \left(\frac{n^{f-1} \cdot 1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(f-2)/n) \cdot \xi(n)}{n^{f-1} \log(n)} \right) \\ &= \frac{1}{(f-2)!} [1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(f-2)/n)] \left(\frac{\xi(n)}{\log(n)} \right), \end{aligned}$$

temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{n \binom{n-1}{f-1} \xi(n)}{n^{f-1} \log(n)} \right) \right] = \left(\frac{1}{(f-2)!} \right) 1 \cdot M.$$

Afirmção. Temos que $\frac{O(n^{f-1}) + O(n^{f-1} \log(n))}{\binom{n}{f}} \subset O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$ onde n é um inteiro positivo, ou seja,

$$\frac{O(n^{f-1}) + O(n^{f-1} \log(n))}{\binom{n}{f}} \leq O\left(\frac{\log(n)}{n}\right). \quad (4.10)$$

De fato, sejam

$$\xi(n) \in \frac{O(n^{f-1})}{\binom{n}{f}} \quad \text{e} \quad \eta(n) \in \frac{O(n^{f-1} \log(n))}{\binom{n}{f}},$$

com n inteiro positivo. Considerem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\xi(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1}} \right) \right] = M_1 \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\eta(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1} \log(n)} \right) \right] = M_2,$$

onde M_1 e M_2 são constantes positivas.

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\xi(n)}{1/n} &= \frac{\xi(n) \binom{n}{f}}{1/n} \left(\frac{f!}{n^f [1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(f-1)/n)]} \right) \\ &= \frac{\xi(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1}} \left(\frac{f!}{[1 \cdot (1-1/n) \cdot \dots \cdot (1-(f-1)/n)]} \right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\xi(n)}{1/n} \right) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{f!}{[1 \cdot (1 - 1/n) \cdots (1 - (f - 1)/n)]} \right) \frac{\xi(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1}} \right) \right] \\ &= (f!)M_1, \end{aligned}$$

portanto, $\xi(n) \in O\left(\frac{1}{n}\right)$. Como $\frac{\xi(x)}{\log(n)/n} = \frac{n\xi(n)}{\log(n)} \leq n\xi(n) = \frac{\xi(n)}{1/n}$, para todo $n \geq 2$, conclui-se facilmente que $\xi(n) \in O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$.

Temos,

$$\begin{aligned} \frac{\eta(n)}{\log(n)/n} &= \frac{\eta(n) \binom{n}{f}}{\log(n)/n} \left(\frac{f!}{n^f [1 \cdot (1 - 1/n) \cdots (1 - (f - 1)/n)]} \right) \\ &= \frac{\eta(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1} \log(n)} \left(\frac{f!}{[1 \cdot (1 - 1/n) \cdots (1 - (f - 1)/n)]} \right), \end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{\eta(n)}{\log(n)/n} \right) \right] &= \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\left(\frac{f!}{[1 \cdot (1 - 1/n) \cdots (1 - (f - 1)/n)]} \right) \frac{\eta(n) \binom{n}{f}}{n^{f-1} \log(n)} \right) \right] \\ &= (f!)M_2, \end{aligned}$$

portanto, $\eta(n) \in O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$. Como $\xi(n) \in O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$ e $\eta(n) \in O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$, temos que $(\xi(n) + \eta(n)) \in O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$.

Finalmente, temos todos os argumentos para mostrar $\rho(T, f; 1) \geq 1 - O\left(\frac{\log(n)}{n}\right)$.

Sejam os conjuntos

- $\mathfrak{A}(F) = \{u \in V(T) \mid (u, F) \text{ é um par ruim para } \sigma\}$ e
- $\mathfrak{B}(F) = \{u \in V(T) \mid u \text{ não é salvo por } \sigma \text{ com } F \text{ simples}\}$.

Note, pela definição de par ruim, $\mathfrak{B}(F) \subseteq \mathfrak{A}(F)$. Pois para cada $u \in \mathfrak{B}(F)$ existe um (b_u, u) -caminho com $b_u \in F$ que é queimado até o fim do jogo com o jogador usando a estratégia σ , ou seja, (u, F) é um par ruim para estratégia σ .

Seja \mathcal{S} o conjunto de todos os conjuntos simples F com f elementos. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{F \in \mathcal{S}} |\mathfrak{A}(F)| &= \sum_{u \in V(T)} \#\{F \mid (u, F) \text{ par ruim para } \sigma\} \\
&\stackrel{(4.9)}{\leq} \sum_{u \in V(T)} O(n^{f-1} \log(n)) \\
&= n O(n^{f-1} \log(n)).
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{f} \rho(T, F; 1) &= \sum_{F \in \binom{V(T)}{f}} \frac{MVS(T, F; 1)}{n} \\
&\geq \sum_{F \in \mathcal{S}} \frac{MVS(T, F; 1)}{n} \\
&= \sum_{F \in \mathcal{S}} \frac{n - |\mathfrak{B}(F)|}{n} \\
&\geq \sum_{F \in \mathcal{S}} 1 - \sum_{F \in \mathcal{S}} \frac{|\mathfrak{A}(F)|}{n} \\
&\stackrel{(4.6)}{=} \binom{n}{f} - O(n^{f-1}) - \sum_{F \in \mathcal{S}} \frac{|\mathfrak{A}(F)|}{n} \\
&\stackrel{(4.11)}{\geq} \binom{n}{f} - [O(n^{f-1}) + O(n^{f-1} \log(n))].
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Logo, pelas inequações (4.10) e (4.12), temos

$$\begin{aligned}
\rho(T, F; 1) &\geq 1 - \frac{O(n^{f-1}) + O(n^{f-1} \log(n))}{\binom{n}{f}} \\
&\geq 1 - O\left(\frac{\log(n)}{n}\right).
\end{aligned}$$

