Jefferson Ribeiro Nogueira

Classes características e secantes de curvas racionais normais

Tese apresentada por **Jefferson Ribeiro Nogueira** ao Curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor.
Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica.

Orientador: Nivaldo Medeiros

Niterói, 06 de abril de 2020

Jefferson Ribeiro Nogueira

Classes características e secantes de curvas racionais normais

Tese apresentada por **Jefferson Ribeiro Nogueira** ao Curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor.
Linha de Pesquisa: Geometria Algébrica.

Banca Examinadora:

Prof. Nivaldo Medeiros – Orientador
Universidade Federal Fluminense

Prof. Thiago Fassarella do Amaral
Universidade Federal Fluminense

Profa. Viviana Ferrer Cuadrado
Universidade Federal Fluminense

Profa. Maral Mostafazadehfard
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Prof. Rodrigo José Gondim Neves
Universidade Federal Rural de Pernambuco

Prof. Marco Pacini
Universidade Federal Fluminense

Ficha catalográfica automática – SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

N778c

Nogueira, Jefferson Ribeiro
Classes características e secantes de curvas racionais normais / Jefferson Ribeiro Nogueira; Nivaldo Nunes de Medeiros Júnior, orientador. Niterói, 2020.
87 p.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PPGMAT.2020.d.08852479732

1. Classes características. 2. Mapa gradiente. 3. Secantes de curvas racionais normais. 4. Produção intelectual. I. Medeiros Júnior, Nivaldo Nunes de, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título

CDD –

Bibliotecário responsável: Ana Nogueira Braga - CRB7/4776

Agradecimentos

Aos meus amores, esposa Gláucia, e filhos Alyne e Arthur, por iluminarem meus dias, e por serem meus motivos em querer ser e estar cada vez melhor. O meu amor é de vocês!

Aos meus pais por tudo o que sempre foram e fizeram por mim.

Ao meu orientador Nivaldo Medeiros, sem o qual este trabalho não seria possível. Agradeço pelo início, meio, ... por cada recomeço e por não ter desistido. Serei sempre grato por todo apoio, compreensão, exemplo e toda a matemática.

Aos membros da banca pela participação, leitura e contribuições a este trabalho.

Aos matemáticos Alex Abreu, Giovanni Staglianò, Giuseppe Borrelli, Israel Vainsencher, Juliana Coelho, Maral Mostafazadehfard, Thiago Fassarella e Viviana Ferrer por toda matemática que compartilharam, e pelas contribuições diretas ou indiretas que deram a este trabalho.

A todos os meus familiares, amigos e amigas com quem convivi neste tempo e que, de diversas maneiras, contribuíram para este trabalho. Destaque especial aos amigos Jaqueline Siqueira, Luiz Viana, Reginaldo Demarque e Rômulo Rosa por cada momento nesse processo, vocês foram incríveis!

À FAPERJ pelo suporte financeiro.

Resumo

Estudamos classes características de hipersuperfícies no espaço projetivo complexo, com ênfase nas secantes de curvas racionais normais.

Para $\operatorname{Sec}_k C \subset \mathbb{P}^n$, a secante de k pontos de uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^n$, calculamos a série de Hilbert e a característica de Euler topológica.

Quando $n = 2r$ e $k = r$, caso em que $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ é uma hipersuperfície, mostramos que a dual $(\operatorname{Sec}_r C)^*$ é isomorfa a variedade de Veronese $\nu_2(\mathbb{P}^r)$, donde obtemos, para $\operatorname{Sec}_r C$, fórmulas para a classe de Mather, o grau distância Euclidiana genérica, e seus graus polares. Mais ainda, apresentamos uma fórmula explícita para o grau topológico do mapa gradiente $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ associado à $\operatorname{Sec}_r C$, e como consequência obtemos uma resposta positiva para uma conjectura de M. Mostafazadehfard e A. Simis: *para $r \geq 2$, a hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ não é homaloidal.*

A partir do cálculo em casos particulares somos levados a uma conjectura, a saber, fórmulas explícitas para os graus projetivos do mapa gradiente ϕ_r e para a classe de Schwartz-MacPherson $c_{\mathrm{SM}}(\operatorname{Sec}_r C) \in A_*\mathbb{P}^{2r}$, para todo r. Concluímos apresentando evidências que indicam a validade da nossa conjectura.

Palavras-chave: Classes características. Mapas gradientes. Secantes de curvas racionais normais.

Abstract

We study characteristic classes of hypersurfaces in the complex projective space, with emphasis on secants to rational normal curves.

For $\operatorname{Sec}_k C \subset \mathbb{P}^n$, the secant of k points to a rational normal curve $C \subset \mathbb{P}^n$, we compute the Hilbert series and the topological Euler characteristic.

For $n = 2r$ and $k = r$, the case when $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ is a hypersurface, we show that the dual $(\operatorname{Sec}_r C)^*$ is isomorphic to the Veronese variety $\nu_2(\mathbb{P}^r)$, from which we obtain, for $\operatorname{Sec}_r C$, formulas for the Mather class, the generic Euclidean distance degree and its polar degrees. Furthermore, we present an explicit formula for the topological degree of the gradient map $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ associated with $\operatorname{Sec}_r C$, and as a consequence we obtain an affirmative answer for a conjecture by M. Mostafazadehfard and A. Simis: *for* $r \geq 2$, *the hypersurface* $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ *is not homaloidal.*

From computations in particular cases we are led to a conjecture, namely, explicit formulas for the projective degrees of the gradient map ϕ_r and the Schwartz-MacPherson class $c_{\mathrm{SM}}(\operatorname{Sec}_r C) \in A_*\mathbb{P}^{2r}$, for all r. We conclude by presenting evidence that indicates the validity of our conjecture.

Keywords: Characteristic classes. Gradient maps. Secants to rational normal curves.

Sumário

Introdução

Para uma variedade algébrica não-singular X, a classe de Chern de X é definida por $c(X) = c(TX) \cap [X]$, onde TX é o fibrado tangente. Esta classe carrega importantes informações geométricas e topológicas da variedade; por exemplo, o grau desta classe é a característica de Euler topológica de X (Teorema de Poincaré-Hopf). É natural buscar por uma analogia para o caso em que X é singular. Em 1965, Marie-Hélène Schwartz estendeu a noção de classe de Chern para variedades complexas analíticas estudando campos vetoriais especiais nas singularidades de X ([Sch65a] e [Sch65b]). De maneira independente, R. MacPherson em 1974 também definiu classes de Chern para variedades complexas algébricas [Mac74]. Mais tarde foi demonstrado que de fato essas duas construções coincidem ([BS81] e [AB08]).

Na construção de MacPherson são definidas as classes de Schwartz-MacPherson e de Mather, as quais são elementos do grupo de Chow de uma variedade algébrica complexa. Essas definições estendem a noção de classe de Chern para variedades singulares. A classe de Schwartz-MacPherson possui boas propriedades funtoriais, e vale que o grau desta classe coincide com a característica de Euler da variedade.

Por outro lado, as variedades secantes constituem um assunto clássico em Geometria Algébrica (G. Castelnuovo, G. Scorza, F. Severi, A. Terracini). Além da riqueza geométrica inerente, as secantes são relevantes em diversos campos da matemática e em aplicações, incluindo Combinatória, Teoria da Complexidade, Estatística e Física. Uma excelente apresentação de conexões, problemas e rica lista de referências é encontrada em [CGO14]. Recorde que para $X \subset \mathbb{P}^n$, sua k-secante $\operatorname{Sec}_k X$ é o fecho da união dos $(k-1)$-planos gerados por k pontos gerais de X.

Nesta tese tratamos destes dois tópicos. Especificamente, abordamos o problema de determinar classes características de secantes de curvas racionais normais. Este objetivo nos leva a estudar aspectos bastante diversos da geometria dessas variedades.

Aproveitamos para anunciar que trabalhamos sobre o corpo dos números complexos.

O ponto de partida é um resultado notável devido à P. Aluffi [Alu99, Theorem 1.4] que nos permite calcular a classe de Schwartz-MacPherson de uma *hipersuperfície* $X \subset \mathbb{P}^n$ em termos do seu lugar singular $Y = \operatorname{Sing} X$:

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = c(T\mathbb{P}^n) \cap \Big(s(X,\mathbb{P}^n) + c(\mathcal{O}(X))^{-1}\,(s(Y,\mathbb{P}^n)^\vee \otimes \mathcal{O}(X))\Big) \qquad \in A_*\mathbb{P}^n. \tag{1}$$

Seja qual for o significado dos símbolos nesta fórmula, ela nos diz que "basta" calcular a classe de Segre $s(Y,\mathbb{P}^n)$ do lugar singular. Em princípio isto não ajuda muito. Citando P. Aluffi [Alu02]: *"Segre classes are in general extremely hard to compute. Why? Because* *blow-ups are hard to compute."* Por outro lado, para hipersuperfícies, o lugar singular de X coincide com o lugar de base do mapa racional

$$\operatorname{grad} X \colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

dado pelas derivadas parciais do polinômio que define X, chamado *o mapa gradiente* de X. Por sua vez a classe de Segre do lugar de base está diretamente relacionada com os *graus projetivos* (ou *multigrau*) $d_0, \dots, d_n$ do mapa: *grosso modo*, aqui o i-ésimo grau projetivo é o grau da pré-imagem de um espaço linear geral de codimensão i (veja a Definição 1.16 para o conceito preciso). A conexão é que tanto a classe de Segre como estes graus podem ser calculados via o gráfico do mapa. Em resumo, podemos calcular a classe $c_{\mathrm{SM}}(X)$ a partir dos graus projetivos do mapa gradiente (Teorema 1.21). Somos assim levados a estudar a geometria destes mapas.

Não é surpresa que mapas gradientes sejam também um tema clássico. Um problema interessante é a classificação de hipersuperfícies com mapa gradiente de grau topológico fixado ([Dol00], [FM12], [Huh14]), bem como a busca por fórmulas para os seus graus projetivos ([DP03], [FP07], [Huh12]). Encontra-se aqui o importante problema da classificação das hipersuperfícies *homaloidais*, aquelas cujo mapa gradiente é birracional. Este é o contexto de uma das motivações iniciais deste trabalho, e que explicamos a seguir.

Seja $C \subset \mathbb{P}^n$ uma curva racional normal. Como toda curva irredutível reduzida não-degenerada, C é não-defeituosa [EH16, Proposition 10.11, p. 372], o que aqui significa apenas que $\dim \operatorname{Sec}_k C = 2k - 1$ sempre que $2k \leq n$. Repare que só obtemos hipersuperfícies em espaços de dimensão par. Suponha então $n = 2r$ e considere o mapa gradiente $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ associado à hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$, que é dada pelo determinante de uma matriz (genérica) de Hankel $\mathcal{H}_{r+1,r+1} = (x_{i+j})_{ij}$ (veja (2.1)). Seu ideal jacobiano foi estudado em detalhe em [Mo14] e [MS16] do ponto de vista da Álgebra Comutativa. O mapa ϕ_r é sempre dominante [Mo14, Proposition 3.1.1] e não é birracional para $r = 2$ [Mo14, Proposition 3.2.1] (para $r = 1$, é um isomorfismo linear de $\mathbb{P}^2$, nada emocionante). Mais ainda, M. Mostafazadehfard e A. Simis propuseram a seguinte:

Conjectura [MS16]. *Para $r \geq 2$, o mapa ϕ_r não é birracional.*

No Corolário 3.9 provamos que $\deg(\phi_r) = \frac{1}{r+1}\binom{2r}{r}$, os quais formam a famosa sequência dos *números de Catalan*: $1, 1, 2, 5, 14, \dots$ mostrando consequentemente que a Conjectura de Mostafazadehfard e Simis é verdadeira.

No intuito de determinar a classe $c_{\mathrm{SM}}(\operatorname{Sec}_r C) \in A_*\mathbb{P}^{2r}$, buscamos calcular os outros graus projetivos destes mapas, o que conseguimos apenas em casos particulares. Estes casos são suficientes para conjecturar uma fórmula para o caso geral, como detalharemos adiante.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos. O primeiro é essencialmente independente dos demais.

No Capítulo 1 são apresentados preliminares sobre as classes características das quais faremos uso no decorrer do texto, os graus projetivos de um mapa racional, e na sequência especializamos para o mapa gradiente de uma hipersuperfície projetiva. O principal resultado do capítulo descreve uma relação entre as classes de Schwartz-MacPherson de um subconjunto localmente fechado de um espaço projetivo e de uma seção hiperplana genérica:

Teorema 1.24. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto localmente fechado e $H \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano geral. Então:*

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h}{1+h} \qquad \in A_*\mathbb{P}^n.$$

Obtivemos este resultado, de maneira independente, por volta da mesma época da publicação do preprint de Aluffi [Alu13]; lá os resultados são mais gerais e valem sobre qualquer corpo algebricamente fechado de característica zero. Posteriormente percebemos que de fato, sobre os números complexos, o teorema já havia sido publicado em 2003 por T. Ohmoto [Ohm03, Theorem 1.1].

As classes de Milnor (veja Definição 1.14) foram introduzidas por P. Aluffi em [Alu95] e generalizam os números de Milnor para singularidades isoladas bem como os números de Parusiński [Par88]. É em termos destas classes que, com o auxílio do Teorema 1.24, obtemos uma fórmula para o grau do mapa gradiente de hipersuperfícies projetivas com singularidades arbitrárias:

Teorema 1.30. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau k. Então*

$$\deg \operatorname{grad} X = (k-1)^n - \mu(X) - \mu(X \cap H),$$

onde $H \subset \mathbb{P}^n$ é um hiperplano genérico e $\mu(\cdot)$ denota o grau da classe de Milnor.

Esta fórmula generaliza a conhecida expressão para singularidades isoladas (Teorema 1.28).

No Capítulo 2 revisamos as variedades secantes em geral, especializando para nosso caso de interesse, as secantes superiores de curvas racionais normais. Em seguida, a partir de uma fórmula devida a Abhyankar, deduzimos uma expressão particularmente simples para as séries de Hilbert de variedades determinantais gerais dadas por *menores maximais* (Proposição 2.5), da qual decorre uma expressão similar para a série de Hilbert para as secantes de uma curva racional normal qualquer (Corolário 2.8). Em seguida, via uma ação de grupos conveniente, calculamos a característica de Euler topológica:

Teorema 2.13. Se $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva racional normal, então temos $\chi_{\mathrm{top}}(\operatorname{Sec}_k C) = 2k$ sempre que $2k-1 \leq n$.

Especializamos em seguida para o caso de hipersuperfícies, quando o espaço ambiente tem dimensão par. Tome $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ uma curva racional normal. Na Proposição 2.15 mostramos que a variedade dual $(\operatorname{Sec}_r C)^* \subset (\mathbb{P}^{2r})^*$ é isomorfa, via uma projeção linear, à variedade de Veronese $\nu_2(\mathbb{P}^r)$. A partir daí obtemos uma fórmula para a classe de Mather destas hipersuperfícies:

Teorema 2.19. Dado $r \geq 1$, a classe de Mather da hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ é

$$c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C) = (1+h)^r \sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \binom{r+1}{2j+1} h^{2j+1} \qquad \in A_*\mathbb{P}^{2r}.$$

Em particular, todos os coeficientes da classe de Mather são positivos. X. Zhang [Zha18, § 7.6] conjecturou que um resultado de positividade similar deve valer para a classe de Mather de variedades determinantais genéricas.

Como consequência obtemos também o chamado *grau distância Euclidiana genérica* da r-secante (Corolário 2.22):

$$\mathrm{gEDdeg}(\mathrm{Sec}_r C) = \frac{3^{r+1}-1}{2}.$$

R. Piene descreve em [Pie88, Théorèm 3], uma relação precisa entre os graus polares e as classes de Mather para uma variedade projetiva. A partir desta relação e do Teorema 2.19, obtemos então expressões explícitas (2.18) para os graus polares das secantes $\mathrm{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$.

Para o restante da introdução, denote por $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ uma curva racional normal e seja $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ mapa gradiente associado à hipersuperfície $\mathrm{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$.

No Capítulo 3, respondemos positivamente à Conjectura [MS16] enunciada acima, calculando o grau do mapa gradiente:

Corolário 3.9. $\deg(\phi_r) = \dfrac{1}{r+1}\dbinom{2r}{r}$.

Nossa abordagem consiste em fatorar o mapa ϕ_r por um certo mapa birracional ψ_r, seguido por uma projeção linear da Grassmanianna $\mathbb{G}(r-1, r+1)$:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{G}(r-1,r+1) \arrow[dr, "\pi_r"] & \\ \mathbb{P}^{2r} \arrow[ur, dashed, "\psi_r"] \arrow[rr, dashed, "\phi_r"] & & \mathbb{P}^{2r} \end{tikzcd}$$

O mapa ψ_r é definido pelos menores maximais da matriz de Hankel $\mathcal{H}_{r,r+2} = (x_{i+j})_{ij}$. Nosso resultado principal aqui é o Teorema 3.7, que nos diz que os graus projetivos dos mapas ϕ_r e ψ_r coincidem. Segue daí a fórmula para $\deg(\phi_r)$. Uma outra consequência (Corolário 3.10) é que as classes de Segre de $\mathrm{Sec}_{r-1} C$ e de $\mathrm{Sing}\,\mathrm{Sec}_r C$ coincidem. Isto é surpreendente uma vez que, embora estes esquemas coincidam como conjuntos (Proposição 2.4), este último em geral não é reduzido.

Finalizamos o capítulo calculando alguns dos outros graus projetivos (Proposição 3.12), o que servirá de suporte para a parte final da tese.

O assunto do Capítulo 4 é uma conjectura sobre os graus projetivos $d_0(\phi_r), \ldots, d_{2r}(\phi_r)$ do mapa gradiente e as classes $c_{\mathrm{SM}}(\mathrm{Sec}_r C)$. É conveniente considerar o aberto complementar $U_r := \mathbb{P}^{2r} \setminus \mathrm{Sec}_r C$. Para $i = 0, 1, \ldots, 2r$, denote por $c_i(U_r)$ o coeficiente de $[\mathbb{P}^i]$ na classe $c_{\mathrm{SM}}(U_r)$, ou seja,

$$c_{\mathrm{SM}}(U_r) = c_0(U_r)[\mathbb{P}^0] + c_1(U_r)[\mathbb{P}^1] + \cdots + c_{2r}(U_r)[\mathbb{P}^{2r}] \qquad \in A_*\mathbb{P}^{2r}.$$

Então:

Conjectura A.

$$c_i(U_r) = \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]} \qquad \text{e} \qquad d_i(\phi_r) = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k+1}\binom{k}{i-k}\binom{r}{k}\binom{2k}{k}.$$

Este capítulo conta a história de como chegamos a expressões tão precisas. De fato a Conjectura A vem como reformulação de uma outra que fizemos inicialmente, e que descrevemos agora.

Na Proposição 3.12 calculamos explicitamente as funções $d_i(\phi_r)$ para $i \leq 4$. Em cada um destes casos vimos que $d_i(\phi_r)$ é polinomial em r, de grau i. Entre estas, a expressão para $d_4(\phi_r)$ é a mais intrigante. No seu cálculo, necessitamos do gênero de uma certa curva não-singular, obtido via a série de Hilbert calculada no Capítulo 2. Nossa ideia inicial (e infrutífera) era estimar o gênero via a desigualdade de Castelnuovo, ou seja, o Teorema de Riemann-Roch. Dessa heurística ficou a ideia fixa *comportamento polinomial*. Isto, juntamente com os resultados empíricos obtidos via Macaulay2 (veja B.1.1 no Apêndice), nos conduziu à seguinte:

Conjectura A'. *Para cada $i \geq 0$ fixado, tem-se:*

(a) *A função $c_i(U_r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

(b) *A função $d_i(\phi_r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

Supondo a validade da Conjectura A', obtemos no Teorema 4.2 um algoritmo que calcula simultaneamente as funções c_i e d_i para todo $i \geq 0$, caracterizando-as de modo único. Utilizando os resultados produzidos pelo algoritmo, consideramos então as *funções geradoras* associadas, isto é, séries formais com coeficientes dados pelos valores destas funções; especificamente, olhamos para $p_i(x) := \sum_{r\geq 0} d_i(r)x^r$. Estas, por sua vez, se escrevem como funções racionais $p_i(x) = a_i(x)/b_i(x)$. E aqui ocorre uma conexão inesperada: em todos os exemplos que calculamos, os numeradores destas funções racionais, após pequenos ajustes, coincidem com os polinômios de *Kazhdan-Lusztig* de (matróides associados a) grafos completos tripartidos $K_{1,1,i}$ obtidos por K. Gedeon em um artigo recente ([Ged17]). Estes polinômios constituem um invariante importante em Combinatória. Cabe mencionar também a relação com os *caminhos de Dyck com semicomprimento e número de subidas longas fixados*; veja a seção 4.3 para detalhes.

É a partir desta conexão que obtemos as expressões que aparecem na Conjectura A. Mostramos no Teorema 4.9 que de fato estas são as fórmulas para as sequências produzidas pelo algoritmo do Teorema 4.2, demonstrando assim que a Conjectura A e a Conjectura A' são equivalentes.

Apresentamos no Teorema 4.11 uma longa lista de reformulações equivalentes da nossa Conjectura A/A', incluindo expressões para as funções geradoras envolvidas. No Corolário 4.12 mostramos que a eventual validade da nossa conjectura tem como consequência a positividade dos coeficientes das classes $c_{\mathrm{SM}}(U_r)$ e $c_{\mathrm{SM}}(\mathrm{Sec}_r\, C)$ em $A_*\mathbb{P}^{2r}$. Este é um tema relevante: X. Zhang [Zha18, § 7.6] conjecturou algo similar para variedades determinantais genéricas; J. Huh [Huh16] provou a efetividade de c_{SM} para células de Schubert em Grassmannianas, que havia sido conjecturado por P. Aluffi e L. Mihalcea; e posteriormente, em [AMSS17], os autores estenderam o resultado para células de Schubert em certas variedades bandeira.

Na Proposição 4.13 destacamos ainda uma outra reformulação que acreditamos ser uma estratégia promissora para a demonstração da nossa conjectura. Por fim, concluímos o capítulo apresentando uma lista de evidências que apontam para a validade da conjectura.

O Apêndice A trata de combinatória, contém demonstrações de identidades binomiais necessárias no Capítulo 4. Finalmente, o Apêndice B contém diversas porções de código para o Macaulay2, com cálculos de exemplos e uma implementação do algoritmo do Teorema 4.2.

Notação e convenções

Trabalhamos sobre o corpo dos números complexos.

Denotamos a característica de Euler topológica de uma variedade X por $\chi_{\text{top}}(X)$.

Para um mergulho fechado $i\colon X \hookrightarrow M$ e um ciclo $\alpha \in A_*X$, sempre que possível omitimos o pushforward indicando o grupo de Chow do contra-domínio, ou seja, no lugar de $i_*\alpha$ escrevemos $\alpha \in A_*M$.

Na maioria dos resultados e exemplos, as classes que calculamos pertencem ao grupo de Chow de um espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Salvo exceção, denotamos a classe hiperplana por $h = c_1(\mathcal{O}(1)) \cap [\mathbb{P}^n]$. Observe que $A_*\mathbb{P}^n \cong \mathbb{Z}[h]/(h^{n+1})$.

Dizemos que uma variedade $X \subset \mathbb{P}^n$ é *não-degenerada* quando não está contida em um hiperplano.

Para uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^n$ fica implícito que C tem grau n e portanto é não-degenerada.

Dado um mapa racional $\phi\colon \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^N$, denotamos por $\deg(\phi)$ o grau topológico do mapa, isto é, a cardinalidade da pré-imagem de um ponto geral de $\phi(\mathbb{P}^n)$. Quando o mapa não é genericamente finito, definimos $\deg(\phi) = 0$.

Dado $d \in \mathbb{Z}$, definimos os *polinômios binomiais* em $\mathbb{Q}[x]$ da seguinte maneira:

$$\binom{x}{d} := \begin{cases} \frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-d+1)}{d!}, & \text{se } d > 0 \\ 1, & \text{se } d = 0 \\ 0, & \text{se } d < 0. \end{cases}$$

Este é um polinômio de grau d sempre que $d \geq 0$. Finalmente, se a é um inteiro, então $\binom{a}{d}$ denota o polinômio binomial avaliado em a e em particular se $0 \leq a < d$, então $\binom{a}{d} = 0$.

Capítulo 1

Classes características

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos sobre classes características que serão necessários para os capítulos seguintes. Iniciamos o capítulo apresentando as diversas classes de que faremos uso: Schwartz-MacPherson, Mather, Segre, Fulton e de Milnor. No caso particular de hipersuperfícies projetivas, mostramos que existem relações entre estas classes e o mapa gradiente dado pela equação que define a hipersuperfície.

As referências básicas para Teoria de Interseção são [Ful84] e [EH16].

1.1 Preliminares

Em [Mac74], R. MacPherson definiu classes de Chern para variedades singulares, as quais concordam com a noção de classe de Chern para variedades não-singulares. Entre outras, encontram-se as classes de Schwartz-MacPherson, de Fulton e de Mather. Destacamos as duas primeiras uma vez que a diferença entre elas, a menos de sinal, define a classe de Milnor, que guarda informação sobre o lugar singular da variedade.

Começamos descrevendo a classe de Schwartz-MacPherson (c_{SM}). Como referências indicamos [Ful84, Example 19.1.7, p. 376], [Alu99], [Alu03], [Zha18] e particularmente [Alu02].

Seja X uma variedade algébrica.

Uma **função construtível em** X é uma soma finita $\sum m_V 1_V$ sobre todas as subvariedades fechadas irredutíveis V de X, os coeficientes m_V são números inteiros e

$$1_V(x) := \begin{cases} 1, & \text{se } x \in V \\ 0, & \text{se } x \in X \setminus V \end{cases}.$$

Denotemos por $\mathcal{C}(X)$ o conjunto das funções construtíveis em X. Este é um grupo abeliano com a soma de funções, e é livremente gerado pelas funções

$$\{1_V;\ V \subset X \text{ é uma subvariedade fechada irredutível}\}.$$

Dado um morfismo $f\colon X \longrightarrow Y$, definimos o *pushforward*

$$f_*\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow \mathcal{C}(Y)$$

como segue. Para cada subvariedade fechada irredutível $V \subset X$ e $p \in Y$

$$f_*(1_V)(p) := \chi_{\text{top}}(f^{-1}(p) \cap V)$$

e estendemos linearmente: $f_*(\sum m_V 1_V) = \sum m_V f_*(1_V)$. Temos assim um funtor ([Mac74, Proposition 1] ou [Alu13, Lemma 2.3]) da categoria das variedades algébricas com mapas regulares para a categoria dos grupos abelianos.

Por outro lado, temos o **funtor de Chow** A_* (veja por exemplo [Ful84, Chapter 1]), que associa cada variedade X ao grupo abeliano (chamado o grupo dos *ciclos* de X)

$$A_*X = \bigoplus_k A_k X,$$

onde, para cada k, A_kX é o grupo abeliano livre gerado pelas subvariedades fechadas irredutíveis k-dimensionais em X, módulo equivalência racional: se $\alpha \in A_kX$, então $\alpha = \sum_i m_i[V_i]$ onde $m_i \in \mathbb{Z}$ e $V_i \subset X$ tem dimensão k. Dizemos que α é um *k-ciclo* de X. Aqui, para cada um morfismo próprio $f\colon X \longrightarrow Y$, temos o morfismo *pushforward*

$$f_*\colon A_*X \longrightarrow A_*Y$$

induzido pela definição $f_*[V] := \deg(V/f(V))[f(V)]$, onde $V \subset X$ é uma subvariedade irredutível e

$$\deg(V/f(V)) = \begin{cases} [R(V) : R(f(V))], & \text{se } \dim f(V) = \dim V \\ 0, & \text{se } \dim f(V) < \dim V \end{cases},$$

sendo $[R(V) : R(f(V))]$ o grau da extensão de corpos de funções racionais (veja [Ful84, Theorem 1.4, p. 11]). Observe também que [Ful84, p. 13]

$$\int \alpha = \int f_*(\alpha)$$

para todo ciclo $\alpha \in A_*(X)$.

