

**UNIVERSIDADE FEDERAL
FLUMINENSE**

Instituto de Matemática e Estatística

**Estruturas Projetivas em Superfícies de
Tipo Finito**

Josefa Genyle do Nascimento Santana

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor.

Orientador: Gabriel Calsamiglia Mendlewicz

Niterói, 28 de Julho de 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

S231e Santana, Josefa Genyle do Nascimento
Estruturas projetivas em superfícies de tipo finito /
Josefa Genyle do Nascimento Santana ; Gabriel Calsamiglia
Mendlewicz, orientador. Niterói, 2020.
80 f. : il.

Tese (doutorado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói,
2020.

DOI: <http://dx.doi.org/10.22409/PPGMAT.2020.d.04546001517>

1. Folheação (Matemática). 2. Topologia. 3. Superfície
de Riemann. 4. Fibrado (Matemática). 5. Produção
intelectual. I. Mendlewicz, Gabriel Calsamiglia, orientador.
II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática
e Estatística. III. Título.

CDD -

Estruturas Projetivas em Superfícies de Tipo Finito

Tese submetida ao Corpo Docente do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor.

Área de concentração: Matemática

Aprovada por:

Gabriel Calsamiglia Mendlewicz - UFF
(Orientador)

Thiago Fassarella do Amaral - UFF

Gaël Cousin - UFF

Bertrand Deroin - Université de Cergy-Pontoise

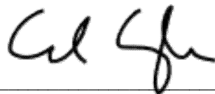
Adolfo Guillot - UNAM

Niterói, 28 de Julho de 2020

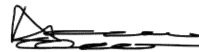
**Ata dos trabalhos finais da Comissão
Examinadora da Tese de Doutorado em
Matemática apresentada por Josefa Genyle do
Nascimento Santana**

Aos vinte e oito dias do mês de julho de dois mil e vinte, reuniram-se, por videoconferência, os membros da Comissão Examinadora constituída pelos Professores Gabriel Calsamiglia Mendlewicz (Universidade Federal Fluminense); Adolfo Guillot Santiago (Universidad Nacional Autonoma de Mexico); Bertrand Deroin (Université De Cergy-Pontoise); Gaël Cousin (Universidade Federal Fluminense) e Thiago Fassarella do Amaral (Universidade Federal Fluminense), sob a presidência do primeiro, para a prova pública de defesa da tese intitulada “**Estruturas Projetivas em Superfícies de Tipo Finito**”, apresentada pela Doutoranda Josefa Genyle do Nascimento Santana. A defesa da tese atende às exigências contidas no Regulamento Especifico do Curso de Doutorado em Matemática da Universidade Federal Fluminense. A tese foi elaborada sob a orientação do Professor Gabriel Calsamiglia Mendlewicz. A Doutoranda Josefa Genyle do Nascimento Santana fez a exposição de seu trabalho durante 50 minutos, iniciando às 14h00 e concluindo às 14h50min. A seguir, respondeu às questões formuladas pelos integrantes da Comissão Examinadora. Terminada a arguição, realizou-se a reunião da Comissão Examinadora, que apresentou parecer no sentido da aprovação da Doutoranda Josefa Genyle do Nascimento Santana, considerando-se o trabalho apresentado e a forma com que se houve na apresentação da defesa da mesma. Para constar, foi lavrada a presente ata, que vai assinada pela Secretária Administrativa da Coordenação de Pós-Graduação em Matemática, pelos membros da Banca Examinadora e pela Doutoranda.

Niterói, 28 de julho de 2020.



Prof. Gabriel Calsamiglia Mendlewicz
(Orientador)



Prof. Adolfo Guillot Santiago



Prof. Bertrand Deroin



Prof. Gaël Cousin



Prof. Thiago Fassarella do Amaral

Tayene de Oliveira Sena

Tayene de Oliveira Sena
(Secretária)

Josefa Genyle do Nascimento Santana
Josefa Genyle do Nascimento Santana
(Doutoranda)

Dedicatória

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço muito a cada um e cada uma que me ajudou a ter concluído essa etapa depois de tanto trabalho, dificuldades acadêmicas e pessoais e todos os entraves colocados pelo nosso contexto.

A todo mundo que me acompanhou nessa trajetória, que contribuiu de algum modo com a pesquisa, com apoios, trocando ideias e ajudando a apurar as reflexões, sendo alguém que me inspira, etc... meu muito obrigada, de todo o coração! Fazer um doutorado de 4,5 anos não é um vôo solo e cada dica, palavra de conforto e estímulo, cada gentileza cotidiana que eu tive nesse processo da parte de tanta gente tem um enorme valor!

Seria muito difícil listar todos e todas que me ajudaram de algum modo durante esse período de doutoramento, mas tentarei deixar registrado aqui algumas pessoas em especial.

Agradeço aos meus pais, meus irmãos e meu sobrinho por me amarem tanto, respeitarem e apoiarem minhas escolhas e estarem sempre presentes mesmo distantes fisicamente.

Agradeço imensamente ao meu orientador, o Professor Gabriel, por todas as oportunidades oferecidas, a disponibilidade, a dedicação e todo apoio nesse trabalho.

Agradeço aos membros da banca, os professores Thiago, Bertrand, Gaël e Adolfo, por terem aceitado o convite, pelos comentários e correções do manuscrito.

Agradeço novamente aos professores Bertrand e Gabriel por terem possibilitado meu doutorado sanduíche em Paris sob o acompanhamento deles e a Nicolas Tholozan pela ajuda nos trâmites necessários, acolhimento na ENS e as discussões. Foi um ano muito feliz, extremamente proveitoso e muito importante para a execução desse trabalho. Sou verdadeiramente grata a todos que tornaram possível essa oportunidade única em minha vida.