□

4.6 Estendendo o caso tratável de Finbow et al.

Nesta seção consideremos a versão do jogo *firefighter* com pesos.

Finbow et al. [28] descreveu um algoritmo em tempo polinomial que determina uma estratégia ótima para MAX 1-1-FIREFIGHTER restrito a instância $(G, \{r\})$ tal que G tem grau máximo 3 e r tem grau máximo 2. Em contraste com resultado anterior, Duffy mostrou em sua tese de mestrado [25] que é NP-difícil determinar

uma estratégia ótima para MAX WEIGHTED 1-1-FIREFIGHTER restrito à instância $((G, w), \{r\})$ tal que G tem grau máximo 3, todos os valores de w são ou 0 ou 1 e r tem grau no máximo 2. A razão da dificuldade na complexidade pode ser a existência de instâncias com pesos para o qual não existe nenhuma estratégia ótima que são estratégias adjacentes².

Nesta seção nós estendemos a aproximação de [28] para a instância MAX 1- d -FIREFIGHTER restringindo os graus dos vértices, ou seja, mostramos que esta aproximação produz um algoritmo aproximativo para esta instância na qual retorna uma solução ótima quando aplicado à uma instância sem pesos.

Portanto, ao longo do restante desta seção seja d um inteiro positivo, seja G um grafo com $\Delta(G) \leq d + 2$, seja $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função peso não negativa e seja r um vértice de G com grau no máximo $d + 1$. Se o grau de r é menor que $d + 1$, então a estratégia ótima para instância $((G, w), \{r\})$ é defender todos os vizinhos de r na primeira rodada. Portanto, poderemos considerar que o grau do vértice r é exatamente $d + 1$.

Similarmente às estratégias apresentadas por Finbow em [28], considere duas estratégias especiais.

- Se $P : u_0 u_1 \dots u_l$ é um caminho em G de comprimento $l \geq 1$ com $u_0 = r$ tal que o grau de u_l é no máximo $d + 1$, então $\sigma_1(P)$ é a estratégia que defende na rodada i , com $0 \leq i \leq l$, todos os vizinhos de u_i que não estão em P .
- Se $Q : v_0 v_1 \dots v_l$ é um caminho em G com $v_0 = r$ tal que v_l é adjacente a v_j , para algum j com $0 \leq j \leq l - 2$, então $\sigma_2(Q)$ é a estratégia que defende:
 - na rodada i , com $i \neq j$ e $0 \leq i \leq l - 1$, todos os vizinhos de v_i que não estão em Q ,
 - na rodada j , todos os vizinhos de v_j que não estão em Q assim como v_l .

Note que o total de pesos salvos por $\sigma_1(P)$ é

$$\sum_{u \in V(G) \setminus V(P)} w(u) = w(V(G)) - w(V(P))$$

²Exemplos para tais instâncias podem ser obtidos a partir da prova do Theorem 4.0.16 em [25] iniciando a construção com uma instância SIM para o problema 3FL-FIRE [38]. Todos os vértices em $L' \cup X \cup Y \cup Z$ recebem o peso 1 e os vértices restantes recebem o peso 0.

e o total de pesos salvos por $\sigma_2(P)$ é

$$\sum_{u \in V(G) \setminus (V(Q) \setminus \{v_l\})} w(u) = w(V(G)) - w(V(Q) \setminus \{v_l\}). \quad (4.13)$$

Cada estratégia que é formada por $\sigma_1(P)$ ou $\sigma_2(Q)$ será chamada de *simples*. O próximo lema mostra que a melhor estratégia simples pode ser encontrada de forma eficiente.

Lema 18. *Sejam d um inteiro positivo, G um grafo com $\Delta(G) \leq d+2$, $w : V(G) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ uma função peso não negativa e r um vértice de G com grau no máximo $d+1$.*

- *Seja W_1 o mínimo de $w(V(P))$ sobre todos os caminhos do tipo $P: u_0 u_1 \dots u_l$ em G de comprimento $l \geq 1$ com $u_0 = r$ tal que $d_G(u_l)$ é no máximo $d+1$,*
- *seja W_2 o mínimo de $w(V(Q) \setminus \{v_l\})$ sobre todos os caminhos do tipo $Q: v_0 v_1 \dots v_l$ em G com $v_0 = r$ tal que v_l é adjacente a v_j para algum v_j com $0 \leq j \leq l-2$.*

Temos que W_1 e W_2 podem ser determinados em tempo polinomial.