Em [Mac74, Theorem 1], R. MacPherson provou, o que havia sido conjecturado por Deligne e Grothendieck, que para variedades complexas compactas existe uma transformação natural

$$\mathcal{C} \rightsquigarrow A_*$$

resultado que foi estendido em [Ken90] para variedades completas sobre qualquer corpo algebricamente fechado de característica zero. Isto significa que para cada variedade completa X existe um homomorfismo de grupos abelianos $c_*(X)\colon \mathcal{C}(X) \longrightarrow A_*(X)$ (que denotamos simplesmente por c_*) tal que, para cada morfismo próprio $f\colon X \longrightarrow Y$ entre variedades completas tem-se

$$c_*(f_*(\varphi)) = f_*(c_*(\varphi))$$

para cada função construtível $\varphi \in \mathcal{C}(X)$. Em outras palavras, vale a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "c_*"'] & \mathcal{C}(Y) \arrow[d, "c_*"] \\ A_*(X) \arrow[r, "f_*"'] & A_*(Y) \end{tikzcd}$$

Definição 1.1. Dada uma variedade completa X possivelmente singular, definimos a **classe de Schwartz-MacPherson de** X como

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = c_*(1_X) \quad \in A_*(X).$$

Mais ainda, se V é uma subvariedade de X (fechada ou não), por abuso de linguagem definimos $c_{\mathrm{SM}}(V) = c_*(1_V) \in A_*(X)$.

Observação 1.2. [Alu03, Proposition 3.1]

1. O grau da classe de Schwartz-MacPherson é a característica de Euler da variedade:

$$\int c_{\mathrm{SM}}(X) = \chi_{\mathrm{top}}(X).$$

   De fato, consideremos o mapa constante $\kappa\colon X \longrightarrow \{\text{ponto}\}$. Então:

$$\kappa_*(c_{\mathrm{SM}}(X)) = \chi_{\mathrm{top}}(X) \cdot 1_{\{\text{ponto}\}},$$

   pois, pela relação de funtorialidade,

$$\begin{aligned}\kappa_*(c_{\mathrm{SM}}(X)) = \kappa_*(c_*(1_X)) &= c_*(\kappa_*(1_X))\\ &= c_*(\chi_{\mathrm{top}}(X) \cdot 1_{\{\text{ponto}\}})\\ &= \chi_{\mathrm{top}}(X) \cdot c_*(1_{\{\text{ponto}\}})\\ &= \chi_{\mathrm{top}}(X) \cdot [\text{ponto}].\end{aligned}$$

   Logo, tomando graus, obtém-se o afirmado.

2. A classe de Schwartz-MacPherson satisfaz o princípio de inclusão-exclusão: se V_1, V_2 são subvariedades de uma variedade completa X, então

$$c_{\mathrm{SM}}(V_1 \cap V_2) = c_{\mathrm{SM}}(V_1) + c_{\mathrm{SM}}(V_2) - c_{\mathrm{SM}}(V_1 \cup V_2) \quad \in A_*X.$$

3. Quando X é não-singular, $c_{\mathrm{SM}}(X) = c(TX) \cap [X]$.

□

Exemplo 1.3. [Alu10, 1.9.2] Sejam X uma variedade não-singular, V uma subvariedade não-singular de X de codimensão d e $\pi\colon \tilde{X} \longrightarrow X$ o mapa do blow-up de X ao longo de V. Da identificação do divisor excepcional com o projetivizado do fibrado normal de V em X vem que a característica de Euler das fibras é

$$\chi_{\mathrm{top}}(\pi^{-1}(q)) := \begin{cases} 1, & \text{se } q \in X \setminus V \\ d, & \text{se } q \in V \end{cases},$$

(note que $\chi_{\mathrm{top}}(\mathbb{P}^{d-1}) = d$, veja o Exemplo 2.11) e portanto

$$\pi_*(1_{\tilde{X}}) = 1_X + (d-1)1_V.$$

Da relação de funtorialidade de MacPherson obtemos

$$\begin{aligned}\pi_*(c_{\mathrm{SM}}(\tilde{X})) &= \pi_*(c_*(1_{\tilde{X}}))\\ &= c_*(\pi_*(1_{\tilde{X}}))\\ &= c_*(1_X + (d-1)\cdot 1_V)\\ &= c_*(1_X) + (d-1)\cdot c_*(1_V)\\ &= c_{\mathrm{SM}}(X) + (d-1)\cdot c_{\mathrm{SM}}(V).\end{aligned}$$

Em particular, tomando graus:

$$\chi_{\mathrm{top}}(\tilde{X}) = \chi_{\mathrm{top}}(X) + (d-1)\cdot \chi_{\mathrm{top}}(V).$$

□

Definição 1.4. [Mac74, § 2] Seja X uma subvariedade de uma variedade não-singular M, e seja $G(\dim X, TM)$ o fibrado Grassmanniana [EH16, § 9.6, p. 346]. A correspondência $x \mapsto T_xX$ nos dá um mapa racional

$$X \dashrightarrow G(\dim X, TM).$$

O fecho $\tilde{X}$ da imagem é chamado o **blow-up de Nash de** X e vem equipado com um mapa natural $\upsilon\colon \tilde{X} \to X$. Definimos a **classe de Chern-Mather de** X como

$$c_{\mathrm{Ma}}(X) = \upsilon_*(c(\mathcal{T}) \cap [\tilde{X}]) \quad \in A_*X$$

onde $\mathcal{T}$ é o fibrado tautológico da Grassmanniana.

Observação 1.5. [Alu99, p. 3993-3994]

1. A definição acima independe da escolha de M.
2. Quando X é não-singular, tem-se $c_{\mathrm{Ma}}(X) = c(TX) \cap [X]$.
3. Em geral, as classes $c_{\mathrm{Ma}}(X)$ e $c_{\mathrm{SM}}(X)$ são distintas.

Para um exemplo onde estas classes diferem, tome $X \subset \mathbb{P}^4$ a secante da quártica racional normal. Veremos no Exemplo 1.22 que

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = 3h + 6h^2 + 8h^3 + 4h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4,$$

enquanto que pelo Exemplo 2.23

$$c_{\mathrm{Ma}}(X) = 3h + 6h^2 + 4h^3 + 2h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4.$$

□

Definição 1.6. Seja X um subesquema fechado próprio de uma variedade não-singular M, e seja $\tilde{M}$ o blow-up de M ao longo de X, com divisor excepcional $\tilde{X}$ e projeção $\eta\colon \tilde{X} \longrightarrow X$. A **classe de Segre de** X **em** M é definida por

$$s(X, M) = \sum_{k\geq 1} (-1)^{k-1}\eta_*(\tilde{X}^k) \quad \in A_*X,$$

onde $\tilde{X}^k$ é a auto-interseção de $\tilde{X}$.

Observação 1.7. [EH16, p. 454] Se X é não-singular, tem-se $s(X, M) = s(N_{X/M}) \cap [X]$, onde $s(N_{X/M})$ é a classe de Segre (isto é, o inverso da classe de Chern) do fibrado normal de X em M. □

Exemplo 1.8. (Classe de Segre da curva racional normal em $\mathbb{P}^4$): Seja $C \subset \mathbb{P}^4$ a quártica racional normal. Então

$$s(C, \mathbb{P}^4) = 4h^3 - 18h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4.$$

De fato, como C é não-singular, temos que $s(C, \mathbb{P}^4) = s(N_{C/\mathbb{P}^4}) \cap [C]$. Por outro lado, da sequência exata:

$$0 \longrightarrow TC \longrightarrow T\mathbb{P}^4|_C \longrightarrow N_{C/\mathbb{P}^4} \longrightarrow 0$$

segue, via a fórmula de Whitney, que

$$c(TC) \cdot c(N_{C/\mathbb{P}^4}) = c(T\mathbb{P}^4|_C),$$

e como $c(T\mathbb{P}^4|_C) = (1+h)^5$ e $c(TC) \cap [C] = \deg(C)h^3 + \chi_{\text{top}}(C)h^4 = 4h^3 + 2h^4 \in A_*\mathbb{P}^4$, tem-se

$$\begin{aligned} s(N_{C/\mathbb{P}^4}) \cap [C] &= c(T\mathbb{P}^4)^{-1} \cdot c(TC) \cap [C] \\ &= ((1+h)^5)^{-1} \cdot (4h^3 + 2h^4) \\ &= (1 - 5h + o(h^2)) \cdot (4h^3 + 2h^4) \\ &= 4h^3 - 18h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

□

Definição 1.9. Seja X um esquema que pode ser mergulhado como um subesquema fechado em uma variedade não-singular M. Definimos a **classe de Chern-Fulton de** X como

$$c_{\text{F}}(X) = c(TM|_X) \cap s(X, M) \quad \in A_*(X).$$

Observação 1.10. [Ful84, Example 4.2.6(a), p. 77]

(a) A definição acima independe da escolha do mergulho de X.

(b) Se X é localmente de interseção completa, então

$$c_{\text{F}}(X) = c(TX) \cap [X],$$

onde $TX = TM|_X - N_{X/M}$ é o fibrado tangente virtual de X.

(c) Se X é não-singular, tem-se $c_{\text{F}}(X) = c(TX) \cap [X]$.

□

Exemplo 1.11. Consideremos as curvas planas $C = Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3)$ (cúbica de Fermat) e $D = Z(x_0x_1(x_0 + x_1))$ (três retas por um ponto). Então $\chi_{\text{top}}(C) = 0$ e $\chi_{\text{top}}(D) = 4$, portanto

$$c_{\text{SM}}(C) = 3h \quad e \quad c_{\text{SM}}(D) = 3h + 4h^2 \quad \in A_*\mathbb{P}^2.$$

Por outro lado, para as classes de Fulton:

$$c_{\text{F}}(C) = 3h = c_{\text{F}}(D) \quad \in A_*\mathbb{P}^2.$$

□

Observação 1.12. Vimos no exemplo acima duas curvas planas de mesmo grau para as quais as classes de Schwartz-MacPherson são distintas, mas as classes de Fulton coincidem. Esta “insensibilidade” da classe de Fulton é um fato geral. Precisamente: *duas hipersuperfícies de mesmo grau em $\mathbb{P}^n$ têm a mesma classe de Fulton.*

Com efeito, como uma hipersuperfície $X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ de grau d é localmente de interseção completa, sua classe de Segre é dada pelo inverso da classe de Chern [EH16, p. 454] e portanto igual a $\frac{[X]}{1+[X]} = \frac{dh}{1+dh} = dh - d^2h^2 + d^3h^3 - \cdots \in A_*\mathbb{P}^n$. A afirmação segue daí pela fórmula de projeção. $\square$

Exemplo 1.13. Seja $Y \subset \mathbb{P}^n$ a hipersuperfície não-singular de grau d. Vamos calcular a classe do fibrado tangente de Y.

De fato, a partir da sequência exata

$$0 \longrightarrow TY \longrightarrow T\mathbb{P}^n|_Y \longrightarrow N_{Y/\mathbb{P}^n} \longrightarrow 0$$

e da fórmula de adjunção ([Ful84, Examples 3.2.11 e 3.2.12, p. 59]), tem-se

$$\begin{aligned} c(TY) \cap [Y] &= c(T\mathbb{P}^n|_Y)c(N_{Y/\mathbb{P}^n})^{-1} \cap [Y] \\ &= (1+h)^{n+1}(1+dh)^{-1} \cap [dh] \\ &= (1+h)^{n+1}(dh - (dh)^2 + (dh)^3 - \cdots) \quad \in A_*\mathbb{P}^n. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.14. Definimos a **classe de Milnor** de X como

$$\mathcal{M}(X) = (-1)^{\dim(X)}\Big(c_{\mathrm{F}}(X) - c_{\mathrm{SM}}(X)\Big) \quad \in A_*X.$$

O grau da classe de Milnor, $\mu(X) := \int \mathcal{M}(X)$, é chamado **número de Parusiński** de X. No caso em que X tem apenas singularidades isoladas, ele coincide com a soma dos números de Milnor.

Para uma variedade não-singular, a classe de Milnor é nula.

Exemplo 1.15. Seja $X \subset \mathbb{P}^5$ a hipersuperfície discriminante que parametriza as cônicas planas singulares. Então X é uma cúbica, dada pelo lugar dos zeros do determinante da matriz simétrica 3×3 (genérica).

Para o cálculo de $c_{\mathrm{F}}(X)$, segue da Observação 1.12 que é suficiente calcular a classe de Fulton de uma hipersuperfície cúbica não-singular $Y \subset \mathbb{P}^5$ e, neste caso, $c_{\mathrm{F}}(Y) = c(TY) \cap [Y]$, e pelo Exemplo 1.13:

$$c_{\mathrm{F}}(X) = 3h + 9h^2 + 18h^3 + 6h^4 + 27h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5.$$

Por outro lado, de [Alu03, Example 4.5], a classe de Schwartz-MacPherson de X é:

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = 3h + 9h^2 + 14h^3 + 12h^4 + 6h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5$$

e logo, por definição,

$$\mathcal{M}(X) = 4h^3 - 6h^4 + 21h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5.$$

$\square$

1.2 Graus projetivos de mapas racionais

Definição 1.16. Sejam $M \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade projetiva de dimensão s e $\phi\colon M \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ uma aplicação racional. Os **graus projetivos** ou o **multigrau*** de ϕ são os coeficientes $d_0, d_1, \ldots, d_s$, da classe do fecho do gráfico Γ do mapa ϕ em $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^N$:

$$[\Gamma] = \sum_{i=0}^{s} d_i \cdot [\mathbb{P}^{s-i} \times \mathbb{P}^i],$$

portanto

$$d_i = \deg(\phi^{-1}(\mathbb{P}^{N-i}) \cap \mathbb{P}^{n-(s-i)}),$$

onde $\mathbb{P}^{n-(s-i)}$ e $\mathbb{P}^{N-i}$ são subespaços lineares de $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^N$, respectivamente.

Note que:

1. $d_s = 0$ se, e somente se, a fibra geral de ϕ tem dimensão positiva.
2. Se a fibra geral consiste de k pontos reduzidos, então $d_s = k \cdot \deg \overline{\mathrm{Im}(\phi)}$.
3. $d_0 = \deg M$, e $d_i = 0$ se, e somente se, $i > \dim \mathrm{Im}(\phi)$.
4. Observe que o i-ésimo grau projetivo de ϕ coincide com o i-ésimo grau projetivo da restrição de ϕ à interseção de M com um $\mathbb{P}^i \subset \mathbb{P}^n$ geral, ou seja: $d_i(\phi) = d_i(\phi|_{M \cap \mathbb{P}^i})$.

A partir de agora nos restringiremos ao caso em que $M = \mathbb{P}^n$.

Seja Y um subesquema fechado de $\mathbb{P}^n$ dado por um ideal homogêneo $I = (f_0, \ldots, f_N)$, e suponhamos que os geradores de I têm o mesmo grau. Consideremos o mapa racional associado ao ideal I

$$\begin{array}{rcccl} \varphi & : & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^N \\ & & p & \longmapsto & \big(f_0(p) : \cdots : f_N(p)\big). \end{array}$$

cujo lugar de base é o esquema Y. O resultado básico é que (o pushforward de) a classe de Segre do lugar de base pode ser calculada em termos dos graus projetivos $d_0, \ldots, d_n$ deste mapa e vice-versa. Denotamos por h a classe hiperplana em $A_*\mathbb{P}^n$ e escrevemos $s(Y, \mathbb{P}^n) = \sum_{j=0}^{n} s_j h^j \in A_*\mathbb{P}^n$.

Proposição 1.17 ([Alu03, Proposition 3.1])**.** *Mantenha a notação acima e seja r o grau comum dos polinômios que definem o ideal I. Então:*

$$s(Y, \mathbb{P}^n) = 1 - c(\mathcal{O}(rh))^{-1} \cap \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{d_i h^i}{c(\mathcal{O}(rh))^i} \right) \qquad \in A_*\mathbb{P}^n.$$

Expandindo, obtemos $s_0 = 0$ e, para $l \in \{1, \ldots, n\}$,

$$s_l = -\sum_{i+j=l} (-1)^j \binom{l}{i} d_i r^j \tag{1.1}$$

e invertendo estas relações,

$$d_k = r^k - \sum_{j=1}^{n} \binom{k}{j} s_j r^{k-j}. \tag{1.2}$$

para $k = 0, \ldots, n$.

*Seguimos a nomenclatura em [Harr92, Example 19.4]. Aproveitamos para avisar que nossa escolha de índices difere daquela ali estabelecida: o que aqui indicamos por 'd_s' lá se indica 'd_0', etc.

1.3 Mapas gradientes e classes CSM de hipersuperfícies

O objetivo desta seção é estudar o mapa gradiente associado a uma hipersuperfície projetiva, apresentando exemplos, propriedades, além da importante relação entre os graus projetivos do mapa e a classe de Schwartz-MacPherson da hipersuperfície.

Seja X uma hipersuperfície de grau k em $\mathbb{P}^n$, definida pelos zeros de um polinômio homogêneo $f \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.

Definição 1.18. O **mapa gradiente (ou polar)** de X (ou de f) é a aplicação racional

$$\begin{array}{rcccl} \operatorname{grad} X & : & \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & & p & \longmapsto & (f_{x_0}(p) : \cdots : f_{x_n}(p)), \end{array}$$

onde $f_{x_i} = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$, para $i = 0, \ldots, n$.

O mapa gradiente é portanto uma extensão do mapa de Gauss da hipersuperfície para o espaço ambiente. O lugar de base deste mapa é o esquema dos pontos singulares de X.

O grau topológico do mapa gradiente de X (ou de f) é a cardinalidade de uma fibra genérica (e 0 se o mapa não for dominante), e este grau coincide com o n-ésimo grau projetivo do mapa $\operatorname{grad} X$. Dizemos que X é **homaloidal** se o seu mapa gradiente é birracional.

Observamos que, para o cálculo do grau topológico do mapa gradiente de f, podemos supor f é reduzido ([DP03, Corollary 2]).

Observação 1.19. Uma justificativa para o estudo de mapas gradiente está no fato que certas propriedades do mapa refletem informações sobre a geometria da hipersuperfície.

1. A hipersuperfície $X = Z(f)$ é não-singular se, e somente se, o mapa gradiente associado $\operatorname{grad} X$ é um morfismo.

2. Note que a hessiana de f coincide com o jacobiano do mapa gradiente e logo X tem Hessiano não-nulo se, e somente se, $\operatorname{grad} X$ é um mapa dominante.

□

Vejamos alguns exemplos simples de hipersuperfícies homaloidais.

Exemplo 1.20.

1. Para $f = x_0^2 + \cdots + x_n^2$, $X = Z(f)$ é uma quádrica não-singular em $\mathbb{P}^n$ cujo mapa gradiente é a aplicação identidade.

2. Se $f = x_0 \cdots x_n$, então $X = Z(f)$ é a união dos $n+1$ hiperplanos coordenados em $\mathbb{P}^n$, e o mapa gradiente de X é a transformação de Cremona padrão

$$(x_0 : \cdots : x_n) \longmapsto (x_1 \cdots x_n : \cdots : x_0 \cdots x_{n-1}),$$

a qual é uma aplicação birracional com $(\operatorname{grad} X)^{-1} = \operatorname{grad} X$.

3. Fixado $n \geq 1$, a hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^{n^2-1}$ dada pelo determinante de matrizes $n \times n$ é homaloidal.

   De fato, a menos de uma mudança de coordenadas, o mapa polar do determinante é dado por $A \mapsto A^{-1}$ (regra de Cramer), sendo portanto birracional. □

O próximo teorema relaciona (o pushforward de) a classe de Schwartz-MacPherson com os graus projetivos do mapa gradiente de uma dada hipersuperfície, e é fundamental para as aplicações que faremos.

Teorema 1.21 ([Alu03, Theorem 2.1])**.** *Dada X uma hipersuperfície em $\mathbb{P}^n$, tem-se*

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = (1+h)^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} d_j(-h)^j(1+h)^{n-j} \qquad \in A_*\mathbb{P}^n$$

onde os d_j's são os graus projetivos do mapa gradiente de X.

Exemplo 1.22. (Mapa gradiente da secante da quártica racional normal). Sejam $C \subset \mathbb{P}^4$ a curva racional normal e X a variedade secante de C (fecho do lugar das retas por dois pontos gerais de C). Veremos no próximo capítulo (Proposição 2.2) que X é uma hipersuperfície cúbica de $\mathbb{P}^4$, dada pelos zeros do polinômio

$$F = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

e que $\operatorname{Sing} X = C$ (veja também a Seção B.1), e portanto C é o lugar de base do mapa gradiente de X.

Logo, uma vez conhecida a classe de Segre de C (Exemplo 1.8), obtemos da Proposição 1.17 os graus projetivos do mapa $\operatorname{grad} X$:

$$(d_0, d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 2, 4, 4, 2)$$

e, consequentemente, do Teorema 1.21 obtemos a classe c_{SM} da variedade secante de C:

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = 3h + 6h^2 + 8h^3 + 4h^4 \qquad \in A_*\mathbb{P}^4.$$

□

1.4 Resultados sobre seções hiperplanas

O objetivo desta seção é a obtenção de uma fórmula para o cálculo do grau do mapa gradiente para hipersuperfícies com singularidades arbitrárias, a qual é dada em termos do seu grau e das classes de Milnor da hipersuperfície e de uma seção hiperplana geral. Este resultado, por sua vez decorrerá da expressão da classe de Schwartz-MacPherson de uma seção hiperplana genérica.

1.4.1 CSM de uma seção hiperplana

Como consequência do Teorema 1.21 e do lema seguinte, conseguimos expressar a classe de Schwartz-MacPherson de uma seção hiperplana genérica de uma hipersuperfície projetiva em termos da classe de Schwartz-MacPherson da hipersuperfície e da classe de Segre do hiperplano.

Lema 1.23. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície e $X' = X \cap H$ uma seção hiperplana genérica. Sejam $d_0, \dots, d_n$ e $d'_0, \dots, d'_{n-1}$ os graus projetivos dos mapas* $\operatorname{grad} X$ *e* $\operatorname{grad} X'$*, respectivamente. Então $d_i = d'_i$, para todo $i = 0, \dots, n-1$.*

Demonstração. Veja [DS15, Theorem 2.1]. □

O resultado a seguir, crucial para a obtenção do Teorema 1.30, foi provado independentemente em [Alu13, Proposition 2.6]. Posteriormente percebemos que de fato já havia sido publicado antes em [Ohm03, Theorem 1.1]. A ideia central na prova de Aluffi, que se encontra escondida no lema acima, é o cálculo da classe de Segre de uma seção linear geral do lugar singular (veja [Alu13, (2)]).

Teorema 1.24. *Sejam $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto localmente fechado e $H \subset \mathbb{P}^n$ um hiperplano geral. Denote por h a classe hiperplana em $\mathbb{P}^n$. Então:*

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h}{1+h} \quad \in A_*\mathbb{P}^n.$$

Demonstração. Iniciamos reduzindo ao caso em que X é uma hipersuperfície. Como X pode ser escrito como um conjunto diferença de conjuntos fechados, pela aditividade das classes c_{SM}, podemos supor que o próprio X é um conjunto fechado. Agora, como todo conjunto fechado pode ser escrito como uma interseção de hipersuperfícies podemos, pelo princípio de inclusão-exclusão, supor que X é uma hipersuperfície.

Portanto, pelo Teorema 1.21,

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = (1+h)^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} d_j(-h)^j(1+h)^{n-j} \quad \in A_*\mathbb{P}^n$$

e, tomando o pushforward via a inclusão $H = \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ e com a mesma notação do Lema 1.23,

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = h \cdot \left((1+h)^n - \sum_{j=0}^{n-1} d'_j(-h)^j(1+h)^{n-1-j}\right) \quad \in A_*\mathbb{P}^n.$$

Então, usando o fato de que $h^{n+1} = 0$ e o Lema 1.23, obtemos

$$\begin{aligned}
c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h}{1+h} &= \left((1+h)^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} d_j(-h)^j(1+h)^{n-j}\right) \cdot \frac{h}{1+h} \\
&= h \cdot \left((1+h)^n - \sum_{j=0}^{n-1} d_j(-h)^j(1+h)^{n-1-j} - (-h)^n(1+h)^{-1}d_n\right) \\
&= h \cdot \left((1+h)^n - \sum_{j=0}^{n-1} d'_j(-h)^j(1+h)^{n-1-j}\right) \\
&= c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) \quad \in A_*\mathbb{P}^n.
\end{aligned}$$

□

Da aplicação sucessiva do Teorema 1.24 decorre:

Corolário 1.25. *Para um conjunto localmente fechado $X \subset \mathbb{P}^n$ e hiperplanos gerais $H_1, \dots, H_r \subset \mathbb{P}^n$, tem-se:*

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r) = c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h^r}{(1+h)^r} \quad \in A_*\mathbb{P}^n,$$

onde h é classe hiperplana em $\mathbb{P}^n$.

Observação 1.26. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ um conjunto localmente fechado. O Teorema 1.24 nos diz que uma seção hiperplana carrega muita informação da classe original. Com efeito, escrevendo $c_{\mathrm{SM}}(X) = a_1 h + a_2 h^2 + \cdots + a_n h^n \in A_*\mathbb{P}^n$ e

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = b_1 h + \cdots + b_{n-1} h^{n-1} \quad \in A_*\mathbb{P}^{n-1},$$

temos que cada coeficiente b_k é uma soma alternada dos a_i's; precisamente:

$$b_k = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} a_i. \tag{1.3}$$

De fato, as características de Euler de sucessivas seções hiperplanas gerais e os coeficientes da classe c_{SM} carregam exatamente a mesma informação. Isto é uma conta simples e já foi feita em [Alu13]. Para hiperplanos gerais $H_1, \dots, H_r \subset \mathbb{P}^n$ $(1 \le r < n)$, sejam

$$\chi_X(t) := \sum_{r \ge 0} (-1)^r \chi_{\mathrm{top}}(X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r) t^r \qquad \text{e} \qquad \gamma_X(t) := \sum_{r=0}^{n-1} a_{r+1} t^r.$$

Do Corolário 1.25 segue que

$$\chi_{\mathrm{top}}(X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r) = \int c_{\mathrm{SM}}(X \cap H_1 \cap \cdots \cap H_r) = \int c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h^r}{(1+h)^r}.$$

Então [Alu13, Theorem 1.1] nos dá as seguintes relações:

$$\chi_X(t) = \mathcal{I}(\gamma_X) \qquad \text{e} \qquad \gamma_X(t) = \mathcal{I}(\chi_X),$$

onde $\mathcal{I}$ é a involução $p(t) \mapsto \dfrac{tp(-t-1) + p(0)}{t+1}$.

□

Naturalmente a hipótese "hiperplano geral" no Teorema 1.24 é essencial para a validade do resultado.

Exemplo 1.27. Seja $X = Z(x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) \subset \mathbb{P}^3$ a cúbica de Fermat e $H = Z(x_2 + x_3)$ o plano tangente a X no ponto $p = (0 : 0 : 1 : -1)$. Então $X \cap H$ é uma união de três retas passando por p e, pelo que vimos no Exemplo 1.11:

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = 3h^2 + 4h^3 \quad \in A_*\mathbb{P}^3$$

Por outro lado, da sequência de Euler e da fórmula de adjunção, obtemos

$$c(TX) = c(T\mathbb{P}^3|_X) c(N_{X/\mathbb{P}^3})^{-1} = (1+h)^4 \cdot (1+3h)^{-1},$$

portanto

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = c(TX) \cap [X] = (1 + h + 3h^2 - 5h^3) \cdot (3h) = 3h + 3h^2 + 9h^3 \quad \in A_*\mathbb{P}^3$$

e consequentemente

$$c_{\mathrm{SM}}(X) \cdot \frac{h}{1+h} = (3h + 3h^2 + 9h^3) \cdot (h - h^2 + h^3) = 3h^2 \quad \in A_*\mathbb{P}^3.$$

□

1.4.2 Fórmula para o grau do mapa gradiente

Nosso próximo objetivo é apresentar uma fórmula para o grau do mapa gradiente em termos da classe de Milnor. Uma tal expressão já é conhecida para o caso de singularidades isoladas, a saber:

Teorema 1.28. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau k com apenas singularidades isoladas. Então*

$$\deg \operatorname{grad} X = (k-1)^n - \sum_p \mu_p(X)$$

onde $\mu_p(X)$ é o número de Milnor.