A todos os meus amigos que tornaram os dias mais doces e leves.

Agradeço a Reillon por ter sido muito presente e me apoiado durante todos esses anos de estudos longe de casa.

Aos professores e funcionários da PGMAT-UFF e aos funcionários do DMA-ENS.

Aos colegas da UFF, pela boa convivência.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior) pelo apoio financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, definiremos estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana em superfícies e provaremos o teorema de existência de estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana com representação de monodromia $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ dada, onde S^* é uma superfície de Riemann de tipo finito, e analisaremos a relação entre estruturas projetivas com mesma monodromia e o *flip* de uma fibra. De um ponto de vista analítico, calcularemos a derivada Schwarziana das cartas projetivas singulares do tipo fuchsiana e soluções de equações Schwarzianas dada uma diferencial quadrática meromorfa com polo duplo. Faremos um estudo local da geometria/topologia da aplicação *developing* que define a estrutura projetiva ao redor de uma cúspide e estenderemos a cirurgia de movimento de pontos de ramificação quando uma das singularidades é do tipo fuchsiana. Por fim, daremos interpretações álgebra-geométricas para essas estruturas projetivas onde obteremos fórmulas envolvendo invariantes topológicos da superfície e invariantes analíticos da folheação e fibrado.

Palavras-Chave: Estrutura Projetiva, Equações Fuchsianas, Representação de Monodromia, Folheações de Riccati

ABSTRACT

In this work, we will define singular projective structures of the Fuchsian type on surfaces and prove the existence theorem of singular projective structures of the Fuchsian type with given monodromy representation $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, where S^* is a finite type Riemann surface, and we will study the relation between isomonodromic projective structures and the *flip* of a fiber. From an analytical point of view, we will calculate the Schwarzian derivative of Fuchsian projective charts and solutions of Schwarzian equations given a meromorphic quadratic differential with double pole. We will make a local study of the geometry/topology of the developing map that defines the projective structure around a cusp and we will extend surgery of movement of branch points when one of the singularities is Fuchsian type. Finally, we will give algebra-geometric interpretations for these projective structures where we will obtain formulas involving the surface's topological invariants and analytical invariants of foliation and fiber bundle.

Keywords: Projective Structure, Fuchsian Equations, Monodromy Representation, Riccati Foliation

Lista de Figuras

4.1	Decomposição de $dev(x) = e^{\alpha x}$, $\Re\alpha > 0$	51
4.2	Decomposição de $dev(x) = e^{\alpha x}$, $\Re\alpha = 0$	52
4.3	Movimento de ponto de ramificação	57
4.4	Cone standard de ângulo θ	58
4.5	Movimento de ponto de ramificação para singularidades cônicas	59
4.6	Inversa do movimento de ponto de ramificação em z^α	60

Sumário

1	Estruturas projetivas	19
1.1	Estruturas projetivas complexas	19
1.1.1	Conceitos	19
1.1.2	Suspensão de uma representação	21
1.1.3	Estruturas projetivas complexas e seções de $\mathbb{C}P^1$ -fibrados	22
1.2	Estruturas projetivas singulares	23
1.2.1	Conceitos	23
1.2.2	Estruturas projetivas ramificadas	26
2	Teorema de existência de estruturas projetivas do tipo fuchsiana	28
2.1	Compactificação de $\mathbb{C}P^1$ -fibrados	28
2.2	Existência de seções em $\mathbb{C}P^1$ -fibrados	31
2.3	Construção de estruturas projetivas do tipo fuchsiana através de uma seção	35
2.4	Demonstração do Teorema de existência	35
2.4.1	Flips e as estruturas projetivas com mesma monodromia	39
3	Análise da Schwarziana	42
4	Deformações isomonodrômicas e excesso de ângulo	50
4.1	Cartas projetivas na vizinhança de uma cúspide	50
4.1.1	Geometria de z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$	50
4.1.2	Topologia de $\log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$	53
4.2	Curvas gêmeas	56
4.3	Uma generalização da cirurgia	57
4.3.1	Singularidades com monodromia não-parabólica	58
4.4	Excesso de ângulo	61
5	Interpretações álgeo-geométricas para estruturas projetivas do tipo fuchsiana	62
5.1	Conceitos e resultados	62
5.1.1	Número de interseção	62
5.1.2	Fórmulas de Brunella	63
5.1.3	Campos vetoriais em superfícies reais	66
5.1.4	Fibrados vetoriais holomorfos sobre superfícies compactas	67
5.2	Estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana	68

Introdução

De uma noção mais geral, uma estrutura geométrica é definida por um grupo de Lie G agindo por difeomorfismos em uma variedade X . Uma (G, X) -estrutura em uma variedade S é um atlas de cartas de subconjuntos abertos de S em X tais que os mapas de transição são restrições de elementos de G . Nesta linguagem, estruturas projetivas complexas em uma superfície S são $(PSL_2(\mathbb{C}), \mathbb{CP}^1)$ -estruturas.

Outra forma de definir é como um sistema distinguido de coordenadas locais modelados em \mathbb{CP}^1 de tal forma que as mudanças de coordenadas locais são localmente projetivas. Sabemos que se S é uma variedade com uma estrutura projetiva modelada no espaço projetivo \mathbb{CP}^1 , então existe um par (dev, ρ) (único a menos de automorfismos de \mathbb{CP}^1), onde $dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ é uma imersão projetiva equivariante em relação ao homomorfismo $\rho : \pi_1(S) \rightarrow Aut(\mathbb{CP}^1)$. A aplicação developing dev globaliza as cartas coordenadas que definem a estrutura projetiva, enquanto a representação de monodromia ρ globaliza as mudanças de coordenadas. Duas estruturas projetivas são equivalentes se as aplicações developing diferem por uma homografia. Um ponto p é de ramificação em uma estrutura projetiva se na vizinhança de p em S , existe um recobrimento ramificado que é uma carta da estrutura projetiva na vizinhança de p . Chamamos de estruturas projetivas ramificadas essas estruturas projetivas que permitem singularidades que são pontos de ramificação.