Demonstração. Considere a função peso não negativa sobre as arestas de G

$$\begin{aligned} c &: E(G) \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ xy &\longmapsto \frac{w(x)+w(y)}{2}. \end{aligned}$$

O menor comprimento em relação a c de um (u, v) -caminho em G é denotado por $\text{dist}_{(G,c)}(u, v)$. Temos que W_1 é o mínimo de

$$\frac{w(r)}{2} + \text{dist}_{(G,c)}(r, v) + \frac{w(v)}{2}$$

sobre todos os vértices de $v \in V(G) \setminus \{r\}$ de grau no máximo $d+1$, pois

$$\begin{aligned} \frac{w(r)}{2} + \text{dist}_{(G,c)}(r, v) + \frac{w(v)}{2} &= \frac{w(u_0)}{2} + \sum_{k=0}^{l-1} c(u_k u_{k+1}) + \frac{w(u_l)}{2} \\ &= \frac{w(u_0)}{2} + \sum_{k=0}^{l-1} \frac{w(u_k) + w(u_{k+1})}{2} + \frac{w(u_l)}{2} \\ &= \sum_{k=0}^l w(u_k), \end{aligned}$$

onde $r = u_0$, $v = u_l$ e $u_0 u_1 \dots u_l$ é um (r, v) -caminho. Portanto, W_1 pode ser determinado em $O(|E(G)| + |V(G)| \log(|V(G)|))$ usando métodos de caminho mínimo, por exemplo o Algoritmo de Dijkstra.

Para uma aresta $uv \in E(G)$ que não é uma ponte, seja $W_c(uv)$ o mínimo de $w(V(C))$ de um ciclo C em G que contém uv . Temos que $W_c(uv)$ é igual a

$$c(uv) + \text{dist}_{(G-uv, c|_{E(G)\setminus\{uv\}})}(u, v),$$

este caminho pode ser também determinado em tempo polinomial usando métodos de caminho mínimo, pois

$$c(uv) + \text{dist}_{(G-uv, c|_{E(G)\setminus\{uv\}})}(u, v) = \frac{w(u)}{2} + \frac{w(v)}{2} + \text{dist}_{(G-uv, c|_{E(G)\setminus\{uv\}})}(u, v)$$

que recai no caso anterior.

Temos que W_2 é o mínimo de

$$\frac{w(r)}{2} + \text{dist}_{(G, c)}(r, u) - \frac{w(u)}{2} + W_C(uv) - w(v)$$

sobre todas as arestas uv de G que não são pontes, pois

$$\begin{aligned} \frac{w(r)}{2} + \text{dist}_{(G, c)}(r, u) - \frac{w(u)}{2} + W_C(uv) - w(v) &= \\ &= \frac{w(v_0)}{2} + \sum_{k=0}^{j-1} c(v_k v_{k+1}) - \frac{w(v_j)}{2} + \left[\frac{w(v_j)}{2} + \frac{w(v_l)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=j}^{l-1} c(v_k v_{k+1}) \right] - w(v_l) \\ &= \frac{w(v_0)}{2} + \left(\frac{w(v_0)}{2} + \sum_{k=1}^{j-1} w(v_k) + \frac{w(v_j)}{2} \right) - \frac{w(v_j)}{2} + \left[\frac{w(v_j)}{2} + \frac{w(v_l)}{2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{w(v_j)}{2} + \sum_{k=j+1}^{l-1} w(v_k) + \frac{w(v_l)}{2} \right) \right] - w(v_l) \\ &= \sum_{k=0}^{l-1} w(u_k), \end{aligned}$$

onde $r = v_0$, $u = v_j$, $v = v_l$ e $v_0 v_1 \dots v_j \dots v_l$ é um (r, v) -caminho que contém u . Consequentemente o valor W_2 pode ser determinado em tempo polinomial usando métodos de caminho mínimo. \square

Lema 19. *Sejam d , G , w e r definidos como no Lema 18. Sejam σ_{opt} uma estratégia ótima e σ_{simple} uma das melhores estratégias simples para a instância $((G, w), \{r\})$*

no MAX WEIGHTED 1-*d*-FIREFIGHTER. Se W_{opt} é o peso total dos vértices salvos por σ_{opt} e W_{simple} é o peso total dos vértices salvos por σ_{simple} , então

$$W_{\text{simple}} \geq W_{\text{opt}} - \max\{w(x) \mid x \in V(G) \setminus \{r\}\} + \min\{w(y) \mid y \in V(G) \setminus \{r\}\}.$$

Demonstração. Podemos assumir que σ_{opt} foi escolhido entre todas as estratégias ótimas de modo que σ_{opt} maximiza o número total de vértices salvos independentemente do peso deles. Além disso, podemos assumir que σ_{opt} é minimal. Dividimos esta argumentação em dois casos.

Caso 1: σ_{opt} é adjacente.

Suponha que o jogo está na rodada L sob a estratégia σ_{opt} .