Demonstração. Veja [Ful84], [Dim01] ou [FM12, Proposition 2.3]. □

Como consequência imediata da fórmula acima obtem-se:

Corolário 1.29. *O mapa gradiente de uma hipersuperfície não-singular em $\mathbb{P}^n$ de grau k tem grau topológico $(k-1)^n$. Em particular, se $k \geq 3$ então a hipersuperfície não é homaloidal (isto é, o mapa gradiente não é birracional).* □

O corolário nos diz que uma hipersuperfície homaloidal com grau $k \geq 3$ é necessariamente singular e é, portanto, uma exceção no sentido que as variedades não-singulares formam um aberto no espaço que as parametriza.

Para a generalização do Teorema 1.28, nossa contribuição do Capítulo, o substituto da soma dos números de Milnor são os graus das classes de Milnor da hipersuperfície e de uma seção hiperplana genérica.

Teorema 1.30. *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma hipersuperfície de grau k. Então*

$$\deg \operatorname{grad} X = (k-1)^n - \mu(X) - \mu(X \cap H),$$

onde $H \subset \mathbb{P}^n$ é um hiperplano genérico.

Demonstração. Sejam $d_0, d_1, \ldots, d_n$ os graus projetivos do mapa $\operatorname{grad} X$. A fórmula do enunciado seguirá da operação de duas relações auxiliares que enunciamos e provamos abaixo.

Afirmação 1.31. $\displaystyle\int c_{\mathrm{SM}}(X) - \int c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = 1 - (-1)^n d_n.$

De fato, pelos Teoremas 1.24 e 1.21,

$$c_{\mathrm{SM}}(X\cap H) = c_{\mathrm{SM}}(X)\cdot \frac{h}{1+h},$$

e

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = (1+h)^{n+1} - \sum_{j=0}^{n} d_j(-h)^j(1+h)^{n-j},$$

portanto

$$\begin{aligned}
\int c_{\mathrm{SM}}(X) - \int c_{\mathrm{SM}}(X\cap H) &= \int c_{\mathrm{SM}}(X)\Big(1-\frac{h}{1+h}\Big)\\
&= \int c_{\mathrm{SM}}(X)\frac{1}{1+h}\\
&= \int \Big((1+h)^n - \sum_{j=0}^{n} d_j(-h)^j(1+h)^{n-j-1}\Big)\\
&= 1-(-1)^n d_n.
\end{aligned}$$

Afirmação 1.32. $\int c_{\mathrm{F}}(X) - \int c_{\mathrm{F}}(X\cap H) = 1-(-1)^n(k-1)^n.$

De fato, para hipersuperfícies a classe de Fulton depende apenas do grau (Observação 1.12) e logo podemos supor X não-singular, donde $c_{\mathrm{F}}(X) = c_{\mathrm{SM}}(X) = c(TX)\cap[X]$. Neste caso o mapa gradiente é um morfismo e portanto pelo teorema de Bézout seu grau é igual a $(k-1)^n$. O desejado segue então da Afirmação 1.31.

O resultado do enunciado do Teorema seguirá da definição de classe de Milnor e das duas afirmações demonstradas:

$$\begin{aligned}
\mu(X)+\mu(X\cap H) &= \int \mathcal{M}(X) + \int \mathcal{M}(X\cap H)\\
&= (-1)^{n-1}\Big(\int c_{\mathrm{F}}(X) - \int c_{\mathrm{SM}}(X)\Big)\\
&+ (-1)^{n-2}\Big(\int c_{\mathrm{F}}(X\cap H) - \int c_{\mathrm{SM}}(X\cap H)\Big)\\
&= (-1)^{n-1}\Big(\int c_{\mathrm{F}}(X) - \int c_{\mathrm{F}}(X\cap H)\Big)\\
&+ (-1)^{n-1}\Big(\int c_{\mathrm{SM}}(X) - \int c_{\mathrm{SM}}(X\cap H)\Big)\\
&= (k-1)^n - d_n.
\end{aligned}$$

□

Observação 1.33. Na demonstração do teorema acima, a Afirmação 1.31 apresenta uma outra prova da fórmula de A. Dimca e S. Papadima sobre o grau topológico do mapa gradiente em termos das características de Euler da hipersuperfície e de uma seção hiperplana genérica: *se $X\subset\mathbb{P}^n$ é uma hipersuperfície e H é um hiperplano genérico, então*

$$\deg(\operatorname{grad} X) = (-1)^n(1-\chi_{\mathrm{top}}(X\setminus X\cap H)).$$

Esta fórmula foi obtida originalmente em [DP03, Theorem 1], utilizando métodos topológicos. □

Observação 1.34. Note que, o termo $\mu(X) + \mu(X \cap H)$ na fórmula do Teorema acima é a soma alternada dos coeficientes da classe de Milnor da hipersuperfície, ou equivalentemente, o grau $\int \frac{\mathcal{M}(X)}{1+h}$. □

No exemplo a seguir calculamos de maneira direta o grau do mapa gradiente da secante da curva racional normal em $\mathbb{P}^4$, e como consequência do Teorema 1.28, reobtemos os demais graus projetivos deste mapa. De fato, no Teorema 3.9 apresentaremos uma fórmula para o grau do mapa gradiente para todas as hipersuperfícies secantes de curvas racionais normais em espaços de dimensão par.

Exemplo 1.35. Revisitando o Exemplo 1.22: sejam $C \subset \mathbb{P}^4$ a curva quártica racional normal e $X \subset \mathbb{P}^4$ a variedade secante de C, a qual é uma hipersuperfície cúbica com $\operatorname{Sing} X = C$.

Vamos ilustrar como utilizar o Teorema 1.30 para o cálculo do grau do mapa $\operatorname{grad} X$.

Seguindo o argumento empregado no Exemplo 1.15, obtemos

$$c_{\mathrm{F}}(X) = 3h + 6h^2 + 12h^3 - 6h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4,$$

e, pelo Exemplo 1.22,

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = 3h + 6h^2 + 8h^3 + 4h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4,$$

portanto

$$\mathcal{M}(X) = (-1)^3\,(c_{\mathrm{F}}(X) - c_{\mathrm{SM}}(X)) = -4h^3 + 10h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4,$$

e logo $\mu(X) = 10$.

Agora, se H é um hiperplano genérico de $\mathbb{P}^4$, este intersecta $\operatorname{Sing} X$ em 4 pontos com multiplicidade 1 em cada, portanto $X \cap H$ é uma superfície cúbica de $\mathbb{P}^3$ com 4 nós ordinários (cúbica de Cayley), e daí concluímos que $\mu(X \cap H) = 4$.

Logo, pelo Teorema 1.30,

$$d_4 = \deg \operatorname{grad} X = (3-1)^4 - 10 - 4 = 2.$$

Por fim, vamos calcular os demais graus projetivos do mapa $\operatorname{grad} X$.

Pelo Lema 1.23, $d_3(X) = d_3(X \cap H_1)$, onde $H_1 \subset \mathbb{P}^4$ é um hiperplano genérico. Pelo Teorema 1.28,

$$d_3 = (3-1)^3 - \sum \mu_p = 8 - 4 = 4.$$

Pelo mesmo argumento, obtemos $d_2 = \deg \operatorname{grad}(X \cap H_1 \cap H_2)$, onde $H_2 \subset \mathbb{P}^4$ é outro hiperplano genérico. Como $X \cap H_1 \cap H_2$ é uma curva plana cúbica suave, segue-se que seu mapa gradiente tem grau $(3-1)^2 = 4$, logo $d_2 = 4$. Analogamente, $d_1 = (3-1)^1 = 2$, e $d_0 = 1$. □

Exemplo 1.36. Calculamos agora o grau topológico do mapa gradiente da hipersuperfície $X \subset \mathbb{P}^5$ do Exemplo 1.15, o discriminante das cônicas de $\mathbb{P}^2$. Utilizamos os dados do mesmo, a saber:

$$c_{\mathrm{F}}(X) = 3h + 9h^2 + 18h^3 + 6h^4 + 27h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5,$$

e

$$c_{\mathrm{SM}}(X) = 3h + 9h^2 + 14h^3 + 12h^4 + 6h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5.$$

Para um hiperplano genérico $H \subset \mathbb{P}^5$, consideremos a inclusão $X \cap H \hookrightarrow H$. Calculemos as expressões das classes para esta seção hiperplana. Da Observação 1.12 e do cálculo da classe do tangente de uma cúbica suave, que fizemos no Exemplo 1.35, tem-se:

$$c_{\mathrm{F}}(X \cap H) = 3h + 6h^2 + 12h^3 - 6h^4 \quad \in A_*H.$$

Por outro lado, do Teorema 1.24,

$$c_{\mathrm{SM}}(X \cap H) = 3h + 6h^2 + 8h^3 + 4h^4 \quad \in A_*H.$$

Portanto

$$\mathcal{M}(X) = 4h^3 - 6h^4 + 21h^5 \quad e \quad \mathcal{M}(X \cap H) = -4h^4 + 10h^5 \quad \in A_*\mathbb{P}^5,$$

e do Teorema 1.30 obtemos o grau topológico do mapa gradiente de X:

$$\deg \operatorname{grad} X = (3-1)^5 - 21 - 10 = 1.$$

Logo, X é uma hipersuperfície homaloidal. □

Capítulo 2

Secantes de curvas racionais normais

2.1 Secantes em geral e resultados básicos

Iniciamos o capítulo expondo definições, observações e resultados conhecidos sobre variedade secantes, dos quais faremos uso posteriormente. Como referências básicas, consulte [Harr92], [Rus03] e [EH16].

Definição 2.1. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade irredutível não-degenerada, e seja

$$S_X^0 = \{((x_1, x_2), z);\ z \in \langle x_1, x_2 \rangle\} \subset (X \times X \setminus \Delta_X) \times \mathbb{P}^n.$$

Denotemos por S_X o fecho de S_X^0 em $X \times X \times \mathbb{P}^n$. Esta é uma variedade projetiva irredutível de dimensão $2 \dim X + 1$, chamada **variedade secante abstrata para** X.

Temos os seguintes mapas de projeção de S_X para $X \times X$ e para $\mathbb{P}^n$:

$$\begin{tikzcd} & S_X \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ X \times X & & \mathbb{P}^n \end{tikzcd}$$

A **variedade secante de** X, denotada $\operatorname{Sec}_2 X$, é a imagem de S_X pela projeção p_2:

$$\operatorname{Sec}_2 X = p_2(S_X) = \overline{\bigcup_{x_1 \neq x_2, x_i \in X} \langle x_1, x_2 \rangle}.$$

Por vezes denotamos $\operatorname{Sec}_2 X$ simplesmente por $\operatorname{Sec} X$. Esta é uma variedade irredutível de dimensão $\leq 2 \dim X + 1$.

Agora, para $k \geq 2$ número inteiro, generalizando a construção acima, definimos a **variedade k-secante de** X como sendo $\operatorname{Sec}_k X = p_2(S_X^k)$, onde S_X^k é o fecho em $\underbrace{X \times \cdots \times X}_{k} \times \mathbb{P}^n$ de

$$\{((x_0, \ldots, x_{k-1}), u);\ \dim\langle x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle = k - 1 \text{ e } u \in \langle x_0, \ldots, x_{k-1} \rangle\}.$$

Em outras palavras, $\operatorname{Sec}_k X$ é o fecho do conjunto dos pontos que vivem em subespaços lineares de dimensão $(k-1)$ gerados por coleções de k pontos gerais em X.

Tome $k_0 = \min\{k \in \mathbb{N};\ \operatorname{Sec}_k X = \mathbb{P}^n\}$. Então, para cada $0 \leq k \leq k_0$, tem-se que $\operatorname{Sec}_k X$ é uma variedade projetiva irredutível e

$$X \subsetneq \operatorname{Sec}_2 X \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Sec}_k X \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Sec}_{k_0} X = \mathbb{P}^n.$$

Nosso interesse reside nas variedades secantes de curvas racionais normais, em especial as de grau par.

Uma *curva racional normal* $C \subset \mathbb{P}^d$ (de grau d) é uma curva projetivamente equivalente à imagem do mergulho de Veronese $\nu_d\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^d$. Por simplicidade, assumiremos que $C = \nu_d(\mathbb{P}^1)$ sem maiores comentários. Recordamos que esta curva é de fato uma variedade determinantal, realizada como o lugar dos pontos $(p_0 : \cdots : p_d) \in \mathbb{P}^d$ tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{d-2} & p_{d-1} \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_{d-1} & p_d \end{pmatrix}$$

tem posto 1.

É curioso que podemos descrever a curva racional normal também utilizando outras matrizes. Uma matriz (x_{ij}) de dimensões $m \times n$ é chamada uma *matriz de Hankel* (genérica) se $x_{ij} = x_{i+j}$ e a denotamos

$$\mathcal{H}_{m,n}(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-2} & x_{n-1} \\ x_1 & x_2 & \cdots & & x_{n-1} & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & x_{m+n-3} \\ x_{m-1} & \cdots & \cdots & & x_{m-n-3} & x_{m+n-2} \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Então, para qualquer que seja $1 < k < d-1$, a curva $C \subset \mathbb{P}^d$ é dada pelo lugar dos pontos $p \in \mathbb{P}^d$ tais que os 2-menores de $\mathcal{H}_{k,d+2-k}(p)$ sejam nulos.

Isso se generaliza: a k-secante de C é dada pelos zeros de $(k+1)$-menores de *qualquer* matriz de Hankel nas variáveis $x_0, \ldots, x_d$ desde que as dimensões da matriz sejam adequadas. Mais ainda, tais igualdades valem para os ideais gerados pelos menores, fato conhecido como o *truque de Gruson-Peskine*. Para enunciá-lo, precisamos de alguma notação: dada uma matriz A com entradas em $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_d]$, seja $I_k(A)$ o ideal gerado pelos k-menores de A.

Proposição 2.2. *Tome inteiros m, n, m', n' tais que $m + n = m' + n'$. Então, para todo $k \geq 1$ satisfazendo $k \leq \min\{m, n\}$ e $k \leq \min\{m', n'\}$, tem-se $I_k(\mathcal{H}_{m,n}) = I_k(\mathcal{H}_{m',n'})$.*

Geometricamente: seja $C \subset \mathbb{P}^d$ a curva racional normal. Tome $1 \leq a \leq d-1$. Então, para $1 \leq k \leq \min\{a, d-a\}$, o ideal da secante $\operatorname{Sec}_k C \subset \mathbb{P}^d$ é dado pelos $(k+1)$-menores da matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_{a+1,d-a+1} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \cdots & x_{d-a} \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{d-a+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_a & x_{a+1} & \cdots & x_d \end{pmatrix}.$$

Demonstração. Para a versão original, veja [GP82, Lemma 2.3]. Uma prova independente foi dada por Watanabe em 1985, em um manuscrito que precede a publicação [Wat97, Theorem 1], em uma versão um pouco mais geral. Consulte também o livro-texto de J. Harris [Harr92, Proposition 9.7, p. 103]. □

Em particular, cada secante pode ser obtida como o lugar dos zeros dos *menores maximais* de uma matriz de Hankel conveniente. Por exemplo, o ideal da secante $\operatorname{Sec}_3 C \subset \mathbb{P}^{2r}$ é gerado pelos 4-menores da matriz

$$\mathcal{H}_{4,2r-2} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \dots & x_{2r-3} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{2r-2} \\ x_2 & x_3 & \dots & x_{2r-1} \\ x_3 & x_4 & \dots & x_{2r} \end{pmatrix}.$$

Como pode-se esperar, secantes de curvas racionais normais foram muito estudadas, tanto do ponto de vista algébrico como geométrico. Abaixo listamos algumas de suas propriedades importantes. Recorde que uma variedade projetiva $X \subset \mathbb{P}^n$ é *aritmeticamente Cohen-Macaulay* se seu anel de coordenadas homogêneas é Cohen-Macaulay.

Proposição 2.3. *Seja $C \subset \mathbb{P}^n$ uma curva racional normal. Para $1 \leq k \leq [n/2]$, a secante $\operatorname{Sec}_k C$ é uma variedade irredutível, reduzida, projetivamente normal e aritmeticamente Cohen-Macaulay. Seu ideal é dado na Proposição 2.2. Mais ainda:*

(a) *As secantes tem as dimensões esperadas: $\dim \operatorname{Sec}_k C = 2k-1$. Em particular temos uma cadeia de inclusões estritas*

$$C \subsetneq \operatorname{Sec}_2 C \subsetneq \operatorname{Sec}_3 C \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Sec}_{[n/2]} C \subsetneq \mathbb{P}^n.$$

(b) *Quanto aos graus: $\deg(\operatorname{Sec}_k C) = \binom{n-k+1}{k}$.*

(c) *Em geral, o lugar singular de $\operatorname{Sec}_k C$ não é um esquema reduzido. Entretanto temos $(\operatorname{Sing} \operatorname{Sec}_k C)_{red} = \operatorname{Sec}_{k-1} C$ sempre que $2 \leq k \leq [n/2]$.*

(d) *Suponha $n = 2r$. Sejam J_r o ideal jacobiano do determinante da matriz $\mathcal{H}_{r+1,r+1}$ e I_r o ideal gerado pelos menores maximais de $\mathcal{H}_{r,r+2}$. Então $\sqrt{J_r} = I_r$.*

Demonstração. As demonstrações podem ser encontradas em diversas referências, por vezes realizadas com métodos diferentes. Para (a)-(c) indicamos [IK99, Theorem 1.56], [Wat97, Proposition 6], também [EH16, Chapter 10] e [Eis88, Proposition 4.3]. Especificamente para (d), consulte [Mo14, Proposition 3.3.7] ou [MS16, Proposition 3.12]. Finalmente, para um exemplo onde J_r não é radical, consulte B.1.3 no Apêndice. □

Destacamos os casos que necessitaremos adiante.

Corolário 2.4. *Tome $n = 2r$. Então:*

(a) *$\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ é uma hipersuperfície, de grau $r+1$.*

(b) *$\operatorname{Sec}_{r-1} C$ tem codimensão 3 em $\mathbb{P}^{2r}$ e seu grau é $\binom{r+2}{3}$.*

(c) *$(\operatorname{Sing} \operatorname{Sec}_r C)_{red} = \operatorname{Sec}_{r-1} C$.*

2.2 Séries de Hilbert

Seja $M_k(m,n) \subset \mathbb{P}^{mn-1}$ a *variedade determinantal* (genérica), dada pelo lugar dos zeros do ideal dos k-menores de uma matriz $m \times n$ geral. Geometricamente, $M_2(m,n)$ é a imagem do mergulho de Segre $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{P}^{mn-1}$. Aos menores de ordem superior correspondem as secantes da variedade de Segre, isto é, $M_k(m,n) = \operatorname{Sec}_{k-1}(M_2(m,n))$ ([Harr92, Example 9.2, p. 99]). Por fim, $M_n(n,n) \subset \mathbb{P}^{n^2-1}$ é uma hipersuperfície, dada pelo zeros do determinante.

Dado um subesquema $X \subset \mathbb{P}^n$ denotamos por $h_X(t)$ e $P_X(t)$ a sua série e polinômio de Hilbert, respectivamente. Tome ainda $P_i(t) := \binom{t+i}{i} \in \mathbb{Q}[t]$ para $i \geq 0$. Observe que $P_0(t), \dots, P_n(t)$ formam uma base para o espaço dos polinômios de grau $\leq n$.

Existe uma expressão determinantal maravilhosa, devida a Abhyankar ([Abh88]), para a série de Hilbert das variedades $M_k(m,n)$, para quaisquer m, n, k. Nossas referências são [BC03, Theorem 6.9] ou [CH94, Corollary 1] (neste último há um pequeno erro de tipografia, falta o termo t^ℓ na expressão do determinante):

$$h_{M_{k+1}(m,n)}(t) = \frac{\det\left(\sum_\ell \binom{m-i}{\ell}\binom{n-j}{\ell} t^\ell\right)_{i,j=1,\dots,k}}{t^{\binom{k}{2}}(1-t)^{k(m+n-k)}}. \tag{2.2}$$

De fato, utilizaremos uma versão levemente diferente desta fórmula, provada no lema logo após o Corolário 1 em [CH94]:

$$h_{M_{k+1}(m,n)}(t) = \frac{\det\left(\sum_\ell \binom{m-i}{\ell}\binom{n-j}{\ell+i-j} t^\ell\right)_{i,j=1,\dots,k}}{(1-t)^{k(m+n-k)}}. \tag{2.3}$$

Embora não sejam amistosas à primeira vista, estas expressões se tornam extremamente simples no caso de *menores maximais*, caso que nos será útil em aplicações às secantes de curvas racionais normais.

A ideia é que, afortunadamente, as expressões do numerador da série de Hilbert são, por assim dizer, "aditivas para menores maximais" quando a diferença entre o número de linhas e colunas é constante. Tudo não passa de um cálculo elementar com determinantes, algo trabalhoso de encontrar porém simples de descrever.

Proposição 2.5. *Sejam c, k inteiros com $c \geq 0$ e $k \geq 1$. Então a série de Hilbert da variedade determinantal geral $M_{k+1}(k+1+c, k+1)$ é da forma $q_{k,c}(t)/(1-t)^{k(k+2+c)}$, onde*

$$q_{k,c}(t) = \sum_{j=0}^{k} \binom{c+j}{j} t^j = 1 + \binom{c+1}{1} t + \binom{c+2}{2} t^2 + \cdots + \binom{c+k}{k} t^k. \tag{2.4}$$

Demonstração. É muito curiosa. Aplicaremos a fórmula em (2.3) para $m = k+1+c$ e $n = k+1$. Quando $k = 1$, é imediato verificar que (2.4) vale para qualquer valor de c.

Fixamos $c \geq 0$ e fazemos indução em k. Aplicando (2.3), desejamos então calcular o determinante da matriz

$$A_k := \left(\sum_{\ell \geq 0} \binom{k+1+c-i}{\ell}\binom{k+1-j}{\ell+i-j} t^\ell\right)_{i,j=1,\dots,k}$$

A observação fundamental é que a submatriz $(k-1)\times(k-1)$ inferior à direita, obtida omitindo-se a primeira linha e a primeira coluna, é exatamente a matriz A_{k-1}. Tendo isto em mente, mostramos que tomando uma redução conveniente das colunas o determinante $|A_k|$ se reduz a $|A_{k-1}| + \binom{c+k}{c}t^k$ e indutivamente obtemos a fórmula desejada.

Indicamos como proceder no caso em que $c=2$ e $k=3$. Nosso objetivo é mostrar que

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 10t^3+30t^2+15t+1 & 10t^3+20t^2+5t & 10t^3+10t^2 \\ 6t^2+12t+3 & 6t^2+8t+1 & 6t^2+4t \\ 3t+3 & 3t+2 & 3t+1 \end{vmatrix}$$

vale $1+3t+6t^2+10t^3$.

Focando na primeira linha, utilizamos a segunda coluna para anular o termo linear da primeira coluna; em seguida, a terceira coluna para anular o termo quadrático da primeira coluna; e assim por diante. Obtemos

$$|A_3| = \begin{vmatrix} 10t^3+1 & 10t^3+20t^2+5t & 10t^3+10t^2 \\ 6t^2 & 6t^2+8t+1 & 6t^2+4t \\ 3t & 3t+2 & 3t+1 \end{vmatrix}$$

que separamos como:

$$\begin{vmatrix} 1 & 10t^3+20t^2+5t & 10t^3+10t^2 \\ 0 & 6t^2+8t+1 & 6t^2+4t \\ 0 & 3t+2 & 3t+1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 10t^3 & 10t^3+20t^2+5t & 10t^3+10t^2 \\ 6t^2 & 6t^2+8t+1 & 6t^2+4t \\ 3t & 3t+2 & 3t+1 \end{vmatrix}.$$

Observe que o primeiro determinante é exatamente $|A_2|$, que por indução vale $1+3t+6t^2$. Uma situação similar ocorre no caso geral.

Para calcular o segundo determinante, subtraímos a primeira coluna nas restantes, eliminando os termos líderes. Note que a última coluna fica com "1" na diagonal:

$$\begin{vmatrix} 10t^3 & 20t^2+5t & 10t^2 \\ 6t^2 & 8t+1 & 4t \\ 3t & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Agora, utilizando a última coluna, anulamos todas as entradas da última linha abaixo da diagonal. A penúltima coluna fica com um "1" na diagonal. Utilizamos a penúltima coluna para anular todas as entradas da penúltima linha abaixo da diagonal, e assim por diante. No final obtemos uma matriz triangular superior da forma

$$\begin{vmatrix} 10t^3 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

e portanto $|A_3| = |A_2| + 10t^3$, como queríamos.

O caso geral é feito do mesmo modo. □

Durante a revisão final deste trabalho, nos foi indicado que o resultado da Proposição 2.5 pode ser obtido a partir do trabalho seminal de Eagon e Northcott [EN62a] sobre resoluções de ideais de matrizes e que de fato a fórmula (2.4) já se encontra, (em um escopo bem mais geral) em [EN62b], muito embora em um formato diferente. Nossa fórmula é portanto apenas uma simplificação daquela obtida por Eagon e Northcott. Chegamos a estas referências graças a M. Mostafazadehfard, a quem agradecemos.

Outra demonstração da Proposição 2.5. Denote $s = k+1$ e seja $c \geq 0$. Então a série de Hilbert de $M_s(s, s+c)$ encontra-se calculada na última fórmula da seção 3 de [EN62b] (tomando-se $p = 1$ e $r = s+c$):

$$h_{M_s(s,s+c)}(t) = \frac{F_{s,c}(t)}{(1-t)^{s(s+c)}} \tag{2.5}$$

onde

$$F_{s,c}(t) = 1 - s\binom{s+c}{c}\sum_{q=0}^{c}(-1)^q\binom{c}{q}\frac{t^{q+s}}{q+s}. \tag{2.6}$$

Comparando os expoentes dos denominadores de (2.5) e do enunciado da Proposição 2.5, vem que devemos provar:

$$(1-t)^{c+1}q_{s,c}(t) = F_{s,c}(t) \tag{2.7}$$

onde $q_{s,c}(t) = 1 + \binom{c+1}{1}t + \cdots + \binom{c+s-1}{s-1}t^{s-1}$ é a expressão que aparece em (2.4).

Faremos indução em s. Para $s = 1$, devemos mostrar

$$(1-t)^{c+1} = 1 - (c+1)\sum_{q=0}^{c}(-1)^q\binom{c}{q}\frac{t^{q+1}}{q+1}$$

que segue diretamente do fato de que $(c+1)\binom{c}{q} = (q+1)\binom{c+1}{q+1}$. Agora, supondo que (2.7) vale para $s \geq 1$ dado, devemos então mostrar que

$$(1-t)^{c+1}q_{s+1,c}(t) = F_{s+1,c}(t).$$

Da expressão de $q_{s,c}(t)$ e da hipótese de indução vem que o que desejamos provar é

$$F_{s+1,c}(t) - F_{s,c}(t) = \binom{c+s}{s}t^s(1-t)^{c+1}$$

que por sua vez se segue do fato de que

$$(s+1)\binom{s+1+c}{c}\binom{c}{q} + s\binom{s+c}{c}\binom{c}{q+1} = \binom{s+c}{c}(q+s+1) \qquad \text{para } q = 0, 1, \ldots, c.$$

□

Observação 2.6. O vetor formado pelos coeficientes do polinômio $q_{k,c}(t)$ em (2.4) é por vezes chamado de h-**vetor** (de $M_{k+1}(k+1+c, k+1)$) que é portanto

$$\left(1, \binom{c+1}{1}, \binom{c+2}{2}, \ldots, \binom{c+k}{k}\right).$$

Este é um importante invariante em Álgebra Comutativa; por exemplo, dele se obtém exatamente a partir de qual índice a função e o polinômio de Hilbert passam a coincidir ([BH93, Proposition 4.1.12, p. 152]). □

Passamos agora a calcular a série de Hilbert das secantes das curvas racionais normais. A ideia é simples: geometricamente, as secantes de curvas racionais normais são obtidas a partir de variedades determinantais gerais via certas seções hiperplanas.