Gallo, Kapovich e Marden em [12] listam alguns problemas em aberto sobre estruturas projetivas complexas e aqui iremos abordar o seguinte problema: *Provar e/ou explorar a existência e não-unicidade de estruturas projetivas complexas com monodromia dada no caso de superfícies com cúspides.*

Para caracterizar e classificar a não-unicidade de estruturas projetivas complexas sobre uma superfície fechada S com uma representação de monodromia prescrita, definimos o mapa de holonomia $Hol : P(S) \rightarrow \chi(S)$ por $(dev, \rho) \mapsto [\rho]$ onde $P(S)$ é o conjunto das classes de estruturas projetivas complexas sobre uma superfície fechada S e $\chi(S) = Hom(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C})) // PSL_2(\mathbb{C})$ a variedade de caracteres¹.

Sabemos que pelo Teorema de Holonomia de Hejhal [23] o mapa Hol é um homeomorfismo local mas não é uma aplicação de recobrimento sobre sua imagem e em Earle [10] é mostrado que é um biholomorfismo local. Em particular, o conjunto dos pontos com a mesma monodromia é discreto. Mas esse mapa não é globalmente injetivo, de fato,

¹O grupo $PSL_2(\mathbb{C})$ age em $Hom(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C}))$ por conjugação, e o quociente $\chi(S)$ é no sentido da Teoria do Invariante Geométrico, i.e., os pontos de $\chi(S)$ estão em correspondência 1-a-1 com o conjunto de caracteres: as funções $g : \pi_1(S) \rightarrow \mathbb{C}$ da forma $\gamma \mapsto tr^2(\rho(\gamma))$ onde $\rho \in Hom(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C}))$. Mais detalhes sobre a diferença com o quociente comum podem ser vistos no Capítulo 6 de [9].

Goldman mostrou em [14] que para o caso de monodromia fuchsiana (a imagem de ρ é conjugada a um subgrupo discreto de $PSL_2(\mathbb{R})$) tais estruturas são obtidas por meio de 2π -graftings, que são operações geométricas (cirurgias), cuja ideia geral é substituir uma geodésica hiperbólica fechada simples γ em S por um cilindro $\gamma \times [0, t]$ obtendo uma nova superfície. O Grafting foi usado originalmente por Maskit [28], Hejhal [23] e Sullivan-Thurston [33] para construir exemplos de estruturas projetivas fuchsianas exóticas. O 2π -grafting é especial porque não muda a representação de monodromia.

Em sua tese [13], 1980, Goldman provou que a variedade algébrica quasi-projetiva $Hom(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C}))$ tem duas componentes conexas: componente das representações que se levantam a $\pi_1(S) \rightarrow SL_2(\mathbb{C})$ e das que não se levantam, as distinguiu através da 2ª classe de Stiefel-Whitney (Teorema 3.10 p. 70). E em [15], 1988, ele generalizou para um grupo de Lie G semi-simples localmente isomorfo a $PSL_2(\mathbb{C})$ ou $PSL_2(\mathbb{R})$ calculando o número de componentes irredutíveis de $Hom(\pi_1(S), G)$, onde S é uma superfície orientada fechada de gênero $g > 1$.

Sobre estruturas projetivas complexas e suas representações de monodromia podemos nos perguntar qual é a imagem do mapa de holonomia. No caso de superfícies fechadas de gênero maior ou igual a 2, já é conhecido um resultado de Gallo, Kapovich, Marden ([12], 2000):

Teorema. (Gallo-Kapovich-Marden) *Seja S uma superfície fechada de gênero $g \geq 2$. Um homomorfismo $\rho \in Hom(\pi_1(S), PSL_2(\mathbb{C}))$ não-elementar é uma representação de monodromia de:*

- (i) *Uma estrutura projetiva complexa para alguma estrutura complexa em S se, e só se, ρ pode ser levantada a $\tilde{\rho} \in Hom(\pi_1(S), SL_2(\mathbb{C}))$.*
- (ii) *Uma estrutura projetiva ramificada com um único ponto de ramificação simples para alguma estrutura complexa em S se, e somente se, ρ não se levanta a um homomorfismo em $SL_2(\mathbb{C})$.*

Dizemos que uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ é elementar se a ação de $Im(\rho)$ em \mathbb{H}^3 fixa um ponto ou dois em $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$, caso contrário, chamamos de não-elementar.

A hipótese da imagem $\Gamma = \rho(\pi_1(S))$ ser não-elementar é necessária, de fato, se caso contrário, o grupo de rotações fosse uma representação de monodromia de uma estrutura projetiva em S , Γ preservaria a métrica esférica e poderíamos fazer o *pull-back* da métrica esférica de $\mathbb{C}P^1$ pela *dev* obtendo uma métrica em S que tem curvatura constante $+1$, e pelo teorema de Gauss-Bonnet isso só é possível para $g = 0$. Agora suponhamos que exista estrutura projetiva em S com representação de monodromia afim, dada uma 1-forma holomorfa ω em S induzida de outra no recobrimento universal de S podemos usar o teorema dos Resíduos para mostrar que ω não tem zeros e portanto o gênero de S é 1, uma prova completa pode ser vista no Teorema 1.1 (Gunning) p. 5 de [24].

O problema de realizar estruturas projetivas complexas em superfície com cúspides já tinha sido explorado por Poincaré através dos seus estudos em resolução de equações diferenciais lineares para chegar ao Teorema de Uniformização mesmo não sendo esse seu objetivo inicial.