Provamos por indução sobre j , $0 \leq j \leq L - 1$, que após exatamente j rodadas deste jogo, com o jogador usando a estratégia σ_{opt} , os vértices queimados formam um caminho $P_j : v_0 v_1 \dots v_j$, com $v_0 = r$ tal que todos os vizinhos de cada vértice v_i , $0 \leq i \leq j - 1$, que não estão em P_j são defendidos. Para $j = 0$, temos que $P_0 : r$, não há vértices em P_0 anterior a r , portanto, a condição é trivialmente satisfeita. Agora, suponha que a hipótese de indução é válida para $j - 1$, com $j \geq 1$. Observe que na rodada $j - 1$ todos os vizinhos de v_i com $0 \leq i \leq j - 2$, que não estão em P_{j-1} , foram defendidos e v_{j-2} foi queimado na rodada $j - 2$. Após defender d vizinhos de v_{j-2} na rodada $j - 1$, o vértice v_{j-1} é queimado. Portanto, no início da rodada j , temos $d + 1$ vizinhos de v_{j-1} não defendidos diferentes de v_{j-2} . Ou seja, para cada $j \geq 2$, v_{j-1} tem exatamente $d + 1$ vizinhos que não são defendidos e são distintos de v_{j-2} . Como σ_{opt} é uma estratégia ótima que salva a maior quantidade possível de vértices independentemente dos pesos dos vértices e é uma estratégia adjacente, temos que σ_{opt} defende d vizinhos de v_{j-1} exceto um vértice, digamos v_j na rodada j . Logo, para o caminho $P_j : v_0 v_1 \dots v_j$, temos que na rodada j todos os vértices de v_i , $0 \leq i \leq j - 1$, tem seus vizinhos que não pertencem a P_j defendidos. Onde concluímos que a sentença indutiva é verdadeira.

Como o jogo termina na rodada L , temos que, ou o grau de v_{L-1} é no máximo $d + 1$ ou algum vizinho de v_{L-1} foi defendido por σ_{opt} em alguma rodada i , $1 \leq i \leq L - 1$ (caso v_{L-1} tenha exatamente $d + 2$ vizinhos). No primeiro caso, σ_{opt} não é melhor que a estratégia simples formada por $\sigma_1(P)$. No segundo caso, σ_{opt} não é melhor que a estratégia simples formada por $\sigma_2(Q)$. Logo, $W_{\text{simple}} \geq W_{\text{opt}}$.

Caso 2: σ_{opt} é não adjacente.

Seja u um vértice que é defendido por σ_{opt} em alguma rodada i de modo que u não tem nenhum vizinho que foi queimado na rodada $i - 1$. Como σ_{opt} é minimal, u tem pelo menos um vizinho queimado ao fim do jogo.

Consequentemente, u tem exatamente um vizinho v que é queimado em algum momento do jogo depois da rodada $i - 1$, então a estratégia que defende v no lugar de u na rodada i , e repete exatamente todas as defesas de σ_{opt} nas outras rodadas, salva mais vértices independentemente dos pesos dos vértices do que σ_{opt} , mas isso contradiz a escolha de σ_{opt} .

Se u tem dois vizinhos b_1 e b_2 que são queimados em algum momento do jogo depois da rodada $i - 1$. Sejam $P_1 : r \dots b_1 u$ e $P_2 : r \dots b_2 u$ caminhos em G entre r e u tal que todos os vértices em $(V(P_1) \cup V(P_2)) \setminus \{u\}$ são queimados até o fim do jogo. Observe que $V(P_1) \cap V(P_2)$ é ciclo, pois P_1 e P_2 tem extremidades iguais e pelo menos dois vértices distintos, portanto, considerem $P_1 : v_0 \dots v_{j-1} v_j v_{j+1} v_{j+2} \dots v_{k-2} v_{k-1} v_k$ e $P_2 : v_0 \dots v_{j-1} v_j v_l v_{l-1} \dots v_{k+2} v_{k+1} v_k$, onde $0 \leq j \leq l - 2$, $r = v_0$, $b_1 = v_{k-1}$, $b_2 = v_{k+1}$ e $u = v_k$. Omitindo a aresta $v_j v_l$ em $P_1 \cup P_2$, temos o caminho $Q : v_0 v_1 \dots v_{j-1} v_j v_{j+1} \dots v_l$ em G . Note que $V(Q) = V(P_1) \cup V(P_2)$ e quando o jogador usa a estratégia σ_{opt} , todos os vértices de $V(Q) \setminus \{u\}$ são queimados ao final do jogo, portanto, $W_{\text{opt}} \leq w(V(G)) - w(V(Q) \setminus \{u\})$. Pela escolha de σ_{simple} , o total de pesos dos vértices salvos por σ_{simple} é pelo menos maior ou igual ao total de pesos dos vértices salvos por $\sigma_2(Q)$. Logo,

$$\begin{aligned}
W_{\text{simple}} &\stackrel{(4.13)}{\geq} w(V(G)) - w(V(Q) \setminus \{v_l\}) \\
&= w(V(G)) - \sum_{t=0}^{l-1} w(v_t) \\
&= w(V(G)) - \sum_{t=0}^{k-1} w(v_t) - \sum_{t=k+1}^l w(v_t) - w(v_k) + w(v_l) \\
&= w(V(G)) - w(V(Q) \setminus \{v_k\}) - w(v_k) + w(v_l) \\
&= w(V(G)) - w(V(Q) \setminus \{u\}) - w(u) + w(v_l) \\
&\geq W_{\text{opt}} - w(u) + w(v_l).
\end{aligned}$$

Por definição,

$$w(u) \leq \max\{w(x) \mid x \in V(G) \setminus \{r\}\} \quad \text{e} \quad w(v_l) \geq \min\{w(y) \mid y \in V(G) \setminus \{r\}\},$$

portanto,

$$W_{\text{simple}} \geq W_{\text{opt}} - \max\{w(x) \mid x \in V(G) \setminus \{r\}\} + \min\{w(y) \mid y \in V(G) \setminus \{r\}\},$$

onde concluímos a prova. \square

O seguinte resultado é uma consequência imediata dos Lemas 18 e 19.