Necessitamos de um resultado auxiliar.

Lema 2.7. *Sejam $X, H \subset \mathbb{P}^n$, com $H = V(\ell)$ um hiperplano tal que ℓ não é um divisor de zero em $\mathcal{O}_X$. Então*

$$h_{X\cap H}(t) = h_X(t)(1-t). \tag{2.8}$$

Em particular, se $P_X(t) = a_0P_0(t) + \cdots + a_dP_d(t)$, então $P_{X\cap H}(t) = a_1P_0(t) + \cdots + a_dP_{d-1}(t)$.

Demonstração. Como ℓ não é um divisor de zero, a multiplicação por ℓ nos dá um mapa injetivo $\mathcal{O}_X(-1) \to \mathcal{O}_X$, donde obtemos uma sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_X(t-1) \to \mathcal{O}_X(t) \to \mathcal{O}_{X\cap H}(t) \to 0$$

para todo t, obtendo (2.8). Além disso, $P_{X\cap H}(t) = P_X(t) - P_X(t-1)$. Para a última afirmação do enunciado, basta observar que $P_i(t) - P_i(t-1) = P_{i-1}(t)$. $\square$

Finalmente obtemos a fórmula desejada.

Corolário 2.8. *Seja $C \subset \mathbb{P}^n$ uma curva racional normal. Então, para cada $k = 1, \ldots, [n/2]$:*

$$h_{\mathrm{Sec}_k C}(t) = \frac{\sum_{j=0}^{k} \binom{n-2k+j}{j} t^j}{(1-t)^{2k}} = \frac{1 + \binom{n-2k+1}{1}t + \binom{n-2k+2}{2}t^2 + \cdots + \binom{n-k}{k}t^k}{(1-t)^{2k}} \quad .$$

Demonstração. A secante $\mathrm{Sec}_k C \subset \mathbb{P}^n$ é dada pelos menores maximais de uma matriz de Hankel $\mathcal{H}_{k+1,n-k+1}$, que por sua vez é obtida a partir de uma matriz genérica $(x_{i,j})$ identificando-se as entradas das *anti-diagonais* (aquelas cuja soma dos índices da linha e coluna são iguais), ou seja, impondo-se $x_{i,j} - x_{u,v} = 0$ sempre que $i + j = u + v$. Ocorre que estas equações formam uma sequência regular no anel de $M_{k+1}(k+1, n-k+1)$ (veja por exemplo [Wat97, Proposition 2]) e portanto podemos deduzir a série de Hilbert de $\mathrm{Sec}_k C$ a partir da série de Hilbert de $M_{k+1}(k+1, n-k+1)$ via o Lema 2.7. O resultado agora é uma consequência direta da Proposição 2.5. $\square$

Faremos agora uma aplicação do Corolário 2.8 em uma situação específica, que nos será útil na demonstração da Proposição 3.12.

Exemplo 2.9. Seja $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ uma curva racional normal e tome um $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^{2r}$ geral. Vem da Proposição 2.3 que $\mathrm{Sec}_{r-1} C \subset \mathbb{P}^{2r}$ tem codimensão 3 e seu lugar singular tem codimensão 5 em $\mathbb{P}^{2r}$. Segue daí pelo Teorema de Bertini que $Y_r := (\mathrm{Sec}_{r-1} C) \cap \mathbb{P}^4$ é uma curva não-singular. Desejamos calcular o gênero desta curva.

Dada uma variedade projetiva X de dimensão d, escreva sua série de Hilbert na forma $q(t)/(1-t)^{d+1}$, onde $q(t) \in \mathbb{Z}[t]$ satisfaz $q(1) \neq 0$. Se $P_X(t) = \sum_{i=0}^{d} a_{d-i}P_i(t)$ é o polinômio de Hilbert de X, então seus os coeficientes são dados por

$$a_{d-i} = \frac{(-1)^{d-i} q^{(i)}(1)}{i!} \tag{2.9}$$

para $i = 0, 1, \ldots, d$ ([BH93, Proposition 4.1.9, p. 151]). Por outro lado, se $Y \subset X$ é uma curva obtida por seções hiperplanas genéricas de X, vem então do Lema 2.7 e das identidades em (2.9) que o polinômio de Hilbert de Y é

$$P_Y(t) = a_d P_0(t) + a_{d-1} P_1(t) = a_d + a_{d-1}(t+1) = q(1) - q'(1)(t+1).$$

Recorde que o gênero aritmético da curva Y é dado por $p_a(Y) = -(p_Y(0) - 1)$ (veja por exemplo [Hart77, Ex. 7.2, p. 54]) e logo $p_a(Y) = q'(1) - q(1) + 1$.

Especializamos para o caso em que $X = \operatorname{Sec}_{r-1} C$. Como Y_r é não-singular, seu gênero aritmético coincide com o seu gênero geométrico $g(Y_r)$. Do Corolário 2.8:

$$h_{\operatorname{Sec}_{r-1} C}(t) = \frac{1 + \binom{3}{2}t + \binom{4}{2}t^2 + \cdots + \binom{r+1}{2}t^{r-1}}{(1-t)^{2(r-1)}}$$

e denotando o numerador por $q_r(t)$, temos:

$$\begin{aligned} g(Y_r) &= q_r'(1) - q_r(1) + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{r+1} (j-2)\binom{j}{2} - \sum_{j=0}^{r+1}\binom{j}{2} + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{r+1} (j+1)\binom{j}{2} - 4\sum_{j=0}^{r+1}\binom{j}{2} + 1 \\ &= 3\binom{r+3}{4} - 4\binom{r+2}{3} + 1 \\ &= \frac{1}{24}(r-1)(r-2)(3r^2 + 11r + 12), \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre das identidades

$$\sum_{j=0}^{n} (j+1)\binom{j}{2} = 3\binom{n+2}{4} \qquad \text{e} \qquad \sum_{j=0}^{n} \binom{j}{2} = \binom{n+1}{3}$$

(compare coeficientes em $\frac{(1+x)^{n+1}-1}{(1+x)-1}$ e $(1+x)^n + (1+x)^{n-1} + \cdots + 1$, derive, etc). $\square$

2.3 Característica de Euler

Nesta seção faremos o cálculo da característica de Euler topológica de secantes quaisquer de curvas racionais normais via pontos fixos de uma ação conveniente. O ponto de partida é:

Proposição 2.10. ([Bir73, Corollary 2]) *Se o grupo multiplicativo $G := \mathbb{C}^*$ age em uma variedade algébrica X, e X^G denota o lugar dos pontos fixos de X pela ação, então $\chi_{\text{top}}(X) = \chi_{\text{top}}(X^G)$.*

Exemplo 2.11. Como aplicação, calculemos a característica de Euler de $\mathbb{P}^n$. Considere a ação:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}^* \times \mathbb{P}^n & \longrightarrow & \mathbb{P}^n \\ (t, x) & \longmapsto & t \cdot x = (x_0 : t x_1 : \cdots : t^n x_n). \end{array} \tag{2.10}$$

Esta ação tem $n+1$ pontos fixos, os pontos coordenados $e_0, e_1, \ldots, e_n$. De fato, estes são os únicos: nenhum ponto em $\mathbb{P}^n$ com pelo menos duas coordenadas não-nulas fica fixado. Portanto, pela Proposição 2.10, obtemos $\chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^n) = \chi_{\text{top}}((\mathbb{P}^n)^{\mathbb{C}^*}) = n+1$. □

Exemplo 2.12. Calculamos agora a característica de Euler da secante da quártica racional normal $C \subset \mathbb{P}^4$. Afirmamos que, sob a mesma ação do exemplo anterior em $\mathbb{P}^4$, a secante $\operatorname{Sec}_2 C$ fica invariante. De fato, observe que $\operatorname{Sec}_2 C$ é dada pelo lugar dos zeros do determinante da matriz 3×3 de Hankel

$$\mathcal{H}(x) = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix},$$

e que, por sua vez,

$$\det \mathcal{H}(t \cdot x) = t^6 \det \mathcal{H}(x).$$

Podemos assim aplicar a Proposição 2.10 à nossa variedade $\operatorname{Sec}_2 C$. Dos 5 pontos coordenados, apenas e_2 não pertence a secante, uma vez que

$$\det \mathcal{H}(e_2) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Logo, $\chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_2 C) = \chi_{\text{top}}((\operatorname{Sec}_2 C)^{\mathbb{C}^*}) = 5 - 1 = 4$. □

O cálculo deste exemplo é um caso particular do seguinte resultado:

Teorema 2.13. *Seja $C \subset \mathbb{P}^n$ uma curva racional normal. Então a secante $\operatorname{Sec}_k C \subset \mathbb{P}^n$ fica invariante pela ação $x \mapsto t \cdot x$ dada em (2.10). Mais ainda, vale que $\chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_k C) = 2k$ sempre que $2k - 1 < n$.*

Demonstração. Vejamos a primeira parte. Suponha que $2k - 1 < n$. Da Proposição 2.2 temos que que $\operatorname{Sec}_k C$ é o lugar dos zeros dos $k+1$-menores da matriz de Hankel $\mathcal{H}_{k+1,n-k+1}(x) = (x_{i+j})$.

Dado um subconjunto $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ com $k+1$ elementos, denote por p_I o menor correspondente da matriz de Hankel acima. Então, via a ação de (2.10),

$$p_I(t \cdot x) = t^{|I|} \cdot p_I(x)$$

onde $|I|$ é a soma dos elementos de I. Portanto, se $x \in \operatorname{Sec}_k C$ tem-se $t \cdot x \in \operatorname{Sec}_k C$ para todo $t \in \mathbb{C}^*$.

Agora a segunda parte do enunciado. Aplicando a Proposição 2.10 obtemos

$$\chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_k C) = \chi_{\text{top}}((\operatorname{Sec}_k C)^{\mathbb{C}^*}) = \#\mathcal{F}$$

onde $\mathcal{F}$ é o conjunto dos pontos de $\operatorname{Sec}_k C$ fixos pela ação.

Vimos que o conjunto dos pontos de $\mathbb{P}^n$ fixos pela ação é $\{e_0, e_1, \ldots, e_n\}$.

Vamos mostrar que $\mathcal{F} = \{e_0, \ldots, e_{k-1}, e_{n-k+1}, \ldots, e_n\}$.

De fato, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1, n-k+1, \ldots, n\}$, ao avaliar a matriz $\mathcal{H}_{k+1,n-k+1}$ em e_i, esta possuirá ao menos $n - 2k + 1$ colunas nulas, portanto cada menor maximal de $\mathcal{H}_{k+1,n-k+1}$ se anula nesses vetores.

Por outro lado, $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{n-k}$ não anulam, respectivamente, os menores maximais $p_{12\ldots(k+1)}, p_{23\ldots(k+2)}, \ldots, p_{(n-2k+1)\ldots(n-k+1)}$.

Logo, $\chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_k C) = \#\mathcal{F} = (n+1) - (n - 2k + 1) = 2k$. □

2.4 Dualidade

Estabelecemos agora a notação que utilizaremos no restante desta seção.

Fixamos $r \geq 1$. Seja $C = \nu_{2r}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^{2r}$ a curva racional normal. Denotamos por V a imagem de $\mathbb{P}^r$ pelo mergulho de Veronese $\nu_2 \colon \mathbb{P}^r \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ onde $N = \binom{r+2}{2} - 1$. Vemos $\mathbb{P}^N$ como a projetivização do espaço das matrizes simétricas de tamanho $r+1$.

É fato conhecido que o ideal de V é dado pelos 2-menores de uma matriz simétrica, digamos (y_{ij}) com $i,j = 0,\ldots,r$. Mais ainda [FOV99, Examples 1.3.6 (5), p. 26], o ideal de cada secante $\operatorname{Sec}_k V$ é dada pelos $k+1$-menores de uma tal matriz. Em particular $\operatorname{Sec}_r V$ é uma hipersuperfície, dada pelos zeros do determinante.

Por outro lado, do truque de Gruson-Peskine também obtemos os ideais das secantes de C como menores de uma matriz quadrada, agora de Hankel (Proposição 2.2), de mesmas dimensões. Como consequência, cada k-secante de C é obtida da k-secante de V por uma *mesma* seção linear $L \cong \mathbb{P}^{2r}$, isto é, $\operatorname{Sec}_k C = L \cap \operatorname{Sec}_k V$ para todo k. O subespaço linear L é obtido identificando-se as *anti-diagonais* (entradas cuja soma dos índices da linha e coluna são iguais) da matriz simétrica; precisamente, L é dado pela interseção dos hiperplanos

$$y_{ij} - y_{uv} = 0, \qquad \text{com} \quad \begin{cases} i \leq j, \quad (i,j) \neq (u,v) \\ i+j = u+v \\ v = u \text{ ou } v = u+1 \end{cases} . \tag{2.11}$$

Observe que há exatamente $\binom{r}{2}$ tais hiperplanos e eles são independentes.

Outro resultado conhecido (veja por exemplo [DH+16, Example 5.6]) é que tomando duais na cadeia

$$V \subsetneq \operatorname{Sec}_2 V \subsetneq \cdots \subsetneq \operatorname{Sec}_{r-1} V \subsetneq \operatorname{Sec}_r V \subsetneq \mathbb{P}^N$$

e identificando $\mathbb{P}^N$ com $(\mathbb{P}^N)^*$, obtemos a exatamente mesma cadeia, porém com índices revertidos

$$(\operatorname{Sec}_r V)^* \subsetneq (\operatorname{Sec}_{r-1} V)^* \subsetneq \cdots \subsetneq (\operatorname{Sec}_2 V)^* \subsetneq (V)^* \subsetneq (\mathbb{P}^N)^*$$

isto é, temos que para $k = 1,\ldots,r$ vale

$$(\operatorname{Sec}_k V)^* \cong \operatorname{Sec}_{r-k+1} V. \tag{2.12}$$

Em particular, a dual da hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r V$ é isomorfa à variedade de Veronese V.

Por fim, denotaremos por $\pi_{L^*} \colon (\mathbb{P}^N)^* \dashrightarrow (\mathbb{P}^{2r})^*$ a projeção centrada *no dual* L^* de L.

Começamos com um belo resultado, que relaciona dualidade, projeções e seções lineares. O enunciado abaixo, que faz uso implícito da bidualidade ([Kle86], característica zero), está em um formato não muito usual, porém mais adequado aos nossos propósitos.

Teorema 2.14 ([GKZ94, Proposition 4.1, p. 31])**.** *Sejam $X, L \subset \mathbb{P}^n$ uma subvariedade projetiva e um subespaço linear tais que $X^* \cap L^* = \emptyset$ e $\dim X^* < n - \dim L^*$. Seja $\pi_{L^*} \colon (\mathbb{P}^n)^* \dashrightarrow (\mathbb{P}^n)^*$ a projeção centrada no dual de L. Então vale a inclusão*

$$(X \cap L)^* \subseteq \pi_{L^*}(X^*).$$

Mais ainda, se $\pi_{L^*}(X^*) \cong X^*$, então $(X \cap L)^* = \pi_{L^*}(X^*)$.

Proposição 2.15. *A dual da hipersuperfície* $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ *é uma projeção isomorfa da variedade de Veronese* $V = \nu_2(\mathbb{P}^r)$.

Demonstração. A ideia é aplicar o Teorema 2.14 para $X = \operatorname{Sec}_r V$ e para L descrito por (2.11), uma vez que daí $X^* = (\operatorname{Sec}_r V)^* = V$ por (2.12) e que $X \cap L = (\operatorname{Sec}_r V) \cap L = \operatorname{Sec}_r C$. Para tanto, mostraremos $\pi_{L^*}|_V$ define uma imersão fechada de $V \hookrightarrow (\mathbb{P}^{2r})^*$. Segue daí que $(\operatorname{Sec}_r C)^* = \pi_{L^*}(V)$.

Com esse intuito, basta mostrar que o sistema linear que define $\pi_{L^*}|_V$ separa pontos e separa tangentes. Isso ocorre se, e somente se, o centro de projeção L^* não intersecta a variedade das secantes $\operatorname{Sec} V$ e tampouco intersecta a variedade das tangentes $\operatorname{Tan} V$: veja [Hart77, Proposition 3.4, p. 309] ou [Rus03, Proposition 1.2.8, p. 12]. Por outro lado, como V é suave, vale que $\operatorname{Tan} V \subseteq \operatorname{Sec} V$ (e.g. [Rus03, p. 12]) e portanto é suficiente mostrar que L^* não intersecta $\operatorname{Sec} V$, o que faremos no lema a seguir. □

Lema 2.16. *Com a notação acima,* $L^* \cap \operatorname{Sec} V = \emptyset$.

Demonstração. Denote por $e_{ij} \in \mathbb{P}^N$ a matriz cujas entradas (i, j) e (j, i) valem 1 e todas as outras entradas são nulas. Então L^* é gerado pelos pontos da forma $e_{ij} - e_{uv}$, de forma que os índices i, j, u, v satisfazem as condições descritas em (2.11).

Suponhamos que $(q_{ij}) \in \mathbb{P}^N$ seja um ponto de $L^* \cap \operatorname{Sec} V$. Recorde que estamos identificando $q_{ij} = q_{ji}$. É instrutivo acompanhar o argumento em um caso concreto, o que faremos no Exemplo 2.17.

Provaremos que $q_{ij} = 0$ para todo i, j e portanto tal ponto não existe. Procedemos por indução sobre a soma $s = i + j$ dos índices, onde s indexa as anti-diagonais. Para $s = 0, 1$, note que $y_{0,0}$ e $y_{0,1}$ não aparecem em nenhuma das equações (2.11) e logo $q_{0,0} = q_{0,1} = 0$; suponhamos $s \geq 2$ e que todas as entradas das anti-diagonais $\leq s - 1$ são nulas.

Quando s é par, a anti-diagonal s da matriz (q_{ij}) tem a forma

$$(c_1, c_2, \ldots, c_m, -\sum_{i=1}^{m} c_i, c_m, \ldots, c_2, c_1)$$

e para s ímpar

$$(c_1, c_2, \ldots, c_m, -\sum_{i=1}^{m} c_i, -\sum_{i=1}^{m} c_i, c_m, \ldots, c_2, c_1)$$

onde $m = [(s + 1)/2]$. Por indução, todas as entradas superiores à esquerda da anti-diagonal s são nulas.

Por outro lado, como $\operatorname{Sec} V$ é dada pelo anulamento dos 3-menores, escolhendo adequadamente submatrizes 3×3, obtemos relações

$$c_j^2 \textstyle\sum_k c_k = 0, \quad \forall j \qquad \text{e} \qquad c_i^2 c_j = 0, \quad \forall i \neq j$$

das quais se segue que os coeficientes c_i devem satisfazer

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{m} c_k = 0, & \\ c_i c_j = 0, & \forall i \neq j \end{cases}$$

e a única solução possível é $c_1 = \cdots = c_m = 0$.

□

Exemplo 2.17. Ilustremos a situação com detalhes em um caso significativo, digamos $r = 4$. Aqui, $C \subset \operatorname{Sec}_4 C \subset \mathbb{P}^8$ e $V = \nu_2(\mathbb{P}^4) \subset \mathbb{P}^{14}$. A secante $\operatorname{Sec} V$ é dada pelos zeros dos menores de ordem 3 da matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} y_{0,0} & y_{0,1} & y_{0,2} & y_{0,3} & y_{0,4} \\ y_{0,1} & y_{1,1} & y_{1,2} & y_{1,3} & y_{1,4} \\ y_{0,2} & y_{1,2} & y_{2,2} & y_{2,3} & y_{2,4} \\ y_{0,3} & y_{1,3} & y_{2,3} & y_{3,3} & y_{3,4} \\ y_{0,4} & y_{1,4} & y_{2,4} & y_{3,4} & y_{4,4} \end{pmatrix}.$$

A seção linear L é obtida impondo-se que todas as entradas nas anti-diagonais sejam iguais, o que nos fornece seis equações, descritas em (2.11):

$$y_{0,2} - y_{1,1}, \quad y_{0,3} - y_{1,2}, \quad y_{0,4} - y_{2,2}, \; y_{1,3} - y_{2,2}, \quad y_{1,4} - y_{2,3}, \quad y_{2,4} - y_{3,3}.$$

Denote por $e_{ij} \in \mathbb{P}^{14}$ a matriz cujas entradas (i, j) e (j, i) valem 1 e todas as outras entradas são nulas. O dual L^* é gerado pelos seis pontos $p_1, \dots, p_6$:

$$e_{0,2} - e_{1,1}, \quad e_{0,3} - e_{1,2}, \quad e_{0,4} - e_{2,2}, \; e_{1,3} - e_{2,2}, \quad e_{1,4} - e_{2,3}, \quad e_{2,4} - e_{3,3}.$$

Suponha que $q = ap_1 + bp_2 + c_1p_3 + c_2p_4 + dp_5 + ep_6$ é um ponto em $L^* \cap \operatorname{Sec} V$. Então todos os menores de ordem 3 da matriz

$$q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & b & c_1 \\ 0 & -a & -b & c_2 & d \\ a & -b & -c_1 - c_2 & -d & e \\ b & c_2 & -d & -e & 0 \\ c_1 & d & e & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

se anulam. Imediatamente obtemos $a = 0$ e, a fortiori, $b = 0$. Procedemos para a próxima anti-diagonal: escolhendo menores 3×3 adequados, deduzimos $c_1c_2 = 0$ e $c_i(c_1 + c_2) = 0$ para $i = 1, 2$ e daí que $c_1c_2 = c_1 + c_2 = 0$, donde $c_1 = c_2 = 0$. Também é imediato que $d = e = 0$. Concluímos portanto que $L^* \cap \operatorname{Sec} V = \emptyset$, como previsto no Lema 2.16. □

Observação 2.18. Suponha que $C \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva racional normal em um espaço projetivo qualquer, seja n par ou não. Então as duais das variedades $\operatorname{Sec}_k C$ são conhecidas, para qualquer que seja k e são dadas pelo lugar de n pontos de $\mathbb{P}^1$ com certas multiplicidades $\Delta(1^{n-2k}, 2^k)$ ([LS16, Proposition 3.1]). □

2.5 Classe de Mather

Em [Alu18], Aluffi mostra como obter a classe de Mather de uma variedade projetiva a partir da classe de Mather da sua variedade dual. Consequentemente obtemos uma fórmula para a classe de Mather da r-secante de uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^{2r}$.

Teorema 2.19. *Dado $r \geq 1$, a classe de Mather da hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ é*

$$c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C) = (1+h)^r \sum_{j=0}^{[\frac{r}{2}]} \binom{r+1}{2j+1} h^{2j+1} \quad \in A_*\mathbb{P}^{2r}. \tag{2.13}$$

Em particular, todos os coeficientes da classe de Mather são positivos.

Demonstração. Como vimos na Proposição 2.15, a dual $(\operatorname{Sec}_r C)^*$ é isomorfa a $V := \nu_2(\mathbb{P}^r)$ via a projeção linear π_{L^*}. Em particular

$$c_{\mathrm{Ma}}((\operatorname{Sec}_r C)^*) = c_{\mathrm{Ma}}(\pi_{L^*}(V)) = c_{\mathrm{Ma}}(V) \quad \in A_*(\mathbb{P}^{2r})^*.$$

Como V é não-singular, sua classe de Mather coincide com a sua classe de Chern, cujo cálculo é simples (omitimos o pushforward por π_{L^*})

$$\begin{aligned} c(TV) \cap [V] &= \nu_{2*}(c(T\mathbb{P}^r) \cap [\mathbb{P}^r]) \\ &= \nu_{2*}((1+h)^{r+1}) \\ &= \nu_{2*}\left(\sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} [\mathbb{P}^{r-j}]\right) \\ &= \sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{j} 2^{r-j} [\mathbb{P}^{r-j}] \\ &= \sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{r-j} 2^{j} [\mathbb{P}^{j}] \qquad \in A_*(\mathbb{P}^{2r})^*. \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde na penúltima igualdade usamos $\deg \nu_2(\mathbb{P}^i) = 2^i$, o grau da imagem de $\mathbb{P}^i$ pelo mergulho de Veronese ([EH16, Proposition 2.8, p. 49]). Reescrevendo (2.14) em termos da classe hiperplana, temos portanto que

$$q(h) := \sum_{i=r}^{2r} \binom{r+1}{i-r} 2^{2r-i} h^i = 2^r h^r \left(\left(1+\frac{h}{2}\right)^{r+1} - \left(\frac{h}{2}\right)^{r+1}\right) \qquad \in A_*(\mathbb{P}^{2r})^*$$

é a classe de Mather de $(\operatorname{Sec}_r C)^*$. Aplicando a fórmula de involução de Aluffi em [Alu18, Theorem 1.3], obtemos que

$$c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C) = (-1)^{r+1}\Big(q(-1-h) - q(-1)\big((1+h)^{2r+1} - h^{2r+1}\big)\Big) \qquad \in A_*\mathbb{P}^{2r}$$

é a classe de Mather da r-secante da curva C: o ajuste do sinal vem do fato de que $\dim(\operatorname{Sec}_r C)^* = \dim \nu_2(\mathbb{P}^r) = r$.

Se r é ímpar, então $q(-1) = 0$ e $q(-1-h) = -\frac{1}{2}(1+h)^r((1-h)^{r+1} - (1+h)^{r+1})$, donde obtemos a identidade (2.13). Por outro lado, se r é par, então $q(-1) = 1$ e $q(-1-h) = \frac{1}{2}(1+h)^r((1-h)^{r+1} + (1+h)^{r+1})$ e logo

$$\begin{aligned} c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C) &= -\frac{1}{2}(1+h)^r\Big((1-h)^{r+1} + (1+h)^{r+1}\Big) + \Big((1+h)^{2r+1} - h^{2r+1}\Big) \\ &= \frac{1}{2}(1+h)^r\Big(-(1-h)^{r+1} + (1+h)^{r+1}\Big) - h^{2r+1} \end{aligned}$$

obtendo novamente (2.13). A última afirmação do enunciado agora é imediata. □

Expandindo a fórmula (2.13) obtemos explicitamente o coeficiente $c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C)_j$ da componente de dimensão j da classe $c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C) \in A_*\mathbb{P}^{2r}$:

$$c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C)_j = \sum_{i=0}^{r-\frac{j+2}{2}} \binom{r}{2i+1}\binom{r+1}{2(r-i)-j-1}, \text{ se } j \text{ é par} \tag{2.15}$$

e

$$c_{\mathrm{Ma}}(\operatorname{Sec}_r C)_j = \sum_{i=0}^{r-\frac{j+1}{2}} \binom{r}{2i}\binom{r+1}{2(r-i)-j}, \text{ se } j \text{ é ímpar.} \tag{2.16}$$

Observação 2.20. Para variedades determinantais genéricas, um resultado de positividade análogo ao do Teorema 2.19 é esperado: X. Zhang conjecturou ([Zha18, §7.6]) que os coeficientes da classe de Mather $c_{\mathrm{Ma}}(M_k(m,n)) \in A_*\mathbb{P}^{mn-1}$ são todos não-negativos. De fato, X. Zhang obteve fórmulas para a classe de Mather destas variedades, e consequentemente os respectivos graus polares e a distância euclidiana genérica [Zha18, Theorem 4.3, Proposition 5.4, Proposition 5.5]. As fórmulas ali obtidas dependem das classes de Chern de certos fibrados sobre Grassmaniannas para as quais não existem fórmulas explícitas, embora possam ser calculadas em cada caso específico. □

2.6 Distância euclidiana e graus polares

Seja $X \subsetneq \mathbb{P}^n$ uma subvariedade fechada própria. Para um ponto geral $y \in \mathbb{P}^n$, defina $d_y(x) = \sum_{i=0}^n (y_i - x_i)^2$ como o quadrado da distância euclidiana entre x e y. O **grau distância euclidiana de** X, denotado por $\mathrm{EDdeg}(X)$, é definido como o número de pontos críticos de d_y restrita à X_{suave}. Este número depende da geometria do lugar de interseção de X com a *quádrica isotrópica* $Q = Z(x_0^2 + \cdots + x_n^2)$.