Uma equação diferencial linear de primeira ordem com duas incógnitas

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = A(z) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

onde $A(z)$ é uma matriz 2×2 que depende racionalmente de z , o quociente $w = u_1/u_2$ verifica a equação de Riccati

$$\frac{dw}{dz} = a(z)w^2 + b(z)w + c(z)$$

onde a, b, c dependem racionalmente da variável complexa z e, reciprocamente, uma equação de Riccati provém de uma tal equação linear. Foram essas equações que levaram Poincaré à uniformização.

Fuchs procurou condições na matriz $A(z)$ que permitem que as soluções locais, na vizinhança de polos de A podem se exprimir como séries em $(z - z_i)^\alpha$ e $\log(z - z_i)$ para alguns α . Ele estabeleceu que isso acontece se, e somente se, A tem somente polos simples.

Com o objetivo de usar equações diferenciais para tratar o problema global da uniformização da superfície de Riemann S , foram consideradas equações diferenciais lineares de segunda ordem tais que o quociente w das duas soluções se prolongam em uma função multivaluada definida globalmente sobre a superfície S (ou \tilde{S}).

Dizemos que uma equação diferencial linear de segunda ordem E_0 sobre um aberto U_0 de uma superfície de Riemann S é globalizável se existe uma cobertura aberta finita $\{U_i\}$ de S e equações diferenciais lineares de segunda ordem E_1, \dots, E_n sobre os abertos U_1, \dots, U_n tais que, para todo $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, as equações E_i e E_j são projetivamente equivalentes² restritas a $U_i \cap U_j$.

No contexto de estruturas projetivas, temos que toda equação diferencial linear de segunda ordem sobre U_0 que é globalizável define uma estrutura projetiva (compatível com a estrutura complexa) em S e reciprocamente. No Capítulo 3, veremos como passar da equação à estrutura projetiva considerando o quociente das soluções sobre abertos e passar da estrutura projetiva para a equação utilizando uma aplicação *developing*. Mais ainda, duas equações diferenciais lineares de ordem 2 sobre U_0 são projetivamente equivalentes se elas correspondem a estruturas projetivas equivalentes.

Considerando equações diferenciais com polos correspondentes a estruturas projetivas singulares trabalhos de Fuchs e posteriormente de Schwarz dão significado às nomenclaturas usados por Poincaré tais como “funções fuchsianas” e “grupos fuchsianos”.

Dizemos que uma equação diferencial linear reduzida com coeficiente meromorfo h

$$\frac{d^2u}{dz^2} + hu = 0 \tag{1}$$

é fuchsiana em $z = z_0$ se h possui no máximo um polo duplo em z_0 .

²Duas equações E_i e E_j são projetivamente equivalentes se o quociente de duas soluções independentes quaisquer de E_j se obtém compondo o quociente de duas soluções independentes quaisquer de E_i por uma homografia.

Descreveremos o tipo de singularidade que aparece nas cartas w da estrutura projetiva e a sua monodromia ao redor de z_0 . Tal carta é dada pelo quociente $w = \frac{u_1}{u_2}$ de duas soluções independentes da equação 1 ao redor de z_0 , ou melhor, como solução da equação Schwarziana

$$S_z(w) := \left\{ \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''(z)}{w'(z)} \right)^2 \right\} = 2h,$$

onde h é o coeficiente da equação 1. Então, diremos que a estrutura projetiva ao redor de z_0 possui uma singularidade do tipo fuchsiana em z_0 .

O resultado de Fuchs-Schwarz que resolve a equação Schwarziana $S_z(w) = 2h$ na vizinhança de um polo duplo z_0 de h se enuncia como:

Teorema. *A equação Schwarziana*

$$S_z(w) = \frac{1 - \alpha^2}{2(z - z_0)^2} + \frac{\mu}{z - z_0} + o(1)$$

tem como solução particular ao redor de z_0 alguma das seguintes expressões:

- (i) $w(z) = y^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$;
- (ii) $w(z) = \frac{1}{y^\alpha} + \log y$ se $\alpha \in \mathbb{N}$

onde $y(z)$ é uma coordenada local em z_0 , $y(z_0) = 0$.

No primeiro caso, a monodromia da singularidade é $w \mapsto e^{2\pi i \alpha} w$ e no segundo é uma monodromia parabólica $w \mapsto w + 2\pi i$. Observemos que todas as monodromias locais, a menos de conjugação, podem ser realizadas por esses modelos locais. Portanto, uma singularidade do tipo fuchsiana é um ponto tal que ao redor dele existe uma aplicação que a menos de mudança coordenada local holomorfa é dada por z^α , $\alpha \in \mathbb{C}^*$, ou $\log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$ e definimos estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana em S como estruturas projetivas onde são permitidas singularidades desse tipo.

Com o objetivo de obter um resultado análogo ao Teorema de Gallo-Kapovich-Marden para superfícies de Riemann de tipo finito, provaremos o seguinte resultado:

Teorema de Existência. *Sejam S uma superfície de Riemann compacta de gênero qualquer e $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset S$ um subconjunto finito com $S \setminus S^* = \{p_1, \dots, p_k\}$. Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ existe uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana em S com representação de monodromia ρ .*

Nesse teorema, estamos permitindo que exista um número finito de singularidades de monodromia local trivial fora das cúspides $S \setminus S^*$, i.e., pontos de ramificação. Assim como foi feito na tese de Goldman [13], construiremos essas estruturas projetivas através de seções do \mathbb{CP}^1 -fibrado obtido da suspensão da representação dada.