Teorema 20. *Seja d um inteiro positivo e sejam $0 \leq w_{\min} \leq w_{\max}$ inteiros.*

Existe um algoritmo aproximativo polinomial com garantia de desempenho absoluto limitado pelo erro $(w_{\max} - w_{\min})$ para MAX WEIGHTED 1- d -FIREFIGHTER restrito a instância $((G, w), \{r\})$ onde G é um grafo com $\Delta(G) \leq d+2$, $w : V(G) \rightarrow [w_{\min}, w_{\max}]$ e r é um vértice de G com grau no máximo $d+1$.

Demonstração. Pelo Lema 19, temos $W_{\text{opt}} - (w_{\max} - w_{\min}) \leq W_{\text{simple}} \leq W_{\text{opt}} + (w_{\max} - w_{\min})$ e, pelo Lema 18, temos que σ_{simple} , a estratégia que garante W_{simple} pesos ao final do jogo *firefighter*, pode ser obtida em tempo polinomial. \square

Corolário 21. *Seja d um inteiro positivo. Existe um algoritmo polinomial para MAX WEIGHTED 1- d -FIREFIGHTER restrito a instância $(G, \{r\})$ onde G é um grafo com $\Delta(G) \leq d+2$ e r é um vértice de G com grau no máximo $d+1$.*

Demonstração. Consequência imediata do teorema anterior. Se atribuímos peso 1 em todos os vértices de G , isto é, para todo $u \in V(G)$ tem-se $w(u) = 1$, e aplicarmos o algoritmo do Teorema 20, então $w_{\max} - w_{\min} = 0$, portanto, a estratégia retornada pelo algoritmo é uma estratégia ótima. \square

Corolário 22. *Seja d um inteiro positivo e sejam $0 \leq w_{\min} \leq w_{\max}$ inteiros.*

Existe um algoritmo polinomial $\frac{1}{2}$ -aproximativo para MAX WEIGHTED 1- d -FIREFIGHTER restrito a instância $((G, w), \{r\})$ onde G é um grafo com $\Delta(G) \leq d+2$, $w : V(G) \rightarrow [w_{\min}, w_{\max}]$ e r é um vértice de G com grau no máximo $d+1$.

Demonstração. Seja W_{opt} um valor ótimo para MAX WEIGHTED 1- d -FIREFIGHTER sobre a instância $((G, w), \{r\})$. Seja $u \in V(G) \setminus \{r\}$ um vértice com peso máximo $w(u) = \max\{w(x) \mid x \in V(G) \setminus \{r\}\}$. Observe que

$$\begin{aligned} \max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} &= \frac{1}{2} \left[(W_{\text{opt}} - w(u)) + w(u) + |(W_{\text{opt}} - w(u)) - w(u)| \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[W_{\text{opt}} + |W_{\text{opt}} - 2w(u)| \right], \end{aligned}$$

portanto, se $W_{\text{opt}} \geq 2w(u)$, ou seja, $-\frac{1}{2}W_{\text{opt}} \leq -w(u)$, então

$$\max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} = W_{\text{opt}} - w(u) \geq \frac{1}{2}W_{\text{opt}},$$

e se $W_{\text{opt}} < 2w(u)$, então

$$\max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} = w(u) > \frac{1}{2}W_{\text{opt}}.$$

Logo, $\max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} \geq \frac{1}{2}W_{\text{opt}}$.

Considere o seguinte algoritmo:

- aplique a estratégia σ_{simple} retornada pelo algoritmo do Teorema 20. (Esta estratégia nos dá o peso total dos vértices salvos W_{simple});
- aplique a estratégia σ_u que apenas defende o vértice u na primeira rodada, suponha que esta estratégia nos dá o peso total dos vértices salvos W_u ;
- retorne a estratégia que nos dá o maior peso total entre W_{simple} e W_u .

Se o algoritmo retorna σ_{simple} , então

$$W_{\text{simple}} \stackrel{(a)}{\geq} \max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} \geq \frac{1}{2}W_{\text{opt}}.$$

A desigualdade (a) é garantida, pois se $W_{\text{opt}} - w(u)$ é maior, pelo Teorema 20, $W_{\text{simple}} \geq W_{\text{opt}} - w(u)$ e se $w(u)$ é maior, $W_{\text{simple}} \geq W_u \geq w(u)$.