Consideremos a variedade de incidência

$$\Phi_X = \overline{\{(p,H);\ p \text{ é um ponto não-singular e } H \supset T_pX\}} \subset \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*$$

chamada a **variedade conormal** de X e cuja classe denotamos

$$[\Phi_X] = \delta_0(X)H^n h + \cdots + \delta_{n-1}(X)Hh^n \quad \in A_*(\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*)$$

onde H e h são, respectivamente, o pull-back das classes hiperplanas de $\mathbb{P}^n$ e de $(\mathbb{P}^n)^*$. Os números $\delta_i(X)$ são chamados os **graus polares** de X. Aos interessados em aprender mais, indicamos as referências [Pie78] e [Pie15].

O **grau distância euclidiana genérica** de X é definido em [AH18] como a soma dos seus graus polares, isto é,

$$\mathrm{gEDdeg}(X) := \delta_0(X) + \cdots + \delta_{n-1}(X).$$

A nomenclatura se justifica pois $\mathrm{EDdeg}(X) = \mathrm{gEDdeg}(X)$ se X está em posição geral; isto se segue da discussão após Lemma 2.3 em [AH18] e como consequência de [DH+16, Theorem 5.4]: *se a variedade conormal* Φ_X *não intersecta a diagonal* $\Delta(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$, *então* $\mathrm{EDdeg}(X)$ *é a soma dos graus polares de* X.

Mais ainda, do Teorema de Reflexividade ([EH16, Theorem 10.20, p. 381]) decorre que

$$\Phi_X = \Phi_{X^*}$$

desde que tomemos o cuidado de trocar os fatores para $\Phi_{X^*} \subset (\mathbb{P}^n)^* \times \mathbb{P}^n$. Logo a soma dos graus polares de X coincide com a soma dos graus da sua variedade dual, ou seja,

$$\mathrm{gEDdeg}(X) = \mathrm{gEDdeg}(X^*). \tag{2.17}$$

A relação entre os graus polares e a classe de Mather é dada como segue.

Proposição 2.21 ([Alu18, Proposition 2.9])**.** *Seja X uma subvariedade própria de $\mathbb{P}^n$ de dimensão m. Então $\delta_i(X) = 0$ para $i > m$, e*

$$\mathrm{gEDdeg}(X) = \delta_0(X) + \cdots + \delta_m(X) = \sum_{j=0}^{m} (-1)^{m+j} c_{\mathrm{Ma}}(X)_j (2^{j+1} - 1),$$

onde $c_{\mathrm{Ma}}(X)_j$ é o coeficiente da componente de dimensão j na classe $c_{\mathrm{Ma}}(X) \in A_*\mathbb{P}^n$, isto é, $c_{\mathrm{Ma}}(X) = \sum_j c_{\mathrm{Ma}}(X)_j[\mathbb{P}^j]$.

O caso em que a variedade X é não-singular foi provado em [DH+16, Theorem 5.8].

Corolário 2.22. *Seja $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ uma curva racional normal. Então*

$$\mathrm{gEDdeg}(\mathrm{Sec}_r\, C) = \frac{3^{r+1} - 1}{2}.$$

Demonstração. É uma aplicação direta da Proposição 2.21 e dos cálculos que fizemos no Teorema 2.19. Por (2.17) podemos considerar a dual $(\mathrm{Sec}_r\, C)^*$, o que se torna mais conveniente. Como vimos em (2.14):

$$c_{\mathrm{Ma}}((\mathrm{Sec}_r\, C)^*) = \sum_{j=0}^{r} \binom{r+1}{r-j} 2^j [\mathbb{P}^j] \qquad \in A_*(\mathbb{P}^{2r})^*.$$

Portanto, pela Proposição 2.21,

$$\begin{aligned}
\mathrm{gEDdeg}(\mathrm{Sec}_r\, C) &= \sum_{j=0}^{r} (-1)^{r+j} \binom{r+1}{r-j} 2^j (2^{j+1} - 1) \\
&= \frac{(-1)^r}{2} \left[\sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r+1}{j+1} 4^{j+1} - \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r+1}{j+1} 2^{j+1} \right] \\
&= \frac{(-1)^r}{2} \left[- \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \binom{r+1}{j} 4^j + 1 + \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^j \binom{r+1}{j} 2^j - 1 \right] \\
&= \frac{(-1)^{r+1}}{2} \left[(1-4)^{r+1} - (1-2)^{r+1} \right] \\
&= \frac{3^{r+1} - 1}{2}.
\end{aligned}$$

□

R. Piene obteve, em [Pie88, Théorèm 3], uma relação precisa entre os graus polares e as classes de Mather para uma variedade projetiva. Esta relação foi recuperada por P. Aluffi em [Alu18, Corollary 2.3], utilizando outros métodos. Para uma subvariedade fechada própria $X \subset \mathbb{P}^n$, tem-se:

$$[\Phi_X] = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{\dim X + j} c_{\mathrm{Ma}}(X)_j (H + h)^{j+1} H^{n-j} \quad \in A_*(\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^n)^*),$$

onde $c_{\mathrm{Ma}}(X)_j$ é o coeficiente da componente de dimensão j na classe $c_{\mathrm{Ma}}(X) \in A_*\mathbb{P}^n$ (aqui H e h são como na definição da variedade conormal). Portanto os graus polares da hipersuperfície $\mathrm{Sec}_r\, C \subset \mathbb{P}^{2r}$ são obtidos a partir das equações (2.15) e (2.16):

$$\delta_i(\mathrm{Sec}_r\, C) = \sum_{j=i}^{2r-1} (-1)^{j+1} \binom{j+1}{i+1} c_{\mathrm{Ma}}(\mathrm{Sec}_r\, C)_j \tag{2.18}$$

para $i = 0, \dots, 2r-1$. Eis alguns exemplos calculados explicitamente:

Exemplo 2.23. Sejam $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ a curva racional normal e $X := \mathrm{Sec}_r\, C \subset \mathbb{P}^{2r}$ a hipersuperfície r-secante. Denotemos os seus graus polares $\delta_i(X)$ simplesmente por δ_i.

1. Para $r = 2$ temos

$$c_{\mathrm{Ma}}(X) = 3h + 6h^2 + 4h^3 + 2h^4 \quad \in A_*\mathbb{P}^4,$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 4, \delta_2 = 6, \delta_3 = 3.$$

2. Para $r = 3$ temos

$$c_{\mathrm{Ma}}(X) = 4h + 12h^2 + 16h^3 + 16h^4 + 12h^5 + 4h^6 \quad \in A_*\mathbb{P}^6,$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 8, \delta_3 = 16, \delta_4 = 12, \delta_5 = 4.$$

3. Para $r = 4$ temos

$$c_{\mathrm{Ma}}(X) = 5h + 20h^2 + 40h^3 + 60h^4 + 66h^5 + 44h^6 + 16h^7 + 4h^8 \quad \in A_*\mathbb{P}^8,$$

$$\delta_0 = 0, \delta_1 = 0, \delta_2 = 0, \delta_3 = 16, \delta_4 = 40, \delta_5 = 40, \delta_6 = 20, \delta_7 = 5.$$

$\square$

Capítulo 3

Mapa gradiente da secante maximal

Denote por $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ uma curva racional normal. Buscamos calcular a classe de Schwartz-MacPherson da hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C$. Como vimos no Capítulo 1, essa classe codifica informações importantes sobre a geometria e topologia da variedade mergulhada, como a característica de Euler de seções hiperplanas e a classe de Milnor. Nossa abordagem, usando o Teorema 1.21 de P. Aluffi, é usar a geometria do mapa gradiente associado, o que na prática significa calcular os graus projetivos do mapa.

Acontece aqui algo peculiar: o mapa gradiente se fatora via uma projeção por uma certa Grassmanianna. Via este caminho somos capazes de calcular os graus projetivos apenas em situações particulares, porém suficientes para inferir uma fórmula conjectural para o caso geral, como veremos no capítulo seguinte.

3.1 Fatorando o mapa gradiente

Seja $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ a r-secante de C. Da Proposição 2.2 vem que esta hipersuperfície é dada pelo determinante de uma matriz de Hankel, a saber $f = \det(\mathcal{H}_{r+1,r+1})$, que é portanto um polinômio de grau $r+1$. Seja $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ o mapa gradiente correspondente, cujas coordenadas são dadas pelas derivadas parciais $f_{x_0}, \ldots, f_{x_{2r}}$ que geram o ideal jacobiano J_r de f. Observe que o lugar de base do mapa gradiente coincide com o lugar singular de $\operatorname{Sec}_r C$, como esquemas.

O caso em que $r = 1$ não é emocionante: aqui o mapa gradiente define um isomorfismo linear $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$. Na discussão que se segue assumimos implicitamente $r \geq 2$.

Em geral $\operatorname{Sing}(\operatorname{Sec}_r C)$ não é reduzido, mas está suportado na secante de $r-1$ pontos de C. Mais ainda, pela Proposição 2.3 (d) temos a igualdade de ideais $\sqrt{J_r} = I_r$ e em particular vale a inclusão

$$J_r \subset I_r \tag{3.1}$$

onde I_r é o ideal gerado pelos menores maximais p_I da matriz de Hankel

$$\mathcal{H}_{r,r+2} = \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & \ldots & x_{r+1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{r+2} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{r-1} & x_r & \ldots & x_{2r} \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

onde I percorre todos r-subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, r+2\}$. Cada um destes menores tem grau r, o mesmo grau das derivadas parciais f_{x_i}; segue-se por (3.1) que cada derivada parcial pode ser escrita como uma combinação linear dos p_I's, de maneira única, uma vez que estes menores são linearmente independentes*. Isto nos leva naturalmente a considerar o mapa

$$\begin{aligned} \psi_r \colon \mathbb{P}^{2r} &\dashrightarrow \mathbb{P}^N \\ q &\mapsto (p_I(q)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

cujas coordenadas são dadas pelos menores maximais de (3.2), sendo $N = \binom{r+2}{r} - 1$. Note que o lugar de base deste mapa é exatamente a secante $\mathrm{Sec}_{r-1} C$ e portanto um esquema reduzido.

Uma vez que é dado por menores maximais, a imagem do mapa ψ_r está contida em $\mathbb{G}(r-1, r+1) \hookrightarrow \mathbb{P}^N$, a imagem da Grassmanianna de $(r-1)$-planos em $\mathbb{P}^{r+1}$ via o mergulho de Plücker. Como pode-se esperar, tal mapa foi considerado classicamente. A propriedade que necessitamos já aparece em um artigo de J. Semple de 1931 ([Sem31]); veja também [RS01, Proposition 4.4].

Teorema 3.1. *Para todo $r \geq 1$, o mapa $\psi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{G}(r-1, r+1)$ é birracional.*

Voltando à nossa construção: escrevemos as derivadas parciais $f_{x_i} = \sum_I a_{i,I} p_I$ em função dos menores maximais de (3.2) e consideramos o mapa $\mathbb{P}^N \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ dado por estas equações: ou seja, a projeção π_{L_r} com centro no subespaço $L_r \subset \mathbb{P}^N$ dado pelos zeros dos $2r+1$ hiperplanos

$$\sum_I a_{i,I} x_I = 0 \qquad\qquad i = 0, 1, \ldots, 2r \tag{3.4}$$

onde x_I denotam as coordenadas de $\mathbb{P}^N$.

Observação 3.2. É oportuno observar que $\operatorname{codim} L_r = 2r+1$: de fato, conhecemos os coeficientes $a_{i,I}$ (veja-os em (3.9); é conveniente adiar sua apresentação) e um momento de reflexão mostra que os hiperplanos em (3.4) são independentes. Em particular, a projeção π_{L_r} é sobrejetora sobre $\mathbb{P}^{2r}$. □

Fixemos a notação $\mathbb{G}_r := \mathbb{G}(r-1, r+1)$. Temos então um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{G}_r \arrow[dr, dashed, "\pi_r"] & \\ \mathbb{P}^{2r} \arrow[ur, dashed, "\psi_r"] \arrow[rr, dashed, "\phi_r"] & & \mathbb{P}^{2r} \end{tikzcd} \tag{3.5}$$

onde $\pi_r := \pi_{L_r}|_{\mathbb{G}_r}$ é a restrição da projeção. Em outras palavras, o mapa gradiente se fatora pela Grassmanniana.

Do Lema 3.5 abaixo segue-se que π_r é dominante e em particular que o mapa ϕ_r é sempre dominante (M. Mostafazadehfard [Mo14, Proposition 3.3.11] provou diretamente

*Isto é um fato geral: considere uma matriz de Hankel qualquer $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{m,n}(x)$ como em (2.1). Então, na ordem lexicográfica, os termos líderes dos menores maximais de $\mathcal{H}$ são todos distintos entre si e portanto os menores maximais são linearmente independentes sobre $\mathbb{C}$.

que ϕ_r é dominante via um argumento sobre a Hessiana da equação que define $\operatorname{Sec}_r C$). Aqui é natural indagar: *o mapa gradiente ϕ_r é birracional?* Para $r = 1$ é um isomorfismo linear e logo a resposta é sim. Para $r = 2$, M. Mostafazadehfard e A. Simis mostraram, algebricamente, que ϕ_2 não é birracional ([MS16]). Mais ainda, propuseram a seguinte:

Conjectura 3.3 ([MS16, Conjecture 3.18])**.** *Para $r \geq 2$, a hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C$ não é homaloidal. Em outras palavras, o mapa $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ não é birracional.*

Interpretando em termos do grau do mapa gradiente: o fato de que ϕ_r é dominante nos diz que $\deg(\phi_r) > 0$; vale que $\deg(\phi_1) = 1$; e a Conjectura 3.3 afirma que $\deg(\phi_r) > 1$ para $r \geq 2$.

Mostraremos adiante que esta conjectura é verdadeira. Nossa estratégia consiste em determinar $\deg(\phi_r)$ para todo r. Por sua vez isto seguirá como consequência de um resultado ainda mais compreensivo (Teorema 3.7), surpreendente em um primeiro momento: para qualquer r, *todos* os graus projetivos do mapa ϕ_r e do mapa ψ_r são os mesmos! O passo fundamental, assunto da próxima seção, consiste do feito de que a projeção π_r é de fato um morfismo. Antes, ilustramos nosso método quando $r = 2$.

Exemplo 3.4. Tome $C \subset \mathbb{P}^4$ a quártica racional normal e considere sua secante $\operatorname{Sec}_2 C$, dada pelos zeros do polinômio

$$f = \det \mathcal{H}(x) = \det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

Para simplificar o cálculo das derivadas parciais aplicamos a regra da cadeia à composição $\mathbb{A}^5 \xrightarrow{\mathcal{H}} \mathbb{A}^9 \xrightarrow{\det} \mathbb{C}$ obtendo

$$f_{x_k} = \sum_{i+j=k} m_{ij}$$

onde m_{ij} é $(-1)^{i+j}$ vezes o (i,j)-menor of $\mathcal{H}(x)$. Assim:

$$f_{x_0} = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ x_3 & x_4 \end{vmatrix}, \quad f_{x_1} = -2\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix}, \quad f_{x_2} = 2\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_2 & x_4 \end{vmatrix},$$

$$f_{x_3} = -2\begin{vmatrix} x_0 & x_2 \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, \quad f_{x_4} = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}.$$

Da inclusão em (3.1), cada derivada parcial é uma combinação linear dos menores maximais p_{ij} $(1 \leq i < j \leq 4)$ da matriz

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix}$$

a saber

$$f_{x_0} = p_{34}, \quad f_{x_1} = -2p_{24}, \quad f_{x_2} = 3p_{23} + p_{14},$$

$$f_{x_3} = -2p_{13}, \quad f_{x_4} = p_{12}.$$

Os hiperplanos correspondentes em $\mathbb{P}^5$ são independentes e logo o subespaço $L_2 \subset \mathbb{P}^5$ dado pela interseção destes hiperplanos é um ponto, a saber $q = (0 : 0 : -3 : 1 : 0 : 0)$. Recorde que a Grassmanianna $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G}(1, 3)$ das retas de $\mathbb{P}^3$ é dada pela equação

$$x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$$

e portanto $q \notin \mathbb{G}_2$. Assim, na fatoração (3.5) do mapa gradiente

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{G}_2 \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ \mathbb{P}^4 \arrow[ur, dashed, "\psi_2"] \arrow[rr, dashed, "\phi_2"] & & \mathbb{P}^4 \end{tikzcd} \tag{3.6}$$

a projeção $\pi_2 = \pi_q|_{\mathbb{G}_2} : \mathbb{G}_2 \to \mathbb{P}^4$ é de fato um morfismo e daí $\deg(\pi_2) = \deg \mathbb{G}_2 = 2$. Finalmente, pelo Teorema 3.1 o mapa ψ_2 é birracional sobre $\mathbb{G}_2$ e portanto

$$\deg(\phi_2) = \deg(\psi_2) \cdot \deg(\pi_2) = 1 \cdot 2 = 2$$

e, em particular, ϕ_2 não é birracional. □

3.2 Lema sobre o centro de projeção

Mostramos agora que o subespaço linear $L_r \subset \mathbb{P}^N$ não intersecta a Grassmanniana $\mathbb{G}_r = \mathbb{G}(r-1, r+1)$. Por simplicidade assumimos $r \geq 2$. Ponha $N = \binom{r+2}{r} - 1$.

Tomamos em $\mathbb{P}^N$ coordenadas x_I indexadas por r-sequências ordenadas $I = (i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$ de inteiros entre 1 e $r+2$. Em seguida, estendemos para r-sequências J quaisquer: se J é uma permutação de I, então tomamos $x_J := \pm x_I$ com o devido sinal; e se J possui elementos repetidos, fazemos $x_J := 0$. Com estas convenções, as equações que definem o ideal da Grassmanniana $\mathbb{G}_r \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ (as *relações de Plücker*) são ([GKZ94, Theorem 1.3, p. 94]):

$$\sum_{a=1}^{r+1} (-1)^a x_{i_1 \ldots i_{r-1} j_a} x_{j_1 \ldots \hat{j_a} \ldots j_{r+1}} = 0 \tag{3.7}$$

para quaisquer duas sequências $1 \leq i_1 < \cdots < i_{r-1} \leq r+2$ e $1 \leq j_1 < \cdots < j_{r+1} \leq r+2$.

Estas expressões podem ser dramaticamente simplificadas indexando-se as coordenadas de uma outra forma: tomando-se o complementar. Dados $i, j \in \{1, \ldots, r+2\}$ com $i < j$, definimos

$$q_{ij} := x_I \qquad \text{onde } I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_r\} = \{1, 2, \ldots, r+2\} \setminus \{i, j\}.$$

Com esta escolha as relações de Plücker para $\mathbb{G}_r$ são simplesmente

$$q_{ij}q_{kl} - q_{ik}q_{jl} + q_{il}q_{jk} = 0, \qquad \text{onde } 1 \leq i < j < k < l \leq r+2. \tag{3.8}$$

e não é surpresa que estas sejam as equações da Grassmanianna de retas de $\mathbb{P}^{r+1}$.

Como vimos na discussão em (3.4), as equações do centro de projeção são dadas pelas expressões das derivadas parciais da equação de $\operatorname{Sec}_r C$ em termos dos menores que definem o ideal de $\operatorname{Sec}_{r-1} C$. Felizmente o (árduo) cálculo explícito destas expressões foi realizado por M. Mostafazadehfard em sua tese ([Mo14, Lemma 3.3.4]) e encontram-se também em [MS16, (11)]; com a nossa escolha de índices, as equações para L_r são

$$\sum_{\substack{i+j=p \\ 1\leq i<j}} (j-i)q_{ij} = 0, \qquad\qquad p = 3, 4, \dots, 2r+3. \tag{3.9}$$

Estamos em posição de provar o ponto crucial da nossa construção: o centro de projeção não intersecta a Grassmanianna.

Lema 3.5. $L_r \cap \mathbb{G}_r = \emptyset$. *Como consequência, o mapa* π_r *em* (3.5) *é um morfismo.*

Demonstração. Suponha que exista um ponto $(q_{ij}) \in \mathbb{P}^N$ na interseção entre L_r e $\mathbb{G}_r$. Mostraremos que cada uma das coordenadas q_{ij} deve ser nula e logo tal ponto não existe. Argumentaremos por indução na soma p dos índices das coordenadas.

Para $p = 3, 4$, segue diretamente de (3.9) que $q_{12} = q_{13} = 0$. Tomemos $p > 4$ e suponhamos que $q_{ij} = 0$ sempre que $i + j < p$. Considere o conjunto dos pares cuja soma das entradas é p:

$$P = \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \text{ e } i + j = p\}.$$

Repare que P tem pelo menos dois elementos. Afirmamos que

$$q_{ij} \cdot q_{kl} = 0 \qquad\qquad \text{para quaisquer } (i, j) \neq (k, l) \text{ em } P. \tag{3.10}$$

De fato, tome pares $(i, j) \neq (k, l)$ em P. Como $i + j = k + l = p$, segue-se que i, j, k, l são distintos entre si. Permutando os pares se necessário, podemos supor $i < k$ e portanto $i < k < l < j$. Considere a equação correspondente em (3.8):

$$q_{ik}q_{lj} - q_{il}q_{kj} + q_{ij}q_{kl} = 0.$$

Como $i + k < i + j = p$ e $i + l < k + l = p$, segue da hipótese de indução que $q_{ik} = q_{il} = 0$ e daí, pela equação acima, deduzimos $q_{ij}q_{kl} = 0$, o que prova a afirmação em (3.10).

Como nosso ponto também pertence ao centro de projeção L_r, suas coordenadas satisfazem as equações (3.9); temos portanto um sistema

$$\begin{cases} q_{ij}q_{kl} = 0, & \forall (i, j) \neq (k, l) \in P \\ \sum_{(i,j)\in P}(j-i)q_{ij} = 0 \end{cases}$$

donde decorre $q_{ij} = 0$ para todo $(i, j) \in P$: basta observar que dadas duas sequências $t_1, \dots, t_s$ e $a_1, \dots, a_s$, de números complexos tais que $a_i \neq 0$ para todo i, as relações

$$\begin{cases} t_i t_j = 0, & \text{para todo } i \neq j \\ \sum_{i=1}^s a_i t_i = 0 \end{cases}$$

implicam em $t_1 = \cdots = t_s = 0$. ☐

De imediato obtemos um resultado de interesse:

Corolário 3.6. *Para todo* $r \geq 1$, *o mapa gradiente* ϕ_r *é dominante.*

Demonstração. Dado um ponto $p \in \mathbb{P}^{2r}$ qualquer, segue da Observação 3.2 que a pré-imagem $\pi_{L_r}^{-1}(p)$ tem codimensão $2r$. Como a Grassmanianna $\mathbb{G}_r$ tem dimensão $2r$ e é disjunta do centro de projeção L_r pelo Lema 3.5, vem que a fibra $\pi_r^{-1}(p)$ é não-vazia. O resultado segue então da fatoração (3.5) do mapa gradiente e do Teorema 3.1. ☐

3.3 Graus projetivos

Estamos prontos para o resultado principal deste capítulo. Depois da nossa longa preparação, a demonstração é curta.

Teorema 3.7. *Os graus projetivos dos mapas ϕ_r e ψ_r coincidem.*

Demonstração. Como observamos após a Definição 1.16, o j-ésimo grau projetivo $d_j(\phi_r)$ é obtido tomando-se o grau da pré-imagem de um $\mathbb{P}^{2r-j} \subset \mathbb{P}^{2r}$ geral via ϕ_r. Analogamente, obtemos $d_j(\psi_r)$ tomando o grau de $\psi_r^{-1}(\mathbb{P}^{N-j} \cap \mathbb{G}_r)$, uma vez que, pelo Teorema 3.1, a Grassmanianna $\mathbb{G}_r$ é o fecho da imagem deste mapa.

Tome um subespaço linear $\mathbb{P}^{2r-j} \subset \mathbb{P}^{2r}$ qualquer. Da Observação 3.2 vem que a pré-imagem pela projeção π_{L_r} tem codimensão j em $\mathbb{P}^N$. Como a grassmanianna $\mathbb{G}_r$ é disjunta do centro de projeção L_r pelo Lema 3.5, a pré-imagem pelo mapa π_r é da forma $\pi_r^{-1}(\mathbb{P}^{2r-j}) = \mathbb{P}^{N-j} \cap \mathbb{G}_r$. Por outro lado, da fatoração em (3.5)

$$\phi_r^{-1}(\mathbb{P}^{2r-j}) = (\pi_r \circ \psi_r)^{-1}(\mathbb{P}^{2r-j}) = \psi_r^{-1}(\pi_r^{-1}(\mathbb{P}^{2r-j})) = \psi_r^{-1}(\mathbb{P}^{N-j} \cap \mathbb{G}_r).$$

Agora, se tomamos $\mathbb{P}^{2r-j}$ geral, segue de sucessivas aplicações do Teorema de Bertini que a interseção $\mathbb{P}^{N-j} \cap \mathbb{G}_r$ é transversal, uma vez que π_r não possui pontos de base. Isto é suficiente para concluir que os graus projetivos dos mapas ϕ_r e ψ_r são os mesmos. □

Observação 3.8. Na demonstração do Teorema 3.7 há uma alternativa para a utilização do Teorema de Bertini. O Teorema de Transversalidade de Kleiman [Kle74, Corollary 4] trata, sob certa hipóteses, sobre a transversalidade da interseção de dois subesquemas de um esquema algébrico integral. Fixe $j \in \{0, \dots, 2r\}$. Considere a variedade ambiente $\mathbb{P}^N$ e os subesquemas $\mathbb{G}_r$ e Y um elemento qualquer de

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_j &:= \{\text{espaços lineares de codimensão } j \text{ em } \mathbb{P}^N \text{ contendo } L_r\}\\ &= \{\text{fecho das pré-imagens por } \pi_{L_r} \text{ dos espaços lineares de codimensão } j \text{ em } \mathbb{P}^{2r}\}.\end{aligned}$$

Note que o grupo $G := \{g \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^N);\ g(L_r) = L_r\}$ age em $\mathcal{L}_j$. Mais ainda, como G age transitivamente em $\mathbb{P}^N$, segue do Teorema de Transversalidade que para um elemento geral $g \in G$, a interseção $(gY) \cap \mathbb{G}_r$ é transversal. □

Apresentamos agora algumas consequências importantes do Teorema 3.7.

Corolário 3.9. *Sejam $C \subset \mathbb{P}^{2r}$ a curva racional normal e $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ o mapa gradiente da hipersuperfície $\mathrm{Sec}_r\, C$. Então:*

$$\deg(\phi_r) = \deg \mathbb{G}_r = \frac{1}{r+1}\binom{2r}{r}.$$

Em particular ϕ_r não é birracional para $r \geq 2$ e por conseguinte a Conjectura 3.3 é verdadeira.

Demonstração. Argumentando como no final do Exemplo 3.4 obtemos

$$\deg(\phi_r) = \deg(\pi_r) = \deg \mathbb{G}_r = \deg(\mathbb{G}(1, r+1))$$

cujo grau é exatamente $\frac{1}{r+1}\binom{2r}{r}$.