Usando teoria de feixes sobre curvas suaves a estratégia inicial da prova é mostrar a existência de seções holomorfas não-triviais e não-invariantes do \mathbb{CP}^1 -fibrado compactificado $S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ sobre S , munido de uma folheação de Riccati possivelmente singular, onde $S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ é a suspensão da representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ em S^* . Para

compactificar, construiremos cartas locais do fibrado nas vizinhanças das cúspides dadas pelos modelos locais de folheações de Riccati (Brunella [5]). Finalmente, as cartas da estrutura projetiva podem ser calculadas através da projeção da seção ao longo das folhas em uma fibra transversal à folheação que serão dadas pelos modelos locais acima citados.

Esse resultado remonta um trabalho de Loray e Pereira [25] que restrito a superfícies projetivas pode-se construir folheações transversalmente projetivas singulares³ com monodromia prescrita. A abordagem é semelhante a nossa, embora usem outras ferramentas como por exemplo, o trabalho de Deligne no problema de Riemann-Hilbert é usado para construir uma conexão plana meromorfa em um fibrado vetorial de posto 2 cuja projetivização dá o \mathbb{CP}^1 -fibrado e constroem uma seção meromorfa genericamente transversal à folheação usando também teoria de feixes.

O problema para superfícies de tipo finito sem hipóteses nas cúspides pode ser estudado com auxílio de resultados clássicos. De fato, é consequência de um resultado devido a Gunning e Narasimhan [21] que é sempre possível construir estruturas projetivas complexas com monodromia trivial em qualquer superfície de Riemann aberta, mas nem sempre é possível construir estruturas projetivas do tipo fuchsiana em superfícies compactas fixando a representação de monodromia e o conjunto singular, de fato, mostraremos que toda estrutura projetiva do tipo fuchsiana com monodromia trivial numa superfície compacta S de gênero $g \geq 1$ possui pelo menos duas singularidades.

Assim como nas folheações de Riccati onde a monodromia dá uma descrição completa da folheação a menos de morfismo birracional, observaremos uma relação estreita da estrutura projetiva com o *flip* (transformação elementar) de uma fibra invariante do fibrado proveniente da suspensão da representação de monodromia compactificado. Mais precisamente, o *flip* da fibra invariante embora mude o modelo usado para compactificar não muda a carta projetiva e existirá uma única escolha de compactificação onde a seção holomorfa do fibrado é transversal à folheação ao redor das fibras invariantes, ou seja, a seção não passa pelas singularidades da folheação.

No *print* recente [20], Gupta prova uma versão análoga ao Teorema de Gallo-Kapovich-Marden onde uma das diferenças com esse trabalho é uma hipótese restritiva nas representações de monodromia que não fornecerá pontos de ramificação fora das cúspides. De fato, o resultado principal desse artigo é enunciado como segue:

Teorema. ([20]) *Uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ é a monodromia de uma estrutura projetiva de tipo fuchsiana com singularidades em $S \setminus S^*$ se, e somente se, ρ é não-degenerada e tem monodromia não-trivial em cada cúspide.*

Aqui, uma representação é degenerada se existe um conjunto F com 1 ou 2 pontos em \mathbb{CP}^1 tal que $\rho(\pi_1(S^*))$ preserva F , e a monodromia ao redor de cada cúspide fixa F (e é parabólica ou identidade se F é unitário). A representação é não-degenerada, caso contrário.

Através do estudo da derivada Schwarziana, desenvolvido no Capítulo 3, veremos que as cúspides que aparecem nesse trabalho também corresponderão a polos de ordem no

³Se existem um \mathbb{CP}^1 -fibrado $\pi : P \rightarrow S$, uma folheação holomorfa singular \mathcal{H} de codimensão 1 em P transversa a fibra genérica de π e uma seção meromorfa $\sigma : S \dashrightarrow P$ genericamente transversal a \mathcal{H} dizemos que $\mathcal{F} = \sigma^*\mathcal{H}$ é uma folheação transversalmente projetivas singulares.

máximo 2 da diferencial quadrática correspondente, mas não precisaremos de hipóteses restritivas sobre as representações para realizá-las como monodromia de estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana.

Conforme nomenclatura usada desde Poincaré, aqui podem surgir singularidades aparentes que são as cúspides com monodromia trivial dadas pelas formas locais $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 2$, já estas não são permitidas no trabalho de Gupta. No caso de estruturas projetivas ramificadas, Gallo-Kapovich-Marden [12] propõe um problema sobre, *dada uma monodromia ρ , precisar e otimizar a conexão entre o divisor de branching da estrutura projetiva e ρ* . Ou seja, calcular o menor inteiro d para o qual existe uma estrutura projetiva ramificada com divisor de *branching* de grau d e monodromia ρ . Ainda continua em aberto a adaptação desse problema para o contexto de estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana: dada uma representação, qual é o grau mínimo de ramificação de uma estrutura projetiva do tipo fuchsiana com essa representação de monodromia?

A técnica usada na demonstração também é diferente: em resumo, envolve uma interpretação geométrica das coordenadas Fock-Goncharev [11] dos espaços de *moduli* de $PSL_2(\mathbb{C})$ -representações *framed* por meio de uma triangulação ideal da superfície, seguindo ideias de Thurston e resultados recentes de Alegretti-Bridgeland [1].

Diferentemente dos pontos de ramificação que possuem a topologia de um recobrimento ramificado, as singularidades do tipo fuchsiana têm comportamentos mais complicados e serão estudados no início do Capítulo 4 para auxiliar na cirurgia de pontos de ramificação.

O movimento de pontos de ramificação é uma cirurgia feita ao redor de um ponto de ramificação e consiste na deformação da carta projetiva ramificada local que pode ser pensada como uma configuração análoga a das variações de Schiffer na teoria de superfícies de Riemann, conforme [30]. Esses movimentos foram introduzidos por Tan em [34] para estruturas projetivas com pontos de ramificação simples e então generalizados em [6] para pontos de ramificação de ordem superior. As variações de Schiffer, em particular os movimentos de pontos de ramificação, produzem deformações da estrutura projetiva sem alterar a representação de monodromia e em geral não preservam a estrutura complexa subjacente.