Se o algoritmo retorna σ_u , então

$$W_u \stackrel{(b)}{\geq} \max\{W_{\text{opt}} - w(u), w(u)\} \geq \frac{1}{2}W_{\text{opt}}.$$

A desigualdade (b) é garantida, pois se $W_{\text{opt}} - w(u)$ é maior, pelo Teorema 20, $W_u \geq W_{\text{simple}} \geq W_{\text{opt}} - w(u)$ e se $w(u)$ é maior, $W_u \geq w(u)$. \square

Capítulo 5

Conclusões

Esta tese de doutorado foi motivada pela extensão de resultados em temas amplamente estudados na área de teoria dos grafos e com grande aplicabilidade em outras ciências. Neste capítulo apresentamos as conclusões relacionadas aos dois tópicos estudados ao longo do desenvolvimento da tese. Abrimos a primeira seção descrevendo os principais resultados de cada tópico, em seguida, apresentamos breves comentários de problemas em aberto relacionados.

5.1 Principais contribuições desta tese

No tema emparelhamento em grafos, conseguimos estender o resultado de Henning et al. [34] para grafos d -regulares com valores grandes de d ímpar, estabelecemos limites inferiores para o número de emparelhamento de um grafo d -regular, dado d ímpar e cintura ímpar g , onde este limite é justo para muitos valores de d e g . Além disso, caracterizamos todos os grafos extremais para $d = g = 5$. Nosso principal resultado, Teorema 2, depende da ordem dos grafos extremais para fornecer valores exatos dos limites inferiores do número de emparelhamento de um grafo. Através do Teorema 2 e da caracterização dos grafos extremais para alguns valores de d e g obtivemos um melhor ajuste do limite inferior para o número do emparelhamento. No tema jogo *firefighter*, descrevemos uma coletânea de propriedades para estratégias ótimas no jogo MAX f - d -FIREFIGHTER restrito à árvores. Estendemos o algoritmo $(1 - 1/e)$ -aproximativo de [9] para o jogo MAX f - d -FIREFIGHTER. Exibimos a melhor estimativa possível para $\rho(T, f; 1)$ em árvores T com grau máximo limitado.

Estendemos o algoritmo eficiente descrito em [28] para instâncias com um grafo que tem o grau dos vértices restrito e com o número de defesas por rodada sendo um inteiro d grande. Além disso, descrevemos um algoritmo aproximativo para o jogo *firefighter* com pesos.

5.2 Trabalhos futuros

Nossos resultados, relacionados ao tema emparelhamento, motivam vários problemas em aberto. Um dos mais interessantes seria uma versão do Corolário 5 que é preciso para todos os valores de r , g e caracteriza todos os grafos extremais. Uma parte essencial seria caracterizar os grafos extremais que satisfazem o limite inferior dado no Lema 3. Poderia ser interessante considerar hipóteses adicionais relacionadas a conectividade de arestas. Por exemplo: se G é um grafo 5-regular de ordem n e cintura ímpar pelo menos 5 não tendo nenhum corte de arestas, e considerando X , o , o_1 e o_3 como da demonstração do Teorema 2, então a ausência de corte de arestas implica que $o_1 = 0$. Portanto, (3.4) produz $5|X| \geq 5(o - o_3) + 3o_3$, na qual implica $|X| \geq \frac{3}{5}o_3$ and $|X| - o \geq -\frac{2}{5}o_3$. Como $n(5, 3, 5) = 11$, temos $n \geq |X| + 11o_3 \geq \frac{3}{5}o_3 + 11o_3 = \frac{58}{5}o_3$, portanto $o_3 \leq \frac{5}{58}n$. Por (3.3), concluímos que $\alpha'(G) \geq \frac{1}{2}(n + |X| - o) \geq \frac{1}{2}(n - \frac{2}{5}o_3) \geq \frac{1}{2}(n - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{58} \cdot n) = \frac{14}{29}n$. Argumentando como na prova do Corolário 6 e usando a Proposição 9 podemos caracterizar os grafos que satisfazem a igualdade $\alpha'(G) = \frac{14}{29}n$.

O jogo *firefighter* apresenta diferentes variações em suas regras e objetivos. Nos concentramos em alguns problemas de otimização e em obter garantias aproximadas através de limites inferiores para taxa de sobrevivência. Atualmente estudamos dois problemas em aberto relacionados a taxa de sobrevivência. Finbow et al. [28] mostraram que exibir uma estratégia ótima para o jogo *firefighter* é NP-difícil para árvores de grau máximo 3 se o foco de incêndio tiver grau 3 e é tratável se o foco de incêndio tiver grau 1 ou 2. Portanto, surge a seguinte questão: quais subclasses de grafos de grau máximo 3 é possível calcular a taxa de sobrevivência para o jogo *firefighter* com um foco de incêndio e um defensor por rodada? Obtivemos algumas classes que respondem positivamente esta questão, as classes dos snarks Blanusa, Flor e Goldberg. Este trabalho foi submetido para o *13th Cologne-Twente Workshop*