Alternativamente, recorde que o último grau projetivo é o produto do grau do mapa com o grau da sua imagem. Assim, temos que $d_{2r}(\phi_r) = \deg(\phi_r) \cdot 1$ pois o mapa gradiente é dominante e também que $d_{2r}(\psi_r) = \deg(\psi_r) \cdot \deg \mathbb{G}_r = \deg \mathbb{G}_r$, pois pelo Teorema 3.1 o mapa ψ_r é birracional. O resultado agora segue do Teorema 3.7. □

Corolário 3.10. *A classe de Segre do lugar singular da hipersuperfície* $\operatorname{Sec}_r C$ *coincide com a classe de Segre da secante* $\operatorname{Sec}_{r-1} C$*. De maneira precisa,*

$$s(\operatorname{Sing}(\operatorname{Sec}_r C), \mathbb{P}^{2r}) = s(\operatorname{Sec}_{r-1} C, \mathbb{P}^{2r}) \quad \in A_*\mathbb{P}^{2r}.$$

Demonstração. Vimos que $\operatorname{Sing}(\operatorname{Sec}_r C)$ e $\operatorname{Sec}_{r-1} C$ são, respectivamente, os lugares de base dos mapas ϕ_r e ψ_r. Tendo em mente que os coeficientes das classes de Segre do lugar de base de um mapa racional são dados pelos graus projetivos (Proposição 1.17), o corolário decorre imediatamente do Teorema 3.7. □

Isto é surpreendente uma vez que $\operatorname{Sec}_{r-1} C$ é reduzida mas em geral o lugar singular de $\operatorname{Sec}_r C$ não é. Isto nos será bastante útil na próxima seção.

Por fim, uma fórmula para a característica de Euler topológica de uma seção hiperplana genérica de $\operatorname{Sec}_r C$.

Corolário 3.11. *Para um hiperplano genérico* $H \subset \mathbb{P}^{2r}$*, temos:*

$$\chi_{\text{top}}((\operatorname{Sec}_r C) \cap H) = \frac{1}{r+1}\binom{2r}{r} - 1 + 2r.$$

Demonstração. Segue da combinação do Teorema 2.13, do Corolário 3.9 e da fórmula de Dimca e Papadima na Observação 1.33, que relaciona o grau do mapa gradiente de $\operatorname{Sec}_r C$ com a sua característica de Euler e a de uma seção hiperplana genérica:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r+1}\binom{2r}{r} &= (-1)^{2r}\left(1 - \chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_r C) + \chi_{\text{top}}((\operatorname{Sec}_r C) \cap H)\right) \\ &= 1 - 2r + \chi_{\text{top}}((\operatorname{Sec}_r C) \cap H).\end{aligned}$$

□

3.3.1 Algumas fórmulas

Sejam $d_0(\phi_r), \ldots, d_{2r}(\phi_r)$ os graus projetivos do mapa gradiente $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$. Finalizamos este capítulo com uma relação de fórmulas para alguns destes graus. Em princípio estas fórmulas são calculadas via seções lineares do lugar singular da hipersuperfície secante; porém via o Corolário 3.10 reduzimos o estudo para seções lineares da secante $\operatorname{Sec}_{r-1} C \subset \mathbb{P}^{2r}$, que é reduzida e de dimensão menor, o que torna o cálculo possível.

Proposição 3.12. *As seguintes fórmulas são válidas:*

(a) $d_0(\phi_r) = 1,\ d_1(\phi_r) = r,\ d_2(\phi_r) = r^2.$

(b) $d_3(\phi_r) = \frac{1}{6}r(r-1)(5r+2).$

(c) $d_4(\phi_r) = \frac{1}{12}r(r-1)(7r^2-5r-6)$.

Demonstração. Para calcular os graus projetivos do mapa ϕ_r, segue do Teorema 3.7 que podemos usar o mapa ψ_r; mais ainda, como observamos depois da Definição 1.16, basta tomar a restrição a subespaços lineares genéricos. Em resumo,

$$d_i(\phi_r) = d_i(\psi_r) = d_i(\psi_r|_{\mathbb{P}^i})$$

onde $\mathbb{P}^i \subset \mathbb{P}^{2r}$ é genérico de dimensão i.

(a) Recorde que o mapa ψ_r tem como lugar de base a secante $\operatorname{Sec}_{r-1} C$, de codimensão 3 no ambiente $\mathbb{P}^{2r}$. Logo, para $i = 0, 1, 2$, a restrição a um $\mathbb{P}^i$ geral é um morfismo e portanto

$$d_0(\psi_r) = 1, \quad d_1(\psi_r) = r \quad \text{e} \quad d_2(\psi_r) = r^2.$$

Quando $i \geq 3$, calculamos a classe de Segre do lugar de base do mapa $\psi_r|_{\mathbb{P}^i}$, a saber $(\operatorname{Sec}_{r-1} C) \cap \mathbb{P}^i$, e utilizamos a Proposição 1.17. Observe que, como vimos na Proposição 2.3, a secante $\operatorname{Sec}_{r-1} C$ tem grau $\binom{r+2}{3}$.

(b) Para $i = 3$, $(\operatorname{Sec}_{r-1} C) \cap \mathbb{P}^3$ é um conjunto de $\binom{r+2}{3}$ pontos, cada um com multiplicidade 1, uma vez que o lugar singular de $\operatorname{Sec}_{r-1} C$ tem suporte em $\operatorname{Sec}_{r-2} C$ e portanto vive em codimensão 5 em $\mathbb{P}^{2r}$, pela Proposição 2.3. Logo, $s((\operatorname{Sec}_{r-1} C) \cap \mathbb{P}^3, \mathbb{P}^3) = \binom{r+2}{3}[\mathbb{P}^0]$, e de (1.2) obtemos

$$d_3(\psi_r) = r^3 - \binom{r+2}{3} = \frac{1}{6}r(r-1)(5r+2).$$

(c) Tratamos agora o caso $i = 4$, mais elaborado. Consideramos a curva

$$Y_r := (\operatorname{Sec}_{r-1} C) \cap \mathbb{P}^4,$$

o lugar de base da restrição $\psi_r|_{\mathbb{P}^4}$. Como o lugar singular de $\operatorname{Sec}_{r-1} C$ vive em codimensão 5 em $\mathbb{P}^{2r}$, segue do Teorema de Bertini que esta curva é suave; calculamos seu gênero no Exemplo 2.9 a partir da série de Hilbert de $\operatorname{Sec}_{r-1} C$:

$$g(Y_r) = \frac{1}{24}(r-1)(r-2)(3r^2+11r+12).$$

Como Y_r é suave, sua classe de Segre é dada pelo inverso da classe de Chern do normal $N_{Y_r/\mathbb{P}^4}$, que por sua vez pode ser calculada via a sequência exata (a fórmula de adjunção)

$$0 \to TY_r \to T\mathbb{P}^4|_{Y_r} \to N_{Y_r/\mathbb{P}^4} \to 0 \quad .$$

O resultado é:

$$\begin{aligned} s(Y_r, \mathbb{P}^4) &= c(N_{Y_r/\mathbb{P}^4})^{-1} \\ &= \left((2-2g(Y_r))h^4 + \binom{r+2}{3}h^3\right)((1+h)^5)^{-1} \\ &= \left(2 - 2g(Y_r) - 5\binom{r+2}{3}\right)h^4 + \binom{r+2}{3}h^3 \quad \in A_*\mathbb{P}^4. \end{aligned}$$

Portanto, das fórmulas em (1.2),

$$\begin{aligned}
d_4(\psi_r) &= r^4 - 4rs_3(Y_r) - s_4(Y_r) \\
&= r^4 - 4r\binom{r+2}{3} - 2 + 2g(Y_r) + 5\binom{r+2}{3} \\
&= r^4 + (5-4r)\binom{r+2}{3} + 2g(Y_r) - 2 \\
&= \frac{1}{12}r(r-1)(7r^2 - 5r - 6).
\end{aligned}$$

$\square$

Capítulo 4

Conjectura

Como no capítulo anterior, seja $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ o mapa gradiente associado à hipersuperfície $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$, a r-secante de uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^{2r}$. Buscamos expressões para os graus projetivos de todos estes mapas.

Em todo este capítulo utilizaremos a notação seguinte.

Para $i = 0, 1, \ldots, 2r$, indicamos por $d_i(\phi_r)$ o i-ésimo grau projetivo do mapa ϕ_r; em outras palavras,

$$d_i(\phi_r) = \deg(\phi_r|_{\mathbb{P}^i})$$

é o grau topológico da restrição do mapa a um $\mathbb{P}^i$ geral. Em particular, $d_{2r}(\phi_r) = \deg(\phi_r)$.

Denotamos por $U_r = \mathbb{P}^{2r} \setminus \operatorname{Sec}_r C$ o *complementar da hipersuperfície r-secante*. Para $i = 0, 1, \ldots, 2r$, denote por $c_i(U_r)$ o coeficiente de $[\mathbb{P}^i]$ na classe $c_{\mathrm{SM}}(U_r)$, ou seja,

$$c_{\mathrm{SM}}(U_r) = c_0(U_r)[\mathbb{P}^0] + c_1(U_r)[\mathbb{P}^1] + \cdots + c_{2r}(U_r)[\mathbb{P}^{2r}] \qquad \in A_*\mathbb{P}^{2r}.$$

Assim o grau da classe é $c_0(U_r)$, que é portanto a característica de Euler topológica do aberto U_r.

Para $k \geq 0$, denotamos por $\mathcal{C}_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ os números de Catalan. Recorde nossa convenção: para inteiros a, b, vale $\binom{a}{b} = 0$ sempre que $0 < a < b$ ou $b < 0$. Isso nos permite desconsiderar índices em somas infinitas envolvendo binomiais, o que simplifica as fórmulas e a argumentação.

4.1 Conjectura

Começamos revisitando o Teorema 1.21 de P. Aluffi, que relaciona os graus projetivos do mapa gradiente ϕ_r e a classe $c_{\mathrm{SM}}(\operatorname{Sec}_r C)$. Utilizando o príncipio de inclusão-exclusão e o fato de que $c_{\mathrm{SM}}(\mathbb{P}^n) = c(T\mathbb{P}^n) \cap [\mathbb{P}^n] = (1+h)^{n+1} \in A_*\mathbb{P}^n$, segue da fórmula ali apresentada uma expressão para a classe de Schwartz-MacPherson do aberto U_r:

$$c_{\mathrm{SM}}(U_r) = \sum_{j=0}^{2r} d_j(\phi_r)(-h)^j(1+h)^{2r-j} \qquad \in A_*\mathbb{P}^{2r}. \tag{4.1}$$

Em particular, lendo o coeficiente de $[\mathbb{P}^0] = h^{2r}$:

$$c_0(U_r) = \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j d_j(\phi_r) = d_0(\phi_r) - d_1(\phi_r) + \cdots + d_{2r}(\phi_r) \tag{4.2}$$

e portanto a característica de Euler topológica de U_r é a soma alternada dos graus projetivos. O caso geral é similar: os c_i's são dados por uma soma alternada dos graus projetivos com certos pesos, que dependem da dimensão do espaço ambiente. De fato, expandindo (4.1) obtemos

$$c_i(U_r) = \sum_{j=0}^{2r-i} (-1)^j \binom{2r-j}{i} d_j(\phi_r) \quad . \tag{4.3}$$

Em outras palavras, para cada $r \geq 0$ fixado, temos uma relação linear $\vec{c} = A_r \vec{d}$, onde A_r é uma matriz invertível cujas entradas, frisamos, dependem de r:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{2r-1} \\ c_{2r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 & 1 \\ \binom{2r}{1} & -\binom{2r-1}{1} & \cdots & \binom{2}{1} & -\binom{1}{1} & \\ \binom{2r}{2} & -\binom{2r-1}{2} & \cdots & \binom{2}{2} & & \\ \vdots & & \iddots & & & \\ \binom{2r}{2r-1} & -\binom{2r-1}{2r-1} & & & & \\ \binom{2r}{2r} & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{2r-1} \\ d_{2r} \end{pmatrix} . \tag{4.4}$$

Reciprocamente,

$$d_i(\phi_r) = \sum_{j=2r-i}^{2r} (-1)^j \binom{j}{2r-i} c_j(U_r) \tag{4.5}$$

e em particular o grau topológico do mapa gradiente é a soma alternada dos c_i's:

$$d_{2r}(\phi_r) = c_0(U_r) - c_1(U_r) + \cdots - c_{2r-1}(U_r) + c_{2r}(U_r). \tag{4.6}$$

Na Proposição 3.12 calculamos explicitamente as funções $d_i(\phi_r)$ para $i \leq 4$. Em cada um destes casos vimos que $d_i(\phi_r)$ é polinomial em r, de grau i.

E sobre as funções $c_i(U_r)$, o que podemos dizer? Vejamos o caso em que $i = 0$: no Teorema 2.13 calculamos a característica de Euler de $\operatorname{Sec}_r C$ via pontos fixos de uma ação de $\mathbb{C}^*$, obtendo $2r$. Logo:

$$c_0(U_r) = \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^{2r} \setminus \operatorname{Sec}_r C) = \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^{2r}) - \chi_{\text{top}}(\operatorname{Sec}_r C) = 2r + 1 - 2r = 1.$$

Ou seja, a função $c_0(U_r)$ é de fato constante.

Se $i > 0$, temos fórmulas para os coeficientes $c_i(U_r)$ quando $i \geq 2r - 4$: por (4.3) estes se reduzem a calcular $d_i(\phi_r)$ para $i \leq 4$ e logo podemos aplicar a Proposição 3.12; o resultado é

$$\begin{gathered} c_{2r}(U_r) = 1, \qquad c_{2r-1}(U_r) = r, \qquad c_{2r-2}(U_r) = r^2, \\ c_{2r-3}(U_r) = \frac{1}{2} r^2 (r-1) \qquad \text{e} \qquad c_{2r-4}(U_r) = \frac{1}{4} r^2 (r-1)^2. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Não temos fórmulas para valores pequenos de i.

Entretanto quando a dimensão do espaço ambiente é pequena podemos calcular estes coeficientes efetivamente, com o auxílio de um computador. Com os recursos que dispomos, conseguimos fazê-lo apenas para $r \leq 5$; veja o código para o Macaulay2 no Apêndice B.1.1. Reproduzimos os resultados obtidos para as classes c_{SM} na Tabela 4.1.

r	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
0	1										
1	1	1	1								
2	1	2	4	2	1						
3	1	3	9	9	9	3	1				
4	1	4	16	24	36	24	16	4	1		
5	1	5	25	50	100	100	100	50	25	5	1

Tabela 4.1: Coeficientes $c_i(U_r)$ calculados via Macaulay2.

Analisando a tabela, somos levados a acreditar que $c_1(U_r) = r$ e $c_2(U_r) = r^2$, novamente polinômios de graus 1 e 2, respectivamente.

Mais ainda, suponha por um momento que $c_3(U_r)$ seja polinomial em r, de grau 3: como já conhecemos seus valores para $r = 0, 1, 2, 3$ (a saber $0, 0, 2, 9$, respectivamente) podemos interpolar, obtendo

$$c_3(U_r) = \frac{1}{2}r^2(r-1) \tag{4.8}$$

que seria então nosso palpite. Este polinômio avaliado em $r = 4$ e $r = 5$ resulta em 24 e 50, em concordância com os valores da Tabela 4.1. Algo similar acontece com $c_4(U_r)$. Outro aspecto notável é a simetria.

Todas estas considerações nos levam à seguinte:

Conjectura 4.1. *Para cada $i \geq 0$ fixado tem-se:*

(a) *A função $c_i(U_r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

(b) *A função $d_i(\phi_r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

Uma vez feita a hipótese, é natural explorar. Que consequências decorrem da conjectura? A resposta, em sua formulação última, é que a sua validade implica em *fórmulas explícitas* para as funções $c_i(U_r)$ e $d_i(\phi_r)$. Isto, concordemos, não é nada claro aqui. Os mais apressados as encontrarão no Teorema 4.11. E destas fórmulas decorrem certas propriedades qualitativas interessantes para as classes $c_{\mathrm{SM}}(U_r)$ e $c_{\mathrm{SM}}(\mathrm{Sec}_r\, C)$; consulte o Corolário 4.12.

Finalmente, a Conjectura 4.1 pode ser reformulada de uma maneira ainda mais simples; veja a Proposição 4.13.

4.2 Algoritmo

Mostraremos que se estamos dispostos a assumir a validade da Conjectura 4.1, então os graus projetivos do mapa gradiente ϕ_r e a classe $c_{\mathrm{SM}}(U_r)$ podem ser efetivamente calculados para *todo* r. Os ingredientes-chave são: o cálculo do grau topológico do mapa gradiente, $d_{2r}(\phi_r) = \mathcal{C}_r$, realizado no Corolário 3.9 e as relações (4.3) de Aluffi.

O resultado abaixo é de caráter numérico, sem conexão alguma com a geometria. Para enfatizar isso, mudamos um pouco a notação: $c_i(r)$ e $d_i(r)$ denotarão os números inteiros produzidos, que a priori não possuem relação com os invariantes geométricos $c_i(U_r)$ e $d_i(\phi_r)$ que desejamos determinar.

Teorema 4.2 (Algoritmo)**.** *Existe um único par de sequências duplas $(c_i(r))$ e $(d_i(r))$ com $i, r \geq 0$ que satisfaz as condições seguintes:*

(a) $d_i(r) = 0$ *para todo* $i \geq 2r + 1$.

(b) $d_{2r}(r) = \mathcal{C}_r$.

(c) *Fixado i, a função $c_i(r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

(d) *Fixado i, a função $d_i(r)$ é polinomial em r, de grau $\leq i$.*

(e) *Valem as relações de Aluffi para $c_i(r)$ e $d_i(r)$, isto é*

$$c_i(r) = \sum_{j=0}^{2r-i} (-1)^j \binom{2r-j}{i} d_j(r) \qquad . \tag{4.9}$$

Mais ainda, estas sequências são efetivamente calculáveis.

Demonstração. Olhamos para $c = (c_i(r))$ e $d = (d_i(r))$ como matrizes infinitas, onde r indexa as linhas e i indexa as colunas. Por (a), apenas as primeiras $2r + 1$ entradas da linha r na matriz d são possivelmente não-nulas e por (e) o mesmo vale para a matriz c.

Procedemos por indução em r. Descrevemos a seguir como obter uma nova coluna em ambas as matrizes a partir das colunas anteriores. A coluna r (e também toda a linha r) é gerada no passo r.

<u>Passo 0</u>: para $r = 0$, segue de (b) que $d_0(0) = 1$. De (d) segue que $d_0(r)$ é constante e logo $d_0(r) = 1$ para todo r. De (e) vem que $c_0(0) = 1$ e daí segue por (c) que $c_0(r) = 1$ para todo r. Assim, em ambas as matrizes, todas as entradas na primeira coluna são iguais a 1.

<u>Passo r</u>: neste passo já conhecemos todas as entradas das r primeiras colunas. Em particular, conhecemos os valores de $c_i(r)$ e $d_i(r)$ para $i = 0, \ldots, r-1$. Decorre daí que também conhecemos $c_{r+1}(r), \ldots, c_{2r}(r)$, pois por (4.9) estes valores dependem apenas dos já conhecidos $d_0(r), \ldots, d_{r-1}(r)$.

Assim, na linha r da matriz c, já conhecemos todos os valores de $c_i(r)$ para todo i, exceto quando $i = r$, na diagonal. Entretanto a relação dada em (e) entre os c_i's e d_i's é invertível para r fixado:

$$d_i(r) = \sum_{j=2r-i}^{2r} (-1)^j \binom{j}{2r-i} c_j(r) \qquad . \tag{4.10}$$

Em particular, para $i = 2r$,

$$c_0(r) - c_1(r) + \cdots + (-1)^r c_r(r) + \cdots - c_{2r-1}(r) + c_{2r}(r) = d_{2r}(r) \tag{4.11}$$

e por (b) temos $d_{2r}(r) = \mathcal{C}_r$, obtendo assim $c_r(r)$. Conhecemos portanto $c_0(r), \ldots, c_{2r}(r)$ e, como já observamos, todas as outras entradas na linha r da matriz c são nulas. Em suma, conhecemos toda a linha r na matriz c. Usando as equações (4.10) oriundas de (e), obtemos também a linha r da matriz d. Finalmente, vem de (c) e (d) que $c_r(\cdot)$ e $d_r(\cdot)$ são polinomiais de grau $\leq r$; como agora conhecemos os $r+1$ valores $c_r(0), \ldots, c_r(r)$ e $d_r(0), \ldots, d_r(r)$ na coluna r, podemos interpolar, obtendo assim toda a coluna r em ambas as matrizes, o que termina esse passo. $\square$

É um algoritmo muito simples. Oferecemos uma implementação no Apêndice B.2.

Exemplo 4.3. Acompanhemos o funcionamento do algoritmo no começo do passo 3. Neste ponto já conhecemos as 3 primeiras linhas e colunas das matrizes $c_i(r)$ e $d_i(r)$. Em particular, já conhecemos

$$c_0(r) = 1, c_1(r) = r, c_2(r) = r^2 \qquad \text{e} \qquad d_0(r) = 1, d_1(r) = r, d_2(r) = r^2.$$

Por (b), conhecemos também $d_6(3) = \frac{1}{4}\binom{6}{3} = 5$. As entradas desconhecidas estão indicadas simbolicamente, e, por simplicidade, omitimos o índice da linha.

r	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
0	1						
1	1	1	1				
2	1	2	4	2	1		
3	1	3	9	c_3	c_4	c_5	c_6

r	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
0	1						
1	1	1	1				
2	1	2	4	4	2		
3	1	3	9	d_3	d_4	d_5	5

Usando (4.9), obtemos $c_4 = 9, c_5 = 3$ e $c_6 = 1$ pois estes só dependem de d_0, d_1 e d_2; daí, usando (4.11), vem que

$$1 - 3 + 9 - c_3 + 9 - 3 + 1 = 5$$

e portanto $c_3 = 9$. Aplicando (4.10) obtemos $d_3 = 17$, $d_4 = 21$, $d_5 = 15$. Finalmente, como a coluna 3 é polinomial de grau ≤ 3 e conhecemos 4 valores, interpolamos e obtemos

$$c_3(r) = \frac{1}{2}r^2(r-1) \qquad \text{e} \qquad d_3(r) = \frac{1}{6}r(r-1)(5r+2).$$

Incidentalmente, observe que $c_3(r)$ coincide com o nosso palpite para $c_3(U_r)$ em (4.8) e que $d_3(r)$ coincide com $d_3(\phi_r)$ calculado na Proposição 3.12. Temos agora todas as entradas das 4 primeiras linhas e colunas:

r	c_0	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8
0	1								
1	1	1	1						
2	1	2	4	2	1				
3	1	3	9	9	9	3	1		
4	1	4	16	24	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8

r	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8
0	1								
1	1	1	1						
2	1	2	4	2	1				
3	1	3	9	17	21	15	5		
4	1	4	16	44	d_4	d_5	d_6	d_7	14

e estamos prontos para prosseguir para o próximo passo. $\square$

Evidentemente as condições (a)–(e) do Teorema 4.2 foram designadas tendo em vista o cálculo efetivo dos invariantes $c_i(U_r)$ e $d_i(\phi_r)$ oriundos das secantes $\mathrm{Sec}_r\, C \subset \mathbb{P}^{2r}$. Deixamos registrado que se nossa conjectura vale, então o algoritmo no Teorema 4.2 de fato produz esses invariantes.

Proposição 4.4. *Se vale a Conjectura 4.1, então $c_i(U_r) = c_i(r)$ e $d_i(\phi_r) = d_i(r)$ para todo $i, r \geq 0$.*

Demonstração. Pela unicidade, basta mostrar que as sequências $(c_i(U_r))$ e $(d_i(\phi_r))$ satisfazem as hipóteses (a)–(e) do Teorema 4.2, o que faremos a seguir.

Como $\mathrm{Sec}_r\, C \subset \mathbb{P}^{2r}$, é claro que $d_i(\phi_r) = 0$ sempre que $i > 2r$, cumprindo (a); a condição (b) vem do Corolário 3.9; assumir a Conjectura 4.1 é exatamente afirmar que (c) e (d) valem; por fim, a condição (e) vem das relações (4.3) de Aluffi entre os graus projetivos do mapa gradiente e os coeficientes da classe c_{SM} do complementar da hipersuperfície. □

Observação 4.5. Nas condições (c) e (d) do Teorema 4.2 exigimos que $c_i(r)$ e $d_i(r)$ sejam polinomiais em r para cada i fixado. E por (e) estas sequências estão relacionadas por uma matriz invertível. É natural perguntar: não bastaria exigir que apenas uma delas seja polinomial e deduzir que a outra também o seja como consequência de (e)?

A resposta é não. Para um exemplo, tome $d_i(r) = r^i$. Fixado i, a sequência $c_i(r)$ obtida via as equações (4.9) é exponencial em r, já para $i = 0$:

$$c_0(r) = \sum_{j=0}^{2r} (-1)^j \binom{2r-j}{0} r^j = r^{2r} - r^{2r-1} + \cdots - r + 1. \qquad \square$$

Executando o algoritmo calculamos tantos valores para as sequências quanto desejarmos. Os números produzidos, *per si*, não dizem muita coisa. Em outras palavras, gostaríamos de responder: existem *fórmulas* que codificam os resultados do algoritmo? A resposta é afirmativa, como veremos no Teorema 4.9. O caminho não é curto, mas tem surpresas agradáveis.

4.3 Funções geradoras

> *In combinatorics it is a standard procedure to associate with a sequence of numbers $a_0, a_1, a_2, \ldots$ the generating function $\sum a_i t^i$.*
>
> H. Matsumura, Commutative ring theory.

> *A generating function is a device somewhat similar to a bag. Instead of carrying many little objects detachedly, which could be embarrassing, we put them all in a bag, and then we have only one object to carry, the bag.*
>
> George Pólya, Mathematics and plausible reasoning.

Em toda esta seção denotaremos por $(c_i(r))$ e $(d_i(r))$ as sequências produzidas pelo algoritmo descrito no Teorema 4.2.

Os resultados para $r \leq 7$ encontram-se no Apêndice, Seção B.2.1. Reproduzimos os valores de $d_i(r)$ na Tabela 4.2. Cabe notar que estes resultados coincidem com os graus projetivos $d_i(\phi_r)$ que fomos capazes de calcular diretamente via Macaulay2, a saber $r \leq 5$, ou seja, até $\mathbb{P}^{10}$. Para $r \geq 6$ os valores apresentados são conjecturais. Nosso objetivo é encontrar fórmulas para $c_i(r)$ e $d_i(r)$.

r	d_0	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}	d_{14}
0	1														
1	1	1	1												
2	1	2	4	4	2										
3	1	3	9	17	21	15	5								
4	1	4	16	44	86	116	104	56	14						
5	1	5	25	90	240	472	680	700	490	210	42				
6	1	6	36	160	540	1392	2752	4152	4710	3900	2232	792	132		
7	1	7	49	259	1057	3367	8449	16753	26173	31899	29757	20559	9933	3003	429

Tabela 4.2: Graus projetivos (via Conjectura 4.1 para $r \geq 6$) do mapa $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$.

Nossa estratégia consiste em buscar a função geradora para cada função $d_i(r)$, ou seja, para cada uma das colunas da Tabela 4.2. Concretamente, fixado $i \geq 0$, consideramos a série formal

$$p_i(x) := \sum_{r=0}^{\infty} d_i(r)x^r = d_i(0) + d_i(1)x + d_i(2)x^2 + \cdots \qquad \in \mathbb{Z}[[x]].$$

Por exemplo, $p_3(x) = 4x^2 + 17x^3 + 44x^4 + 90x^5 + 160x^6 + \cdots$. Geometricamente, a interpretação é que se a Conjectura 4.1 é válida, então $p_i(x)$ enumera os i-ésimos graus projetivos de ϕ_r, obtidos tomando a restrição a um $\mathbb{P}^i$ geral em $\mathbb{P}^{2r}$ com i fixado, deixando r variar.

Quando $d_i(r)$ é polinomial em r de grau $\leq i$, a sua função geradora admite uma representação por uma função racional da forma $P(x)/(1-x)^{i+1}$, onde $P(x)$ é um polinômio de grau $\leq i$. Isto é padrão e apresentamos uma prova sucinta no Lema A.1. A partir daí fica fácil obter fórmulas para as funções geradoras.