Essa cirurgia nos permite mudar a posição de um ponto de ramificação, podendo, eventualmente, levar um ponto de ramificação à cúspide, colapsar dois ou mais pontos de ramificação ou separar pontos de ramificação de ordem superior em outros pontos de ramificação de ordem inferior. A partir dela, é possível mostrar a não-unicidade de estruturas projetivas com mesma representação de monodromia como é o caso do resultado de Calsamiglia, Deroín e Francaviglia em [6] que provam que duas estruturas projetivas ramificadas em superfícies compactas com mesma holonomia quasi-fuchsiana e mesmo grau de ramificação são relacionadas por um movimento de pontos de ramificação.

Podemos generalizar a cirurgia quando uma das singularidades envolvida é do tipo fuchsiana usando a descrição topológica/geométrica das cartas projetivas ao redor das cúspides.

No último capítulo serão dadas interpretações álgebra-geométricas para estruturas projetivas do tipo fuchsiana, para isso será obtida uma versão da Proposição 11.2.2 de [12] que nos dá uma relação entre a representação de monodromia e o grau de *branching*.

Dado $\pi : P \rightarrow S$ um $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre S associado à representação de monodromia

$\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana em S . Esse fibrado vem munido de uma folheação de Riccati \mathcal{F}_ρ com mesma monodromia obtida através de uma compactificação da suspensão da representação ρ . A aplicação *developing* da estrutura projetiva definida em S define uma seção holomorfa não-trivial σ do fibrado $\pi : P \rightarrow S$ e não-invariante por \mathcal{F}_ρ .

Teorema. *Sob essas condições, a autointerseção de $\sigma(S)$ em P é*

$$\sigma(S) \cdot \sigma(S) = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) + \chi(S) - k_0,$$

onde k_0 representa o número de fibras invariantes à folheação \mathcal{F}_ρ .

A fórmula obtida relacionará invariantes topológicos da superfície com os índices de tangências da folheação de Riccati com a seção holomorfa do fibrado suspensão e sua autointerseção.

Finalmente, obteremos o seguinte corolário:

Corolário. *Dadas \mathcal{F} uma folheação de Riccati e σ uma seção do fibrado não-invariante pela \mathcal{F} , temos que*

$$\text{tang}(\mathcal{F}, \sigma) = \sigma^2 + 2g - 2 + k_0,$$

onde g é o gênero da superfície de Riemann de base e k_0 é o número de folhas verticais de \mathcal{F} .

Mostraremos ainda no Capítulo 5 que o problema de, dada uma monodromia $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, minimizar o grau de ramificação de uma estrutura projetiva singular de tipo fuchsiana em uma superfície S com representação ρ se traduz em minimizar o índice $\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S))$ de uma folheação e uma seção σ do fibrado com uma compactificação específica que definem uma estrutura projetiva.

Generalizaremos a definição de grau de ramificação para estruturas projetivas ramificadas, de fato, seguirá do Teorema de Existência que ao redor de cada ponto singular p da estrutura projetiva do tipo fuchsiana σ com monodromia dada ρ as cartas projetivas são definidas por $z^{\alpha+n_p}$, $0 < \Re\alpha \leq 1$ ou $\log z + \frac{1}{z^{n_p}}$. Vamos definir como $n_p \in \mathbb{Z}$ o excesso de ângulo em cada ponto singular e a soma $e(\sigma) = \sum_{p \in S} n_p$ de excessos de ângulos da estrutura projetiva σ . Obteremos o seguinte resultado de representações que não são realizadas como monodromia de estruturas projetivas do tipo fuchsiana com soma de excessos de ângulos mínima:

Proposição. *Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana da monodromia ρ vai ter soma de excessos de ângulos ímpar se, na compactificação mínima:*

1. ρ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$ e o número de cúspides com monodromia local não-trivial for ímpar; ou
2. ρ não se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$ e o número de cúspides com monodromia local não-trivial for par.

Vamos definir $d(\rho) = \min\{e(\sigma) : \sigma \text{ é estrutura projetiva do tipo fuchsiana com monodromia } \rho\}$. Para os casos da proposição teremos necessariamente $d(\rho) \geq 1$. Resta em aberto determinar se nesses casos $d(\rho) = 1$, e nos outros $d(\rho) = 0$.

Esta tese está organizada como segue:

- **Capítulo 1:** Definiremos conceitos importantes que serão usados ao longo do texto, como as estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana. Mostraremos algumas formas equivalentes de definir estruturas projetivas complexas sobre superfícies de Riemann.
- **Capítulo 2:** Provaremos o teorema de existência de estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana com representação monodromia dada e analisaremos a relação entre estruturas projetivas com mesma monodromia e o *flip* de uma fibra.
- **Capítulo 3:** Estudaremos a estrutura projetiva de um ponto de vista analítico, analisando a derivada Schwarziana das cartas projetivas singulares encontradas no Capítulo 2 e soluções de equações Schwarzianas dada uma diferencial quadrática meromorfa com polo duplo.
- **Capítulo 4:** Faremos um estudo local da geometria/topologia da aplicação *developing* ao redor de uma cúspide e estenderemos a cirurgia de movimento de pontos de ramificação quando uma das singularidades é do tipo fuchsiana.
- **Capítulo 5:** Faremos interpretações álgebra-geométricas para estruturas projetivas do tipo fuchsiana onde obteremos fórmulas envolvendo invariantes topológicos da superfície, autointerseção de curvas e índices de tangências. Descreveremos as representações que não são realizadas como monodromia de estruturas projetivas do tipo fuchsiana com soma de excessos de ângulos mínima.