on Graphs & Combinatorial Optimization (CTW) [19]. Buscamos novas classes para achar propriedades estruturais em comum a fim de classificar estruturalmente os grafos que satisfazem positivamente a questão. O outro problema: existe uma constante $c(f, d)$ tal que $\rho(T, f; d) \geq c(f, d) - o(1)$ para qualquer árvore T , se f e d são fixos com $f > d$? Cai et al. [8] mostraram $\rho(T, 1; 1) = 1 - O(\log(n)/n)$, portanto, $\rho(T, 1; 1) = 1 - O(\log(n)/n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$ para toda árvore T de ordem $n(T)$. No trabalho *Asymptotic Surviving Rate of Trees with Multiple Fire Sources* [21], estudamos a extensão deste problema considerando f focos de incêndio e d defensores por rodada. Ou seja, procuramos exibir uma constante suficientemente grande $c(f, d)$ (depende de f, d) tal que para cada árvore de ordem n tem-se $\rho(T, f; d) \geq c(f, d) - o(1)$. Neste trabalho obtivemos limitantes para a constante $c(f, d)$, exibimos limites inferiores para $c(f, 1)$, $c(2, 1)$ e um limite superior para $c(2, 1)$, porém ainda não obtivemos limitantes para caso geral $c(f, d)$. Também, neste trabalho conjecturamos que $c(2, 1) = \frac{3}{4}$, o qual ainda encontra-se em aberto.

Referências Bibliográficas

- [1] N. Alon and J. Spencer. *The probabilistic method. With an appendix on the life and work of Paul Erdős*, volume 3rd ed. Wiley, 2008.
- [2] C. Bazgan, M. Chopin, and B. Ries. The firefighter problem with more than one firefighter on trees. preprint 2011. CoRR abs/1110.0341.
- [3] A. Behmaram, H. Yousefi-Azari, and A. Ashrafi. On the number of matchings and independent sets in (3,6)-fullerenes. *MATCH Commun. Math. Comput. Chem.*, 70:525–532, 2013. ISSN 0340 - 6253.
- [4] T. Biedl, P. Bose, E. Demaine, and A. Lubiw. Efficient algorithms for petersens theorem. *J. Algorithms*, 38:110–134, 2001.
- [5] T. Biedl, E. Demaine, C. Duncan, R. Fleischer, and S. Kobourov. Tight bounds on maximal and maximum matchings. *Discrete Math.*, 285:7–15, 2004.
- [6] D. Bonchev and D. Rouvray. *Chemical Graph Theory. Introduction and Fundamentals*, volume 1. CRC Press, 1991. ISBN-10: 0856264547, ISBN-13: 978-0856264542.
- [7] J. Bondy and U. Murty. *Graph Theory*, volume 244 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2008.
- [8] L. Cai, Y. Cheng, E. Verbin, and Y. Zhou. Surviving rates of graphs with bounded treewidth for the firefighter problem. *Siam J. Discrete Math.*, 24:1322–1335, 2010.
- [9] L. Cai, E. Verbin, and L. Yang. Firefighting on trees: $(1 - 1/e)$ approximation, fixed parameter tractability and a subexponential algorithm. *LNCS*, 5369:258–269, 2008.

- [10] L. Cai and W. Wang. The surviving rate of a graph for the firefighter problem. *SIAM J. Discrete Math.*, 23:1814–1826, 2009.
- [11] S. Cioabă, D. Gregory, and W. Haemers. Matchings in regular graphs from eigenvalues. *J. Comb. Theory*, Ser. B 99:287–297, 2009.
- [12] R. Cole, K. Ost, and S. Schirra. Edge-coloring bipartite multigraphs in $O(E \log D)$ time. *Combinatorica*, 21 (1):5–12, 2001.
- [13] V. Costa, S. Dantas, M. C. Dourado, L. Penso, and D. Rautenbach. Firefighting with general weights. In *European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications (EuroComb)*, Area della Ricerca de CNR - Pisa, Tuscany, Italy, 2013.
- [14] V. Costa, S. Dantas, M. C. Dourado, L. Penso, and D. Rautenbach. More fires and more fighters. *Discrete Appl. Math.*, 161:2410–2419, 2013.
- [15] V. Costa, S. Dantas, M. C. Dourado, L. Penso, and D. Rautenbach. Slash and burn on graphs - Firefighting with general weights. *Discrete Appl. Math.*, (in press). doi:10.1016/j.dam.2014.10.031.
- [16] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. Matchings in graphs of odd regularity and girth. *Discrete Math.*, 313:2895–2902, 2013.
- [17] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. Matchings in graphs of odd regularity and girth. In *VII Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium (LAGOS)*, Playa del Carmen, Quintana Roo, Mexico, 2013.
- [18] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. Asymptotic surviving rate of trees with multiple fire sources. In *IX International Colloquium on Graph Theory and Combinatorics (ICGT)*, Campus of University Joseph Fourier - Grenoble, Rhône-Alpes, France, 2014.
- [19] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. The burning of the snarks. (manuscript), 2014.
- [20] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. The burning of the snarks. In *VI Latin American Workshop on Cliques in Graphs (LAWCliques)*, pages 17–27, Pousada dos Pirineus - Pirenópolis, Goiás, Brazil, 2014.