Exemplo 4.6. Considere o polinômio $d_3(r) = \frac{1}{6}r(r-1)(5r+2)$ obtido no Exemplo 4.3. Sua função geradora é $p_3(x) = 4x^2 + 17x^3 + 44x^4 + \cdots$, que pode então ser escrita como

$$p_3(x) = P(x)/(1-x)^4$$

com $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$. Expandindo a igualdade $(1-x)^4 p_3(x) = P(x)$:

$$(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4)(4x^2 + 17x^3 + \cdots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

deduzimos $a_0 = a_1 = 0, a_2 = 4$ e $a_3 = 1$. Portanto,

$$p_3(x) = \frac{x^2}{(1-x)^4} \cdot (x+4)$$

Esta é a função racional que aparece na Tabela 4.3 abaixo. □

Listamos algumas das funções polinomiais $d_i(r)$ produzidas pelo Algoritmo 4.2 na primeira coluna da Tabela 4.3. Na segunda coluna aparecem as funções racionais associadas. A inusitada fatoração se justifica: primeiro, das considerações acima, segue-se que $(1-x)^{i+1}p_i(x)$ é um polinômio, de grau $\leq i$; mais ainda, $x^{[(i+1)/2]}$ divide este polinômio, uma vez que $d_i(r) = 0$ sempre que $i \geq 2r + 1$, pela condição (a) do Teorema 4.2. Logo, para todo $i \geq 0$, temos que

$$q_i(x) := \frac{(1-x)^{i+1} p_i(x)}{x^{[(i+1)/2]}} \tag{4.12}$$

é um polinômio. Seu grau é $\leq [i/2]$, uma vez que $i = [i/2] + [(i+1)/2]$. Na Tabela 4.3, estes são os polinômios que aparecem à direita. Por exemplo, $q_4(x) = x^2 + 11x + 2$.

i	$d_i(r)$	$p_i(x)$
0	1	$\frac{1}{(1-x)} \cdot 1$
1	r	$\frac{x}{(1-x)^2} \cdot 1$
2	r^2	$\frac{x}{(1-x)^3} \cdot (1x + 1)$
3	$\frac{1}{6} r(r-1)(5r+2)$	$\frac{x^2}{(1-x)^4} \cdot (1x + 4)$
4	$\frac{1}{12} r(r-1)(7r^2 - 5r - 6)$	$\frac{x^2}{(1-x)^5} \cdot (1x^2 + 11x + 2)$
5	$\frac{1}{60} r(r-1)(r-2)(21r^2 - 7r - 18)$	$\frac{x^3}{(1-x)^6} \cdot (1x^2 + 26x + 15)$
6	$\frac{1}{60} r(r-1)(r-2)(11r^3 - 27r^2 - 8r + 20)$	$\frac{x^3}{(1-x)^7} \cdot (1x^3 + 57x^2 + 69x + 5)$

Tabela 4.3: Funções geradoras $p_i(x) = \sum_r d_i(r) x^r$ e os polinômios $q_i(x)$.

Um cidadão sensato perguntaria pelo motivo de toda essa ginástica.

4.3.1 Conexões inesperadas

Calculamos os polinômios $q_n(x)$ para diversos valores de n. Observamos então que os seus coeficientes formam uma sequência bem conhecida em combinatória, a saber *o número de caminhos de Dyck de semicomprimento n com k subidas longas*, a qual denotaremos por $T(n, k)$. Isto não era esperado. Você está convidado a comparar os primeiros termos desta sequência, exibidas na Tabela 4.4, com os coeficientes dos polinômios $q_n(x)$ que obtivemos na Tabela 4.3. A coincidência persiste para todo $n \leq 20$.

Para outras informações sobre a sequência $T(n, k)$ (referências, outras identidades e interpretações do ponto de vista da combinatória) recomendamos [Slo20, A091156], no famoso *On-Line Encyclopaedia of Integer Sequences*. Indicamos também [STT06]. Apresentemos uma fórmula: tem-se $T(n, 0) = 1$ e

$$T(n,k) = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k} \sum_{j=2k}^{n} \binom{j-k-1}{k-1}\binom{n+1-k}{n-j} \tag{4.13}$$

para $0 \leq n$ e $0 < k \leq [n/2]$.

Há uma outra conexão inesperada, mais interessante. K. Gedeon em um artigo recente ([Ged17]) mostrou que os termos da sequência $T(n, k)$ também aparecem como coeficientes de outros polinômios, a saber os polinômios de *Kazhdan-Lusztig* de (matróides associados a) grafos completos tripartidos $K_{1,1,n}$. Traduzindo para o nosso contexto, se $P_{M_n}(x)$ são os polinômios obtidos por Gedeon, estes *deveriam* coincidir com os nossos polinômios $q_n(x)$,

$n \diagdown k$	0	1	2	3
0	1			
1	1			
2	1	1		
3	1	4		
4	1	11	2	
5	1	26	15	
6	1	57	69	5

Tabela 4.4: Termos iniciais da sequência $T(n,k)$.

desde que tomemos o cuidado de inverter a ordem dos coeficientes; ou seja, deveríamos ter

$$P_{M_n}(x) = x^{[n/2]} q_n(1/x). \tag{4.14}$$

Enfatizamos que até aqui esta igualdade foi verificada apenas para pequenos valores de n, mas é tentador imaginar que isso ocorra sempre. Seguirá do Teorema 4.9 que isso de fato acontece! Tal coincidência pede por uma explicação conceitual (de algum modo há uma conexão entre secantes de curvas racionais normais e grafos completos tripartidos) mas no momento não temos nenhuma para oferecer.

Em resumo, nosso objetivo é *demonstrar* que os coeficientes dos polinômios $q_n(x)$ em (4.12), produzidos pelo algoritmo do Teorema 4.2, são dados pela sequência $T(n,k)$ para todo $n \geq 0$.

4.3.2 Função geradora para a sequência $(d_i(r))$

Reformulamos o problema de maneira adequada. Consideramos a função geradora, agora em duas variáveis,

$$g(x,y) := \sum_{i,r\geq 0} d_i(r) x^r y^i = \sum_{i\geq 0} p_i(x) y^i \qquad \in \mathbb{Z}[[x,y]] \tag{4.15}$$

para a sequência $(d_i(r))$ produzida pelo algoritmo do Teorema 4.2.

Nossa estratégia: uma fórmula para a função geradora da sequência $T(n,k)$ é conhecida; somos levados a uma expressão-candidata para $g(x,y)$; mostramos que nosso candidato funciona.

Mãos à obra. Seja

$$w(t,u) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{[n/2]} T(n,k) t^k u^n.$$

a função geradora da sequência $T(n,k)$. Então de [Wang11, p. 9] (veja também [STT06, Section 1])

$$\begin{aligned} w(t,u) &= \frac{1-\sqrt{1-4u(1-u+ut)}}{2u(1-u+ut)} \qquad (4.16)\\ &= 1 + u + (1+t)u^2 + (1+4t)u^3 + (1+11t+2t^2)u^4 + (1+26t+15t^2)u^5 + \cdots \end{aligned}$$

Repare que os coeficientes dos u's são os mesmos que aparecem nos numeradores do lado direto da Tabela 4.3, exceto pelo grau e pela ordem, que está invertida. Precisamos portanto ajustá-los. Mediante a mudança de variáveis $t \mapsto 1/x,\ u \mapsto xy$ obtemos

$$\begin{aligned} w(1/x, xy) &= \frac{1-\sqrt{1-4xy(1+y(1-x))}}{2xy(1+y(1-x))} \\ &= 1 + xy + x(x+1)y^2 + x^2(x+4)y^3 + x^2(x^2+11x+2)y^4 \\ &\qquad\qquad + x^3(x^2+26x+15)y^5 + \cdots . \end{aligned}$$

Perfazendo $y \mapsto y/(1-x)$ e multiplicando por $1/(1-x)$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x}\,w\Big(\frac{1}{x}, \frac{xy}{1-x}\Big) = \frac{1}{1-x} + \frac{x}{(1-x)^2}y + \frac{x(x+1)}{(1-x)^3}y^2 + \frac{x^2(x+4)}{(1-x)^4}y^3 \\ + \frac{x^2(x^2+11x+2)}{(1-x)^5}y^4 + \cdots \end{aligned}$$

ou seja, os coeficientes de y^i são as expressões do lado direito da Tabela 4.3. Em outras palavras, *conjecturalmente*,

$$\frac{1}{1-x}\,w\Big(\frac{1}{x}, \frac{xy}{1-x}\Big) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(x)y^i = g(x,y).$$

Substituindo em (4.16) e simplificando, o resumo do que fizemos é: demonstrar que os coeficientes dos polinômios $q_n(x)$ em (4.12) são dados pela sequência $T(n,k)$ é *equivalente* a demonstrar que

$$g(x,y) = \frac{1-\sqrt{1-\dfrac{4xy(1+y)}{1-x}}}{2xy(1+y)} \quad . \tag{4.17}$$

Expandimos a expressão (4.17) em série de potências. Não é difícil. Começamos com a bem conhecida expansão da função geradora dos números de Catalan

$$\frac{1}{2z}(1-\sqrt{1-4z}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_k z^k \quad .$$

Substituindo $z \mapsto xy(1+y)/(1-x)$ e dividindo por $1-x$, obtemos (4.17); portanto demonstrar (4.17) é equivalente a mostrar que

$$g(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}_k x^k y^k (1+y)^k}{(1-x)^{k+1}} \quad .$$

Das identidades

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{r=k}^{\infty} \binom{r}{k} x^{r-k} \qquad \text{e} \qquad (1+y)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} y^{\ell}$$

o que queremos provar é

$$g(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=k}^{\infty}\sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell}\binom{r}{k} \mathcal{C}_k\, x^r y^{k+\ell} \quad .$$

Recorde que $d_j(r)$ é o coeficiente de $x^r y^j$ em $g(x,y)$ e que convencionamos $\binom{a}{b} = 0$ sempre que $b < 0$ ou $a < b$. Lendo o coeficiente correspondente, (isto é, fazendo $k + \ell = j$), concluímos que (4.17) é equivalente a

$$d_j(r) = \sum_{k=0}^{j} \binom{k}{j-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k \tag{4.18}$$

o que demonstraremos no Teorema 4.9 que de fato vale! Entretanto ainda temos mais uma etapa a percorrer.

4.3.3 Função geradora para a sequência $(c_i(r))$

Consideramos agora a função geradora

$$f(x,y) := \sum_{i,r \geq 0} c_i(r) x^r y^i \qquad \in \mathbb{Z}[[x,y]]$$

associada à sequência $(c_i(r))$ produzida pelo algoritmo no Teorema 4.2. Como as sequências $(c_i(r))$ e $(d_i(r))$ estão conectadas pelas relações lineares (4.9), que são invertíveis, podemos obter a função geradora $f(x,y)$ a partir de $g(x,y)$ e vice-versa. A manipulação é elementar:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_r \sum_i c_i(r) x^r y^i \\ &= \sum_r \sum_i \sum_j (-1)^j \tbinom{2r-j}{i} d_j(r) x^r y^i \\ &= \sum_r \sum_j (-1)^j d_j(r) \left[\sum_i \tbinom{2r-j}{i} y^i \right] x^r \\ &= \sum_r \sum_j d_j(r) (-1)^j (1+y)^{2r-j} x^r. \end{aligned}$$

Faça $u = -1 - y$, $X = u^2 x$ e $Y = u^{-1}$. Então:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_r \sum_j d_j(r) u^{2r-j} x^r \\ &= \sum_r \sum_j d_j(r) (u^2 x)^r u^{-j} \\ &= \sum_r \sum_j d_j(r) X^r Y^j \\ &= g(X,Y) \end{aligned}$$

Assim a relação procurada entre as funções geradoras é

$$f(x,y) = g(x(1+y)^2, -(1+y)^{-1}). \tag{4.19}$$

Havíamos obtido uma expressão conjectural para $g(x,y)$ em (4.17); perfazendo a substituição em (4.19) e simplificando, vem que a fórmula para a função geradora $g(x,y)$ em (4.17) é válida *se, e somente se,*

$$f(x,y) = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{-4xy}{1-x(1+y)^2}}}{-2xy} \quad . \tag{4.20}$$

Recorde que $c_i(r)$ é o coeficiente de $x^r y^i$ em $f(x, y)$. Expandindo como na passagem de (4.17) para (4.18), deduzimos que assumir a igualdade em (4.20) é equivalente a afirmar

$$c_i(r) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{2r-2k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k. \tag{4.21}$$

Observação 4.7. Para uso futuro, destacamos uma consequência importante do malabarismo que acabamos de realizar: se $d_i(r) = \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k$ (ou seja, se vale (4.18)), então decorre das relações (4.9) que $c_i(r)$ é dado pela fórmula em (4.21). □

4.3.4 Resumo

Listamos as fórmulas, todas equivalentes entre si, que obtivemos até aqui.

Proposição 4.8. *Mantenha a notação desta seção. São equivalentes:*

(i) *Para todo $n \geq 0$, os coeficientes dos polinômios $q_n(x)$ são dados pelos termos da sequência $T(n, k)$.*

(ii) $g(x, y) = \left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{4xy(1+y)}{1-x}}\right)(2xy(1+y))^{-1}$.

(iii) $d_i(r) = \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k$.

(iv) $f(x, y) = \left(1 - \sqrt{1 - \frac{-4xy}{1-x(1+y)^2}}\right)(-2xy)^{-1}$.

(v) $c_i(r) = \sum_{k=0}^{i} (-1)^k \binom{2r-2k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k$. □

4.4 Fórmulas

Estamos prontos para a conclusão desta aventura. Vamos provar que as fórmulas apresentadas na Proposição 4.8 são válidas. De fato, visando explicitar uma consequência importante da Conjectura 4.1, a saber, a positividade dos coeficientes das classes de Schwartz-MacPherson $c_{\mathrm{SM}}(\mathrm{Sec}_r\, C) \in A_*\mathbb{P}^{2r}$ (Corolário 4.12), faremos um esforço extra e apresentaremos uma fórmula ainda mais simples para as funções $c_i(r)$.

Recorde nossa notação $\mathcal{C}_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ para os números de Catalan. O teorema a seguir é o resultado principal deste capítulo.

Teorema 4.9. *As sequências $(c_i(r))$ e $(d_i(r))$ produzidas pelo algoritmo no Teorema 4.2 são dadas pelas fórmulas*

$$c_i(r) = \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]} \tag{4.22}$$

e

$$d_i(r) = \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k. \tag{4.23}$$

Demonstração. Tendo em vista a unicidade, nos é suficiente mostrar que estas sequências satisfazem as condições (a)-(e) do Teorema 4.2. Para (a), observe que:

- se $k > r$, então $\binom{r}{k} = 0$; e
- se $i \geq 2r+1$ e $0 \leq k \leq r$, então $\binom{k}{i-k} = 0$.

Portanto $d_i(r) = 0$ sempre que $i \geq 2r+1$, como desejado. E para $i = 2r$, um argumento análogo nos fornece $d_{2r}(r) = \mathcal{C}_r$, como exigido em (b). É evidente que ambas as funções em (4.22) e (4.23) são polinomiais em r, de grau exatamente i (para $c_i(r)$, repare que $[i/2] + [(i+1)/2] = i$), contemplando as condições (c) e (d).

Resta a condição (e), a mais delicada: provar que as fórmulas em (4.22) e (4.23) estão conectadas pelas relações (4.9). Da nossa oportuna Observação 4.7 vem que devemos então provar que

$$\sum_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{2r-2k}{i-k} \binom{r}{k} \mathcal{C}_k = \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}.$$

Isto não é fácil, requer bastante trabalho. Nossa ideia é verificar que as funções geradoras associadas são iguais, o que demonstramos no Lema A.3. □

4.4.1 Relações recursivas

Proposição 4.10. *A função geradora $g(x,y) = \sum_{i,r\geq 0} d_i(r) x^r y^i$ satisfaz*

$$xy(1+y)g(x,y)^2 - g(x,y) + \frac{1}{1-x} = 0 \qquad . \tag{4.24}$$

Valem as relações recursivas

$$d_i(r) = \sum_{\substack{a+u=i-1\\ b+v=r-1}} d_a(b)d_u(v) + \sum_{\substack{a+u=i-2\\ b+v=r-1}} d_a(b)d_u(v) \qquad (i, r \geq 1,\ \ a, b, u, v \geq 0) \tag{4.25}$$

com condições iniciais $d_0(r) = 1$ para $r \geq 0$ e $d_i(0) = 0$ para $i \geq 1$.

Demonstração. A equação (4.24) segue diretamente de (4.17) (Bhaskara...). Para as relações recursivas, basta substituir $g(x,y) = \sum d_i(r)x^r y^i$ em (4.24), expandir e comparar os respectivos coeficientes. □

Repare que as relações (4.25) e as condições iniciais indicadas determinam completamente a sequência $(d_i(r))$. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
d_1(r) &= \sum_{b+v=r-1} d_0(b)d_0(v) = \sum_{j=0}^{r-1} 1 = r,\\
d_2(r) &= 2\sum_{b+v=r-1} d_0(b)d_1(v) + \sum_{b+v=r-1} d_0(b)d_0(v) = 2\sum_{j=0}^{r-1} j \ + \ r = r^2,\\
d_3(2) &= 2\cdot\big(d_0(0)d_2(1) + d_1(0)d_1(1) + d_0(1)d_2(0) + d_0(0)d_1(1) + d_0(1)d_1(0)\big)\\
&= 2\cdot(1\cdot 1 \qquad + 0\cdot 1 \qquad + 1\cdot 0 \qquad + 1\cdot 1 \qquad + 1\cdot 0)\\
&= 4
\end{aligned}$$

e assim por diante.

4.5 Conclusão

Como vimos no decorrer das construções deste capítulo, a Conjectura 4.1 pode ser reformulada de várias maneiras equivalentes. Para referência colecionamos todas elas a seguir, em uma lista que resume todo o trabalho realizado neste capítulo.

Teorema 4.11. *Sejam $d_i(\phi_r)$ o i-ésimo grau projetivo do mapa gradiente $\phi_r\colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ e $c_i(U_r)$ o coeficiente de $[\mathbb{P}^i]$ na classe de Schwartz-MacPherson do aberto $U_r = \mathbb{P}^{2r} \setminus \mathrm{Sec}_r\, C$, como descritos no início deste capítulo. São equivalentes:*

(a) *Vale a Conjectura 4.1: fixado $i \geq 0$, as funções $c_i(U_r)$ e $d_i(\phi_r)$ são polinomiais em r, de grau $\leq i$.*

(b) *Vale a expressão (4.22) no Teorema 4.9:*

$$c_i(U_r) = \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}.$$

(c) *Vale a expressão (4.23) no Teorema 4.9:*

$$d_i(\phi_r) = \sum_{k=0}^{i} \frac{1}{k+1}\binom{k}{i-k}\binom{r}{k}\binom{2k}{k}.$$

(d) *A função geradora dos $c_i(U_r)$ é:*

$$\sum_{i,r\geq 0} c_i(U_r)x^r y^i = \frac{-1+\sqrt{1+\frac{4xy}{1-x(1+y)^2}}}{2xy}.$$

(e) *A função geradora dos $d_i(\phi_r)$ é:*

$$\sum_{i,r\geq 0} d_i(\phi_r)x^r y^i = \frac{1-\sqrt{1-\frac{4xy(1+y)}{1-x}}}{2xy(1+y)}.$$

(f) *Para todo $n \geq 0$, os coeficientes dos polinômios $q_n(x)$ em (4.12) são dados pelos termos da sequência $T(n,k)$ em (4.13), ou seja,*

$$\sum_{r=0}^{\infty} d_n(\phi_r)x^r = \frac{1}{(1-x)^{n+1}} \cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} T(n,k)x^{n-k}.$$

Em particular, vale a identidade $P_{M_n}(x) = x^{[n/2]}q_n(1/x)$, onde $P_{M_n}(x)$ são os polinômios de Kazhdan-Lusztig de grafos completos tripartidos $K(1,1,n)$ obtidos em [Ged17].

Demonstração. Consequência direta da Proposição 4.4, das fórmulas apresentadas na Proposição 4.8 e do Teorema 4.9. □

Para variedades determinantais genéricas, uma conjectura de X.Zhang ([Zha18, §7.6]) afirma que os coeficientes da classe $c_{\mathrm{SM}}(M_k(m,n)) \in A_*\mathbb{P}^{mn-1}$ são todos não-negativos. Veremos a seguir que nossa conjectura tem como consequência uma propriedade de positividade similar.

Corolário 4.12. *Assumindo a Conjectura 4.1:*

(a) (Simetria) *Os coeficientes* $c_i(U_r)$ *são* simétricos*, isto é,* $c_i(U_r) = c_{2r-i}(U_r)$.

(b) (Positividade) *Seja* $\sum_i c_{\mathrm{SM}i}(\mathrm{Sec}_r C)[\mathbb{P}^i] \in A_*\mathbb{P}^{2r}$ *a classe de Schwartz-MacPherson da hipersuperfície* $\mathrm{Sec}_r C$*. Então*

$$c_i(U_r) > 0 \qquad e \qquad c_{\mathrm{SM}i}(\mathrm{Sec}_r C) > 0$$

para todo $r \geq 1$ *e* $i = 0, \ldots, 2r$.

Demonstração. Da expressão em (b) no Teorema 4.11 decorrem a simetria e a positividade dos coeficientes $c_i(U_r)$. Provemos agora as desigualdades $c_{\mathrm{SM}i}(\mathrm{Sec}_r C) > 0$: usando a inclusão-exclusão para a classe de Schwartz-MacPherson, temos que $c_{\mathrm{SM}}(\mathrm{Sec}_r C) = c_{\mathrm{SM}}(\mathbb{P}^{2r}) - c_{\mathrm{SM}}(U_r)$. Como

$$c_{\mathrm{SM}}(\mathbb{P}^{2r}) = c(T\mathbb{P}^{2r}) \cap [\mathbb{P}^{2r}] = (1+h)^{2r+1} = \sum_{i=0}^{2r} \tbinom{2r+1}{2r-i} [\mathbb{P}^i] \in A_*\mathbb{P}^{2r}$$

basta verificar que para $0 \leq i \leq 2r$ tem-se

$$\binom{2r+1}{2r-i} - \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]} > 0$$

que é elementar, e pode ser encontrada no singelo Lema A.2. □

Agora mostramos como as fórmulas obtidas no Teorema 4.9 nos levam a uma maneira mais simples e elegante de reformular a Conjectura 4.1. De maneira breve, basta pedir que $d_i(\phi_r)$ seja polinomial em r, sem condições sobre seu grau; e inspirados pelo Corolário 4.12, trocamos a exigência de que $c_i(U_r)$ seja polinomial por uma condição de simetria nos coeficientes, para cada r fixado. Poderíamos ter incluído esta reformulação na lista do Teorema 4.11, mas preferimos destacá-la em um resultado a parte.

Proposição 4.13. *Vale a Conjectura 4.1 se e somente se as seguintes condições são válidas:*

(a') $c_i(U_r) = c_{2r-i}(U_r)$ *para todo* $i = 0, \ldots, 2r$.

(b') *Para cada* $i \geq 0$ *fixado,* $d_i(\phi_r)$ *é uma função polinomial em* r.

Demonstração. Assumindo a Conjectura 4.1, temos que (b') é imediata; e a condição (a') segue da fórmula para $c_i(U_r)$ no item (c) da lista de equivalências do Teorema 4.11. Para a recíproca:

Afirmação. *Se vale (b'), então* $\deg(d_i(\phi_r)) \leq i$ *para todo* i *(ou seja, vale a condição (b) da Conjectura 4.1).*

De fato, é uma consequência do teorema do índice de Hodge que a sequência de graus projetivos de um mapa racional $\mathbb{P}^m \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ qualquer satisfaz duas propriedades ([Huh12, Theorem 21], [Laz04, Section 1.6], [Tei79]):

(i) é *log-côncava*, o que significa $d_{i-1}(\phi_r)d_{i+1}(\phi_r) \leq d_i(\phi_r)^2 \quad$ para $i = 1, \ldots, 2r-1$.

(ii) não possui *zeros internos*.

Recorde que o último grau projetivo $d_{2r}(\phi_r)$ é não-nulo (Corolário 3.6) e como $d_0(\phi_r) = 1$ segue de (ii) que todos os outros graus projetivos também são não-nulos; temos daí por (i) uma cadeia de desigualdades

$$\frac{d_0(\phi_r)}{d_1(\phi_r)} \leq \frac{d_1(\phi_r)}{d_2(\phi_r)} \leq \frac{d_2(\phi_r)}{d_3(\phi_r)} \leq \cdots \leq \frac{d_{2r-1}(\phi_r)}{d_{2r}(\phi_r)}.$$

Como $d_0(\phi_r) = 1$ e $d_1(\phi_r) = r$ temos indutivamente que $d_i(\phi_r) \leq d_1(\phi_r)^i = r^i$, o que demonstra nossa afirmação.

Agora segue das relações (4.3) de Aluffi que

$$c_{2r-i}(U_r) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{2r-j}{i-j} d_j(\phi_r)$$

que é portanto, pela nossa afirmação, polinomial em r de grau $\leq i - j + j = i$. Daí a parte (a) da Conjectura 4.1 segue imediatamente da nossa condição de simetria (a'), o que termina a demonstração. □

4.5.1 Evidências

Para finalizar, apresentamos algumas evidências que apontam para a validade da Conjectura 4.1. Para $r \geq 1$ fixado:

1. Na Proposição 3.12 calculamos os graus projetivos $d_i(\phi_r)$, para $i = 0, 1, 2, 3, 4$ e as expressões coincidem com as respectivas fórmulas obtidas no item (b) do Teorema 4.11.

2. Os resultados obtidos computacionalmente via Macaulay2 para $r \leq 5$ (veja B.1.1 no Apêndice) coincidem com os valores obtidos a partir das expressões no Teorema 4.11.

3. Como $\chi_{\text{top}}(\text{Sec}_r\, C) = 2r$ (Teorema 2.13), que como sabemos é o grau da classe $c_{\text{SM}}(U_r)$, tem-se
$$c_0(U_r) = \chi_{\text{top}}(\mathbb{P}^{2r} \setminus \text{Sec}_r\, C) = 1$$
em acordo com a fórmula no item (c) do Teorema 4.11.

4. No Corolário 3.11 calculamos a característica de Euler de uma seção hiperplana genérica de $\text{Sec}_r\, C \subset \mathbb{P}^{2r}$ e, usando o princípio de inclusão-exclusão, obtemos
$$\chi_{\text{top}}(U_r \cap H) = 1 - \mathcal{C}_r.$$
Se vale a Conjectura 4.1, então os números $c_i(r)$ da fórmula (4.22) fornecem os coeficientes da classe $c_{\text{SM}}(U_r)$, como vimos no Teorema 4.11. Decorre então Observação 1.26 que a soma alternada de $c_1(r), \ldots, c_{2r}(r)$ deveria ser igual a $\chi_{\text{top}}(U_r \cap H)$; e como $c_0(r) = 1$, *deveríamos* ter
$$c_0(r) - c_1(r) + c_2(r) - \cdots - c_{2r-1}(r) + c_{2r}(r) = \mathcal{C}_r$$

ou seja,

$$\sum_{i=0}^{2r}(-1)^i\binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}=\mathcal{C}_r.$$

E de fato esta identidade é verdadeira:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2r}(-1)^i\binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}&=\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}^2-\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}\binom{r}{i+1}\\&=\binom{2r}{r}-\binom{2r}{r-1}\\&=\frac{1}{r+1}\binom{2r}{r},\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade é obtida por indução.

Apêndice A

Combinatória

A.1 Funções racionais

Dada uma função polinomial $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ de grau $\leq d$, então a sua função geradora

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n \qquad \in \mathbb{C}[[x]]$$

admite uma representação racional $F = P(x)/Q(x)$, onde P, Q são polinômios. Isto é bem conhecido (uma boa referência é [Stan12]) e apresentamos aqui uma demonstração curta. É conveniente considerar a base $P_i(x) = \binom{x+i}{i} (i = 0, 1, 2, \dots)$ do $\mathbb{C}$-espaço vetorial $\mathbb{C}[x]$.