Capítulo 1

Estruturas projetivas

Neste capítulo, definiremos conceitos básicos que serão importantes ao longo do texto, como por exemplo: superfície de Riemann de tipo finito, estruturas projetivas complexas e os tipos de singularidades permitidos e suas relações com seções de fibrados provenientes de uma suspensão de uma representação.

1.1 Estruturas projetivas complexas

Nesta seção, fixaremos notações onde definiremos superfície de Riemann, em particular as de tipo finito que serão aquelas trabalhadas ao longo do trabalho, e estruturas projetivas complexas de diversas maneiras distintas. Dentre essas definições para estruturas projetivas complexas, vamos focar na definição que provém de uma seção de um fibrado suspensão de uma representação.

1.1.1 Conceitos

Definição 1.1. Uma superfície de Riemann é uma superfície topológica S munida de um atlas de homeomorfismos locais definidos em abertos de S com valores no plano complexo \mathbb{C} , onde as mudanças de cartas são holomorfas, i.e., uma superfície é de Riemann se ela está munida de uma estrutura complexa.

Ela é de tipo finito se é biholomorfa a $S^* := S \setminus P$, onde S é uma superfície de Riemann compacta e P é um subconjunto finito $\{p_1, \dots, p_k\}$ de S , chamamos os p_i de cúspides.

Salvo menção contrária, todas as superfícies do texto são conexas.

Definição 1.2. Em uma superfície S , uma estrutura projetiva complexa é dada por um atlas $\{U_i, f_i\}$ de homeomorfismos $f_i : U_i \rightarrow V_i$, $V_i \subset \mathbb{CP}^1$, tais que as mudanças de cartas $f_i = \phi_{ij} \circ f_j$ são restrições de automorfismos de \mathbb{CP}^1 , ou seja, transformações de Möbius $\phi_{ij} \in PGL_2(\mathbb{C})$.

Existe um único atlas maximal, chamado atlas projetivo, definindo a estrutura projetiva complexa, obtida da anterior adicionando todas as cartas coordenadas $\{(U_i, \phi \circ f_i)\}$ quando ϕ percorre $PGL_2(\mathbb{C})$.

Um caso especial de estrutura projetiva complexa é o afim onde as mudanças de cartas são transformações afins.

Uma estrutura projetiva complexa induz uma estrutura complexa sobre a superfície, pois as transformações de Möbius definem biholomorfismos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ em $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Chamaremos a de estrutura complexa subjacente.

Dada uma superfície de Riemann compacta de gênero g , segue do Teorema da Uniformização das superfícies de Riemann que considerando $p : U \rightarrow S$ seu recobrimento universal, U será biholomorfo à esfera de Riemann $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, ao plano complexo \mathbb{C} , ou ao disco unitário $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$, quando $g = 0, 1$ ou ≥ 2 , respectivamente.

O atlas definido em S pelas determinações $p^{-1} : S \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ define uma estrutura projetiva complexa em S compatível com a estrutura complexa. De fato, duas determinações de p^{-1} diferem por uma pós-composição com um elemento de $Aut(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) = PGL_2(\mathbb{C})$. Desse modo, concluímos que toda estrutura complexa em S é subjacente a uma estrutura projetiva complexa.

Mas existem estruturas projetivas diferentes sobre uma mesma estrutura complexa. De fato, isso é conteúdo do seguinte teorema provado por Gunning:

Teorema 1.1. (Corolário 2, [20]) *Toda superfície de Riemann fechada S admite uma estrutura projetiva complexa compatível com a estrutura complexa dada. O conjunto de todas essas estruturas projetivas estão em correspondência 1-a-1 com o espaço vetorial das diferenciais quadráticas holomorfas na superfície.*

Veremos no Capítulo 3 como se define essa correspondência através da derivada Schwarziana e vai seguir da Fórmula de Riemann-Roch que a dimensão desse espaço vetorial é $3g - 3$, quando S é compacta de gênero $g \geq 2$.

Quando S é aberta, ela admite uma estrutura afim complexa e o conjunto de tais estruturas afins estão em correspondência 1-a-1 com o conjunto das diferenciais abelianas¹ na superfície (Corolário 1, [20]).

Dado um atlas projetivo em S , tomamos uma carta coordenada inicial (U_0, f_0) podemos estender analiticamente ao longo de um caminho γ iniciando de um ponto $z_0 \in U_0$.

De fato, cobrindo γ por um número finito de cartas coordenadas projetivas, digamos $(U_0, f_0), (U_1, f_1), \dots, (U_n, f_n)$, podemos modificá-las da seguinte maneira. Como $f_0 = \phi_{01} \circ f_1$ em $U_0 \cap U_1$, podemos substituir a carta f_1 por $\tilde{f}_1 := \phi_{01} \circ f_1$ que é bem-definida em U_1 e estende f_0 . Depois, substituímos f_2 por $\tilde{f}_2 := \phi_{01} \circ \phi_{12} \circ f_2$ que coincide com \tilde{f}_1 em $U_1 \cap U_2$. E continuando este processo, chegamos na carta $\tilde{f}_n := \phi_{01} \circ \dots \circ \phi_{n-1n} \circ f_n$ que é a continuação analítica de f_0 ao longo de γ .

Logo, a carta (U_0, f_0) se estende, depois de levantar ao recobrimento universal, a uma submersão $f : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que chamamos de aplicação developing da estrutura projetiva e denotaremos por dev .