- [21] V. Costa, S. Dantas, and D. Rautenbach. Asymptotic surviving rate of trees with multiple fire sources. *Discrete Appl. Math.*, (in press). doi:10.1016/j.dam.2014.11.019.
- [22] S. Crosby, A. Finbow, B. Hartnell, R. Moussi, K. Patterson, and D. Wattar. Designing fire resistant graphs. In *36th Southeastern International Conference, Combinatorics, Graph Theory and Computing (CGTC)*, number 173, pages 207–222, Florida Atlantic University - Boca Raton, Florida, United States, 2005. ISSN 0384-9864.
- [23] C. de Figueiredo, G. da Fonseca, M. Lemos, and V. de Sá. Introdução aos Algoritmos Randomizados. In *26º Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro - Brazil, 2007. http://www.impa.br/opencms/pt/biblioteca/cbm/26CBM/26CBM_-07.pdf.
- [24] M. Develin and S. Hartke. Fire containment in grids of dimension three and higher. *Discrete Appl. Math.*, 155:2257–2268, 2007.
- [25] C. Duffy. A collection of algorithmic and complexity results for variants of the firefighter problem. Master thesis, University of Waterloo, 2008. https://dspace.library.uvic.ca/bitstream/handle/1828/3550/Duffy_Christopher_MSc_2011.pdf?sequence=3.
- [26] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canad. J. Math.*, 17:449–467, 1965.
- [27] S. Finbow, B. L. Hartnell, Q. Li, and K. Schmeisser. On minimizing the effects of fire or a virus on a network. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 33:311–322, 2000.
- [28] S. Finbow, A. King, G. MacGillivray, and R. Rizzi. The firefighter problem for graphs of maximum degree three. *Discrete Math.*, 307:2094–2105, 2007.
- [29] S. Finbow and G. MacGillivray. The firefighter problem: A survey of results, directions and questions. *Australasian J. Combin.*, 43:57–77, 2009.
- [30] A. Flaxman and S. Hoory. Maximum matchings in regular graphs of high girth. *Electron. J. Comb.*, 14, 2007. # N1.

- [31] P. Fogarty. Catching the fire on grids. M.sc. thesis, University of Vermont, 2003. <https://www.emba.uvm.edu/~jdinitz/firefighting/fire.pdf>.
- [32] I. Gutman and O. Polansky. *Mathematical Concepts in Organic Chemistry*, volume 30, No. 2. SIAM Review, 1988.
- [33] B. Hartnell and Q. Li. Firefighting on trees: How bad is the greedy algorithm? In *Proceedings of the Thirty-first Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, number 145, pages 187–192, Utilitas Math., Winnipeg, Manitoba, Canada, 2000.
- [34] M. Henning, C. Löwenstein, and D. Rautenbach. Independent sets and matchings in subcubic graphs. *Discrete Math.*, 312:1900–1910, 2012.
- [35] M. Henning and A. Yeo. Tight lower bounds on the size of a maximum matching in a regular graph. *Graphs Comb.*, 23:647–657, 2007.
- [36] J. Hopcroft and R. Karp. An $n^{5/2}$ algorithm for maximum matchings in bipartite graphs. *SIAM J. Comput.*, 2:225–231, 1973.
- [37] N. Kazarinoff. *Analytic Inequalities*. Dover Books on Mathematics. Dover, 2014. ISBN-10: 0486432440, ISBN-13: 978-0486432441.
- [38] A. King and G. MacGillivray. The firefighter problem for cubic graphs. *Discrete Mathematics*, 310:614–621, 2010.
- [39] D. König. Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre. *Math. Ann.*, 77:453–465, 1916.
- [40] L. Lovász and M. Plummer. *Matching theory*, volume 29 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland Publishing Co., 1986.
- [41] G. MacGillivray and P. Wang. On the firefighter problem. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 47:83–96, 2003.
- [42] S. Micali and V. Vazirani. An $O(\sqrt{|V|}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *21st Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 17–27, Institute of Electrical and Electronics Engineers Inc. (IEEE), New York, New York, United States, 1980.

- [43] T. Nishizeki and I. Baybars. Lower bounds on the cardinality of the maximum matchings of planar graphs. *Discrete Math.*, 28 (3):255–267, 1979.
- [44] S. O and S. Cioabă. Edge-connectivity, eigenvalues, and matchings in regular graphs. *SIAM J. Discrete Math.*, 24:1470–1481, 2010.
- [45] S. O and D. West. Balloons, cut-edges, matchings and total domination in regular graphs of odd degree. *J. Graph Theory*, 64:116–131, 2010.
- [46] S. O and D. West. Matching and edge-connectivity in regular graphs. *Eur. J. Comb.*, 32:324–329, 2011.
- [47] J. Petersen. Die theorie der regulären graphen. *Acta Math.*, 15, 1891.
- [48] A. Schrijver. Bipartite edge coloring in $O(\Delta m)$ time. *SIAM J. Comput.*, 28 (3):841–846, 1999.
- [49] W. Tutte. The factorization of linear graphs. *J. Lond. Math. Soc.*, 22:107–111, 1947.
- [50] W. Tutte. Bridges and hamiltonian circuits in planar graphs. *Aequationes Math.*, 15 (1):1–33, 1977.
- [51] D. West. *Introduction to Graph Theory*, volume 2nd Edition. PHI Learning, 2000. ASIN: B004ISB87O.