Lema A.1. *Mantenha a notação acima. Então $F = P(x)/(1-x)^{d+1}$ onde $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ é um polinômio de grau $\leq d$. Mais precisamente, se $f(x) = b_0P_0(x) + \cdots + b_dP_d(x)$, então*

$$F = \frac{b_0}{1-x} + \frac{b_1}{(1-x)^2} + \cdots + \frac{b_d}{(1-x)^{d+1}} \qquad .$$

Demonstração. Para $k \geq 0$, considere a identidade

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n)\, x^n$$

(basta tomar a k-ésima derivada de $(1-x)^{-1}$). Daí

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\, x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{d} b_k P_k(n)\, x^n = \sum_{k=0}^{d} b_k \sum_{n=0}^{\infty} P_k(n)\, x^n = \sum_{k=0}^{d} \frac{b_k}{(1-x)^{k+1}}.$$

□

A.2 Identidades binomiais

Lema A.2. *Seja $r \geq 1$ e suponha $0 \leq i \leq 2r$. Então:*

$$\binom{2r+1}{2r-i} > \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]} \binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}.$$

Demonstração. Se $i = 2r$, não há nada a fazer. Suponha portanto $0 \le i < 2r$. Daí, como

$$\binom{2r+1}{2r-i} = \binom{2r+1}{i+1} = \frac{2r+1}{i+1}\binom{2r}{i} > \binom{2r}{i},$$

é suficiente mostrar que

$$\binom{2r}{i} \ge \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}.$$

E isto se segue observando-se que $[i/2] + [(i+1)/2] = i$ e do fato geral de que para quaisquer a, b com $0 \le a, b \le r$ tem-se

$$\binom{2r}{a+b} \ge \binom{r}{a}\binom{r}{b}$$

obtida comparando-se os coeficientes de x^{a+b} na expansão de $(1+x)^{2r}$ e de $((1+x)^r)^2$. $\square$

Lema A.3. *Sejam $\mathcal{C}_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$ os números de Catalan. Então, para quaisquer $i, r \ge 0$,*

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{2r-2k}{i-k}\binom{r}{k}\mathcal{C}_k = \binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}.$$

Demonstração. Nossa prova consiste em mostrar que estas duas sequências possuem a mesma função geradora, isto é, que as séries

$$f(x,y) := \sum_{i,r\ge 0}\left[\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{2r-2k}{i-k}\binom{r}{k}\mathcal{C}_k\right]x^r y^i \quad \text{e} \quad h(x,y) := \sum_{i,r\ge 0}\binom{r}{\left[\frac{i}{2}\right]}\binom{r}{\left[\frac{i+1}{2}\right]}x^r y^i$$

de fato coincidem. Uma vez que já calculamos $f(x,y)$ (compare as fórmulas (4.20) e (4.21)), a saber

$$f(x,y) = \frac{1-\sqrt{1-\frac{-4xy}{1-x(1+y)^2}}}{-2xy} \tag{A.1}$$

passamos ao cálculo de $h(x,y)$.

Visando simplificar os binômios envolvidos e tornar o problema mais acessível, dividimos a série $h(x,y)$ em duas, de acordo com a paridade dos expoentes em y. Definimos

$$h_1(x,z) := \sum_{r,a=0}^{\infty}\binom{r}{a}^2 x^r z^a \quad \text{e} \quad h_2(x,z) := \sum_{\substack{r=0\\a=1}}^{\infty}\binom{r}{a-1}\binom{r}{a}x^r z^a$$

Fazendo $z = y^2$, obtemos $h(x,y) = h_1(x,y^2) + y^{-1}h_2(x,y^2)$.

A segunda série está relacionada aos célebres *números de Narayana*:

$$N_{r,a} = \frac{1}{r}\binom{r}{a-1}\binom{r}{a} = \frac{1}{a}\binom{r-1}{a-1}\binom{r-1}{a}, \qquad r \ge 1,\ a = 1,\dots,r.$$

Tome $N(x,z) = \sum_{r,a=1}^{\infty} N_{r,a}x^r z^a$ a função geradora associada. Levando em consideração que $rN_{r,a} = \binom{r}{a-1}\binom{r}{a}$, obtemos

$$h_2(x,z) = \sum_{\substack{r=1\\a=1}}^{\infty} rN_{r,a}x^r z^a = x\frac{\partial N}{\partial x}(x,z)$$

o que nos conduz a

$$h(x,y) = h_1(x,y^2) + \frac{x}{y}\frac{\partial N}{\partial x}(x,y^2). \tag{A.2}$$

Felizmente as funções geradoras para as séries do lado direito são conhecidas! Para a primeira ([Slo20, A008459]):

$$h_1(x,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2z^2 - 2(x^2+x)z + x^2 - 2x + 1}}$$

e para os números de Narayana, ([Wang11] ou [Slo20, A001263]):

$$N(x,z) = \frac{1 - x(1+z) - \sqrt{(1-x(1+z))^2 - 4x^2z}}{2x}.$$

Substituindo em (A.2) e após uma longa sessão de simplificações, obtemos

$$h(x,y) = \frac{1 - x(1+y)^2 - \sqrt{(1-x(1+y)^2)(1-x(1-y)^2)}}{-2xy(1-x(1+y)^2)}.$$

Desenvolvendo a fórmula para $f(x,y)$ em (A.1), verifica-se que ela coincide com a expressão para $h(x,y)$ que acabamos de encontrar, o que conclui a demonstração. $\square$

Apêndice B

Códigos

Apresentamos aqui códigos para alguns dos cálculos necessários na preparação do texto. Utilizamos o programa Macaulay2 [M2], versão 1.15. Os códigos podem ser executados online, basta acessar o endereço `web.macaulay2.com` e copiar e colar.

B.1 Códigos auxiliares

B.1.1 Graus projetivos e classe c_{SM} para $r \leq 5$

Seja $\operatorname{Sec}_r C \subset \mathbb{P}^{2r}$ a secante de r pontos da curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^{2r}$. Tome $\phi_r \colon \mathbb{P}^{2r} \dashrightarrow \mathbb{P}^{2r}$ o mapa gradiente associado a esta hipersuperfície. Apresentamos o código para calcular os graus projetivos destes mapas e, usando as relações de Aluffi (4.1), a classe c_{SM} do aberto $U_r = \mathbb{P}^{2r} \setminus \operatorname{Sec}_r C$. Para o cálculo dos graus projetivos há diversas implementações; escolhemos o pacote "Cremona" desenvolvido por G. Staglianò [Stag18].

```
Macaulay2, version 1.15
with packages: ConwayPolynomials, Elimination, IntegralClosure, InverseSystems, LLLBases
               PrimaryDecomposition, ReesAlgebra, TangentCone

restart
loadPackage "Cremona"
graus = {{1}};
rmax = 5;
for r from 1 to rmax do (
P = QQ[x_0..x_(2*r)];
m = matrix for i from 0 to r list for j from 0 to r list x_(i+j); -- Hankel
f = det m;
J = ideal jacobian ideal f;
phi = map(P,P,gens J);
graus = append(graus, projectiveDegrees(phi));
);
<< "graus projetivos phi_r:" << endl;
for r from 1 to rmax do (
```

```
<< "r=" << r << ": "<< graus_r << endl;
);
-- tendo os graus projetivos, usamos as relacoes de Aluffi para
-- obter a classe CSM
<< "classe CSM(U_r):" << endl;
for r from 1 to rmax do (
c = for i from 0 to 2*r list
     sum(0..2*r-i,j->(-1)^j*binomial(2*r-j,i)*graus_r_j);
<< "r=" << r << ": "<< c << endl;
);

graus projetivos phi_r:
r=1: {1, 1, 1}
r=2: {1, 2, 4, 4, 2}
r=3: {1, 3, 9, 17, 21, 15, 5}
r=4: {1, 4, 16, 44, 86, 116, 104, 56, 14}
r=5: {1, 5, 25, 90, 240, 472, 680, 700, 490, 210, 42}
classe CSM(U_r):
r=1: {1, 1, 1}
r=2: {1, 2, 4, 2, 1}
r=3: {1, 3, 9, 9, 9, 3, 1}
r=4: {1, 4, 16, 24, 36, 24, 16, 4, 1}
r=5: {1, 5, 25, 50, 100, 100, 100, 50, 25, 5, 1}
```

B.1.2 Lugar singular, $\mathbb{P}^4$

Sejam $C \subset \mathbb{P}^4$ a curva racional normal e $\mathrm{Sec}_2\, C$ a sua secante. Verificamos abaixo que, embora o ideal de C não coincida com o ideal jacobiano de $\mathrm{Sec}_2\, C$, estes dois ideais tem a mesma saturação, ou seja, vale a igualdade $\mathrm{Sing}(\mathrm{Sec}_2\, C) = C$ como esquemas. Omitimos trechos desnecessários da saída.

```
restart
i1 : P4 = QQ[x_0..x_4]

i2 : H2 = matrix{{x_0..x_3},{x_1..x_4}}

o2 = | x_0 x_1 x_2 x_3 |
     | x_1 x_2 x_3 x_4 |

i3 : C = minors(2,H2)

o3 = ideal of P4

i4 : H3 = matrix{{x_0..x_2},{x_1..x_3},{x_2..x_4}}
```

```
o4 = | x_0 x_1 x_2 |
     | x_1 x_2 x_3 |
     | x_2 x_3 x_4 |

i5 : Sec2 = ideal det(H3)

              3                2    2
o5 = ideal(- x  + 2x x x  - x x  - x x  + x x x )
              2     1 2 3    0 3    1 4    0 2 4

i6 : J = ideal jacobian Sec2

               2                            2
o6 = ideal (- x  + x x , 2x x  - 2x x , - 3x  + 2x x  + x x ,
               3    2 4    2 3     1 4      2     1 3    0 4
                           2
         2x x  - 2x x , - x  + x x )
           1 2     0 3     1    0 2

i7 : J == C             -- ideais diferentes

o7 = false

i8 : saturate J == C    -- esquemas iguais

o8 = true
```

B.1.3 Lugar singular, $\mathbb{P}^6$

Entretanto, já para a curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^6$, os esquemas $\operatorname{Sec}_2 C$ e $\operatorname{Sing}(\operatorname{Sec}_3 C)$ não coincidem embora tenham a mesma parte reduzida, isto é, sejam iguais como conjuntos. De fato, acreditamos que para $n \geq 5$ e para $2 \leq k \leq [n/2]$, tem-se que $\operatorname{Sec}_{k-1} C$ e $\operatorname{Sing}(\operatorname{Sec}_k C) \subset \mathbb{P}^n$ não coincidem como esquemas embora definam o mesmo conjunto; veja a Proposição 2.3.

```
i9 : restart

i1 : P6 = QQ[x_0..x_6]

o1 = P6

o1 : PolynomialRing

i2 : H3 = matrix{{x_0..x_4},{x_1..x_5},{x_2..x_6}}
```

```
o2 = | x_0 x_1 x_2 x_3 x_4 |
     | x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 |
     | x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 |

i3 : Sec2 = minors(3,H3)

o3 : Ideal of P6

i4 : Sec3 = ideal det matrix{{x_0..x_3},{x_1..x_4},{x_2..x_5},{x_3..x_6}}

o4 : Ideal of P6

i5 : J = ideal jacobian Sec3

o5 : Ideal of P6

i6 : saturate J == saturate Sec2  -- esquemas diferentes

o6 = false

i7 : radical J == J -- ideal jacobiano nao e' radical

o7 : false

i8 : radical J == Sec2    -- mesmo lugar reduzido

o8 = true
```

B.2 Algoritmo principal

Apresentamos aqui uma implementação do algoritmo descrito no Teorema 4.2.

```
--
-- interpolacao de Lagrange
--
interpola = (lista,x) -> (
--
-- recebe lista da forma { {a_0,b_0},..,{a_n,b_n} }
-- retorna polinomio p de grau <=n na variavel x tal que p(a_i)=b_i
--
I := 0..#lista-1;
return sum( I, i->lista_i_1*
   product(toList(set(I)-{i}), j->(x-lista_j_0)/(lista_i_0-lista_j_0))
);
)
```

```
--
-- numeros de Catalan
--
catalan = n -> substitute(binomial(2*n,n)/(n+1),ZZ);
--
-- Algoritmo principal:
-- calcula as sequencias c_i(r) e d_i(r) caracterizadas pelo Teorema 4.2,
-- para r percorrendo os valores 0,1,...,N
--
calcula = N -> (
t:= symbol t;
R := QQ[t];
c=mutableMatrix(QQ,2*N+1,N+1);
d=mutableMatrix(QQ,2*N+1,N+1);
polc=mutableMatrix(R,N+1,1); -- vetor com os polinomios c_i(t)
pold=mutableMatrix(R,N+1,1); -- vetor com os polinomios d_i(t)
c_(0,0)=1;    d_(0,0)=1;
polc_(0,0)=1; pold_(0,0)=1;
--
-- laco principal: r indexa a linha, espaco ambiente P^{2r}
--
for r from 1 to N do (
--
-- atribui valores das colunas 0..r-1, herdados do passo anterior
--
for i from 0 to r-1 do (
d_(i,r)=substitute(pold_(i,0)+0*t,t=>r);
c_(i,r)=substitute(polc_(i,0)+0*t,t=>r);
);
--
-- determina colunas r+1,...,2r na matriz c, usando as relacoes de Aluffi
--
for i from 0 to r-1 do (
c_(2*r-i,r)=sum( 0..i, j->(-1)^j*binomial(2*r-j,2*r-i)*d_(j,r) );
);
--
-- determina c_{r,r}
--
s:=sum(0..r-1, j->(-1)^j*c_(j,r))  +  sum(r+1..2*r, j->(-1)^j*c_(j,r));
c_(r,r)=(-1)^r*(catalan(r) - s);
--
-- agora temos toda a linha r na matriz c
-- calculamos a linha r na matriz d, usando as relacoes de Aluffi
--
for i from r to 2*r do (
d_(i,r) = sum( 2*r-i..2*r, j->(-1)^j*binomial(j,2*r-i)*c_(j,r) );
);
```

```
--
-- interpola e obtem os polinomios da coluna r
-- em ambas as matrizes
--
polc_(r,0) = interpola( for linha in 0..r list {linha,c_(r,linha)}, t );
pold_(r,0) = interpola( for linha in 0..r list {linha,d_(r,linha)}, t );
); -- for r
--
--
c=transpose c;
d=transpose d;
<< "N = " << N << ". Respostas em c, d, polc, pold" << endl;
) -- calcula
```

B.2.1 Resultados

```
i4 : calcula 7
N = 7. Respostas em c, d, polc, pold

i5 : c

o5 = | 1 . .  .   .   .   .    .    .    .   .   .   .  . . |
     | 1 1 1  .   .   .   .    .    .    .   .   .   .  . . |
     | 1 2 4  2   1   .   .    .    .    .   .   .   .  . . |
     | 1 3 9  9   9   3   1    .    .    .   .   .   .  . . |
     | 1 4 16 24  36  24  16   4    1    .   .   .   .  . . |
     | 1 5 25 50  100 100 100  50   25   5   1   .   .  . . |
     | 1 6 36 90  225 300 400  300  225  90  36  6   1  . . |
     | 1 7 49 147 441 735 1225 1225 1225 735 441 147 49 7 1 |

o5 : MutableMatrix

i6 : d

o6 = | 1 . .  .   .    .    .    .     .     .     .     .     .    .    .   |
     | 1 1 1  .   .    .    .    .     .     .     .     .     .    .    .   |
     | 1 2 4  4   2    .    .    .     .     .     .     .     .    .    .   |
     | 1 3 9  17  21   15   5    .     .     .     .     .     .    .    .   |
     | 1 4 16 44  86   116  104  56    14    .     .     .     .    .    .   |
     | 1 5 25 90  240  472  680  700   490   210   42    .     .    .    .   |
     | 1 6 36 160 540  1392 2752 4152  4710  3900  2232  792   132  .    .   |
     | 1 7 49 259 1057 3367 8449 16753 26173 31899 29757 20559 9933 3003 429 |

o6 : MutableMatrix
```

```
i7 : polc

o7 = | 1                                            |
     | t                                            |
     | t2                                           |
     | 1/2t3-1/2t2                                  |
     | 1/4t4-1/2t3+1/4t2                            |
     | 1/12t5-1/3t4+5/12t3-1/6t2                    |
     | 1/36t6-1/6t5+13/36t4-1/3t3+1/9t2             |
     | 1/144t7-1/16t6+31/144t5-17/48t4+5/18t3-1/12t2 |

o7 : MutableMatrix

i8 : pold

o8 = | 1                                                      |
     | t                                                      |
     | t2                                                     |
     | 5/6t3-1/2t2-1/3t                                       |
     | 7/12t4-t3-1/12t2+1/2t                                  |
     | 7/20t5-7/6t4+3/4t3+2/3t2-3/5t                          |
     | 11/60t6-t5+19/12t4-1/6t3-19/15t2+2/3t                  |
     | 143/1680t7-11/16t6+91/48t5-83/48t4-23/30t3+23/12t2-5/7t |

o8 : MutableMatrix

i9 : time calcula 50          -- ate' P^{100}...
N = 50. Respostas em c, d, polc, pold
     -- used 10.5821 seconds
```

Referências Bibliográficas

[AB08] Aluffi, P. e Brasselet, J., *Une nouvelle preuve de la concordance des classes définies par M.-H. Schwartz et par R. MacPherson*. Bull. Soc. Math. France, **136** (2), 2008, 159-166. 7

[Abh88] Abhyankar, S., *Enumerative combinatorics of Young tableaux*. Monographs and textbooks in pure and applied mathematics **115**, Marcel Dekker, 1988. 32

[Alu95] Aluffi, P., *Singular schemes of hypersurfaces*. Duke Math. J., **80**, 1995, 325–351. 9

[Alu99] Aluffi, P., *Chern classes for singular hypersurfaces*. Transactions of the American Mathematical Society, **351** (10), 1999, 3989–4026. 7, 14, 17

[Alu02] Aluffi, P., *Characteristic classes of singular varieties*, Topics in Cohomological Studies of Algebraic Varieties: Impanga Lecture Notes, Banach Center, Warsaw, 2002. 7, 14

[Alu03] Aluffi, P., *Computing characteristic classes of projective schemes*. J. Symbolic Comput., **35** (1), 2003, 3–19. 14, 16, 19, 20, 22

[Alu10] Aluffi, P., *Chern classes of Blow-ups*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, **148** (2), 2010, 227–242. 16

[Alu13] Aluffi, P. *Euler characteristics of general linear sections and polynomial Chern classes*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. **62** (1), 2013, 3–26. 9, 15, 23, 24

[Alu18] Aluffi, P., *Projective duality and a Chern-Mather involution*. Transactions of the American Mathematical Society, **370**, 2018, 1803–1822. 40, 41, 43

[AH18] Aluffi, P. e Harris, C., *The Euclidean distance degree of smooth complex projective varieties*. Algebra and Number Theory, **12** (8), 2018, 2005–2032. 42

[AMSS17] Aluffi, P., Mihalcea, L., Schürmann, J. e Su, C., *Shadows of characteristic cycles, Verma modules, and positivity of Chern-Schwartz-MacPherson classes of Schubert cells*. arXiv:1709.08697v2. 12

[BH93] Bruns, W. e Herzog, J., *Cohen-Macaulay rings*. Cambridge University Press. 1993. 34, 36

[Bir73] Bialynicki-Birula, A., *On fixed point schemes of actions of multiplicative and additive groups*. Topology, **12**, 1973, 99–103. 36

[BS81] Brasselet, J. e Schwartz, M.-H., *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*. Astérisque 82–83, 1981, 93–147. 7

[BC03] Bruns, W. e Conca, A., *Gröbner basis and determinantal ideals*. Em: Herzog J., Vuletescu V. (eds) Commutative Algebra, Singularities and Computer Algebra. NATO Science Series (Series II: Mathematics, Physics and Chemistry), vol 115, Springer, Dordrecht, 2003, 9–66. 32

[CGO14] Carlini, E., Grieve, N. e Oeding, L., *Four Lectures on Secant Varieties*, Springer Proc. Math. and Stat., vol. 76, 2014, 101–146. 7

[CH94] Conca, A. e Herzog, J., *On the Hilbert function of determinantal rings and their canonical module*. Proc. Am. Math. Soc. **122** (3), 1994, 677–681. 32

[DH+16] Draisma, J., Horobeţ, E., Ottaviani, G., Sturmfels, B., Rehka, T., *The Euclidean Distance Degree of an Algebraic Variety*. Found. Comp. Math., **16** (1), 2016, 99–149. 38, 42, 43

[Dim01] Dimca, A., *On polar Cremona transformations*. An. Stiint. Univ. Ovidius Constanta Ser. Mat. **9**, 2001, 47–53. 25

[Dol00] Dolgachev, I., *Polar Cremona transformations*. Michigan Math. J. **48**, 2000, 191–202. 8

[DP03] Dimca, A. e Papadima, S., *Hypersurface complements, Milnor fibers and higher homotopy groups of arrangements*. Annals of Mathematics **158**, 2003, 473–507. 8, 21, 26

[DS15] Dimca, A. e Sticlaru, G., *Mixed multiplicities, Hilbert polynomials and homaloidal surfaces*. Mathematische Nachrichten, **290**, issue 5-6, 2017, 785–793. 23

[Eis88] Eisenbud, D., *Linear sections of determinantal varieties*. Amer. J. Math., **110**, 1988, 541–575. 31

[EH16] Eisenbud, D. e Harris, J., 3264 and all that: a second course in algebraic geometry. Cambridge University Press. United Kingdom, 2016. 8, 14, 17, 18, 19, 29, 31, 41, 42

[EN62a] Eagon, J. e Northcott, D., *Ideals Defined by Matrices and a Certain Complex Associated with Them*, Proc. of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences, **1337** (269), 1962, 188–204. 33

[EN62b] Eagon, J. e Northcott, D., *A note on the Hilbert functions of certain ideals which are defined by matrices*, Mathematika, **9** Issue 2, 1962, 118–126. 34

[FM12] Fassarella, T. e Medeiros, N., *On the polar degree of projective hypersurfaces.* Journal of the London Math. Soc., **86** (1), 2012, 259–271. 8, 25

[FOV99] Flenner, H., O'Carroll, L. e Vogel, W. Joins and intersections, Springer-Verlag. Berlin, 1999. 38

[FP07] Fassarella, T. e Pereira, J., *On the degree of polar transformations. An approach through logarithmic foliations.* Sel. Math. New Series **13**, 2007, 239–252. 8

[Ful84] Fulton, W., Intersection Theory. Springer-Verlag. Berlin, 1984. 14, 15, 18, 19, 25

[Ged17] Gedeon, K., *Kazhdan-Lusztig polynomials of thagomizer matroids*, The Electronic Journal of Combinatorics **24** (3) 2017, #P3.12; arXiv:1610.05349 11, 61, 67

[GKZ94] Gelfand, I., Kapranov, M. e Zelevinsky, A., Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhauser, 1994. 38, 48

[GP82] Gruson, L., Peskine, C., *Courbes de l'espace projectif: variétés de sécantes*, Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry, (Le Barz P. and Hervier Y., eds.), Prog. Math Vol. **24**, Birkhauser, 1982, 1–31. 31

[Harr92] Harris, J., Algebraic Geometry, A First Course. GTM 133, Springer-Verlag, 1992. 20, 29, 31, 32

[Hart77] Hartshorne, R., Algebraic Geometry. GTM 152, Springer-Verlag, 1977. 36, 39

[Huh12] Huh, J., *Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs*, J. Am. Math. Soc., **25** (3), 2012, 907–927. 8, 68

[Huh14] Huh, J., *Milnor numbers of projective hypersurfaces with isolated singularities.* Duke Mathematical Journal, **163** (8), 2014, 1525–1548. 8

[Huh16] Huh, J., *Positivity of Chern classes of Schubert cells and varieties.* Journal of Algebraic Geometry, **25**, 2016, 177–199. 11

[IK99] Iarrobino, A. e Kanev, V., Power sums, Gorenstein algebras, and determinantal loci, LNM 1721, Springer-Verlag, 1999. 31

[Ken90] Kennedy, G., *MacPherson's Chern classes of singular algebraic varieties.* Comm. Algebra, **18** (9), 1990, 2821–2839. 15

[Kle74] Kleiman, S., The transversality of a general translate. Compositio Mathematica, 1974, 287–297. 50

[Kle86] Kleiman, S., Tangency and duality. Proceedings of the 1984 Vancouver conference in algebraic geometry, volume 6 of CMS Conf. Proc.. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 163–225. 38

[Laz04] Lazarsfeld, R. Positivity in algebraic geometry I: Classical setting: Line bundles and linear series. Springer, 2004. 68

[LS16] Lee, H. e Sturmfels, B., *Duality of multiple root loci*, Journal of Algebra, **446**, 2016, 499–526. 40

[M2] Grayson, D. R. e Stillman, M. E., *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*, disponível em `https://faculty.math.illinois.edu/Macaulay2` 74

[Mac74] MacPherson, R., *Chern classes for singular algebraic varieties*, Annals of Mathmatics **100** (2), 1974, 423–432. 7, 14, 15, 17

[Mo14] Mostafazadehfard, M., *Hankel and sub-Hankel determinants*, tese de doutorado, Universidade Federal de Pernambuco, 2014. 8, 31, 46, 49

[MS16] Mostafazadehfard, M., e Simis, A., *Homaloidal determinants*, Journal of Algebra, **450**, 2016, 59–101. 8, 10, 31, 47, 49

[Ohm03] Ohmoto, T., *An elementary remark on the integral with respect to Euler characteristics of projective hyperplane sections.* Reports of the Faculty of Science, Kagoshima University. **36**, 2003, 37–41. 9, 23

[Par88] Parusiński, A., *A generalization of the Milnor number.* Math. Ann., **281**, 1988, 247–254. 9

[Pie78] Piene, R., *Polar classes of singular varieties.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4), 11, 1978, 247–276. 42

[Pie88] Piene, R., *Cycles polaires et classes de Chern pour les variétés projectives singulières.* In Introduction à la théorie des singularités, II, volume 37 of Travaux en Cours, 1988, 7–34. 10, 43

[Pie15] Piene, R., *Polar varieties revisited.* In Computer algebra and polynomials, volume 8942 of Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, 2015, 139–150. 42

[RS01] Russo, F., e Simis, A., *On birational maps and Jacobian matrices*, Compos. Math., **126** (3), 2001, 335–358. 46

[Rus03] Russo, F., Tangents and secants of algebraic varieties, notes of a course, Publicações Matemáticas, 24o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2003. 29, 39

[Sch65a] Schwartz, M-H., *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. I.* C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 1965, 3262–3264. 7

[Sch65b] Schwartz, M-H., *Classes caractéristiques définies par une stratification d'une variété analytique complexe. II.* C. R. Acad. Sci. Paris, **260**, 1965, 3535–3537. 7

[Sem31] Semple, J., *On Representations of the S_k's of S_n and of the Grassmann manifolds $G(k,n)$*. Proc. London Math. Soc., **s2-32** (1), 1931, 200–221. 46

[Slo20] Sloane, N. J. A, The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, 2020. https://oeis.org 61, 73

[Stag18] Staglianò, G., *A Macaulay2 package for computations with rational maps*, The Journal of Software for Algebra and Geometry, **8**, 2018, 61–70. 74

[Stan12] Stanley, R., Enumerative Combinatorics vol. I, Cambridge University Press, 2012. 71

[STT06] Sapounakis, A. Tasoulas, I. e Tsikouras, P., *Dyck path statistics*, WSEAS Trans. Math., **5**, no. 5, 2006, 459–464. 61, 62

[Tei79] Teissier, B., *Du théorème de l'index de Hodge aux inégalités isoperimetriques*, C. R. Acad. Sci., Paris, Sér. A 288, 1979, 287–289. 68

[Wang11] Wang, C.-J., *Applications of the Goulden-Jackson cluster method to counting Dyck paths by occurrences of subwords*, Dissertation, Brandeis University, 2011. 62, 73

[Wat97] Watanabe, J., *Hankel matrices and Hankel ideals*. Proc. Schl. Sci. Tokai Univ., **32**, 1997, 11–21. 31, 35

[Zha18] Zhang. X., *Chern classes and characteristic cycles of determinantal varieties*. Journal of Algebra, **497**, 2018, 55–91. 10, 11, 14, 42, 67