Por construção, a monodromia da dev ao longo de um laço nos dá

$$dev(\gamma \cdot x) = \phi_\gamma \circ dev(x), \quad \phi_\gamma \in PGL_2(\mathbb{C}), \quad \forall \gamma \in \pi_1(S, z_0) \text{ e } x \in \tilde{S} \quad (1.1)$$

onde $\gamma \cdot x$ é a ação de $\pi_1(S, z_0)$ no recobrimento universal e $\phi_\gamma = \phi_{01} \circ \dots \circ \phi_{n-1n}$. Observemos que ϕ_γ só depende da classe de homotopia de γ , então, definimos a representação

¹Localmente é uma forma $h(z)dz$ onde $h(z)$ é uma função holomorfa.

de monodromia

$$\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C}); \rho([\gamma]) = \phi_\gamma. \quad (1.2)$$

Chamamos a imagem de ρ de grupo de monodromia da *dev*.

Dizemos que *dev* é *equivariante* em relação à representação de monodromia ρ definida em 1.2 se satisfazem a igualdade 1.1, i.e., $dev(\gamma \cdot x) = \rho([\gamma]) \circ dev(x)$, $\forall \gamma \in \pi_1(S, z_0)$ e $x \in \tilde{S}$.

A aplicação *developing dev* é definida pela estrutura projetiva a menos de escolha da carta inicial (U_0, f_0) e é única a menos de pós-composição com uma $\phi \in PGL_2(\mathbb{C})$. Portanto, a representação de monodromia de $\phi \circ dev$ é $[\gamma] \mapsto \phi \circ \phi_\gamma \circ \phi^{-1}$.

Inspirando-se nessa construção temos uma definição alternativa para estrutura projetiva complexa.

Definição 1.3. Dado $\tilde{S} \rightarrow (S, z_0)$ um recobrimento universal de S baseado em z_0 . Um par (dev, ρ) onde $dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ é um homeomorfismo local equivariante em relação à representação de monodromia $\rho : \pi_1(S, z_0) \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ define uma estrutura projetiva complexa sobre S .

Duas estruturas projetivas sobre S onde as aplicações *developing* diferem por uma homografia são equivalentes.

Relembremos que as transformações de Möbius normalizadas correspondem a elementos de $PSL_2(\mathbb{C})$ segundo

$$T(w) = \frac{aw + b}{cw + d} \longleftrightarrow \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ com } ad - bc = 1, \quad (1.3)$$

e uma maneira de classificá-las é de acordo com o quadrado do traço da matriz correspondente:

- **Parabólica:** se tem exatamente um ponto fixo no plano estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ou, equivalentemente, se não é a identidade e seu traço satisfaz $tr^2 T = (a + d)^2 = 4$. As transformações parabólicas são conjugadas a $w \mapsto w + 1$.
- **Elíptica:** se tem dois pontos fixos em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, seu traço satisfaz $0 \leq tr^2 T < 4$, e é conjugado a um elemento da forma $w \mapsto e^{2i\theta} w$, para $0 < \theta < \pi$.
- **Loxodrômica:** se tem dois pontos fixos em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, seu traço satisfaz $tr^2 T \notin [0, 4]$, e T é conjugada a $w \mapsto \lambda^2 w$, onde $|\lambda| \neq 1$. No caso particular de λ real, positivo diferente de 0 e 1, a transformação é chamada hiperbólica.

Deste modo, seguindo essa classificação, denominaremos as representações de monodromia geradas por um único elemento de cíclicas assim como os elementos do grupo de monodromia.

1.1.2 Suspensão de uma representação

Nesta subseção construiremos um exemplo de fibrado folheado sobre uma superfície com a propriedade da folheação definida no espaço total do fibrado ser transversal às suas fibras.

Sejam S uma superfície de Riemann, $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ uma representação e $p : \tilde{S} \rightarrow S$ o recobrimento universal de S .

Em $\tilde{S} \times \mathbb{CP}^1$ definimos uma ação dada por

$$(x, w) \sim (x', w') \iff x' = \gamma \cdot x \text{ e } w' = \rho([\gamma])(w), [\gamma] \in \pi_1(S).$$

Essa ação é propriamente descontínua e livre, assim podemos considerar o quociente $P = \tilde{S} \times \mathbb{CP}^1 / \sim$.

A aplicação $\tilde{S} \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow S$ dada por $(x, w) \mapsto p(x)$ é invariante pela ação e induz uma submersão global $\pi : P \rightarrow S$, definindo um \mathbb{CP}^1 -fibrado holomorfo sobre S .

Finalmente, a folheação horizontal definida por $\{w = cte\}$ é também preservada pela ação e define uma folheação \mathcal{F} transversal a todas as \mathbb{CP}^1 -fibras em P . Denotaremos a suspensão de uma representação ρ por $S \times_\rho \mathbb{CP}^1$.

Observação 1.1. Em linguagem de (G, X) -estruturas, $S \times_\rho \mathbb{CP}^1$ define um $(PSL_2(\mathbb{C}), \mathbb{CP}^1)$ -fibrado folheado associado a ρ .

1.1.3 Estruturas projetivas complexas e seções de \mathbb{CP}^1 -fibrados

Nesta subseção veremos a relação entre estruturas projetivas complexas e uma seção de um fibrado suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$.

No capítulo 1 de sua tese [13], Goldman descreveu que cada classe de (G, X) -estruturas sobre uma variedade diferenciável S corresponde a uma seção diferenciável de um fibrado plano sobre S de fibra difeomorfa a X , transversa à folheação.

Teorema 1.2. *Dada uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow G \subset Isom(X)$. Existe uma bijeção natural entre (G, X) -estruturas com monodromia ρ em S e as seções do fibrado $S \times_\rho X$ transversais à folheação \mathcal{F} .*

Demonstração. Ver Teorema 1.8 em [13], p. 18. ■

No caso particular de estruturas projetivas complexas em superfícies, seja (dev, ρ) um par associado a uma estrutura projetiva complexa em S , ou seja, $dev(\gamma \cdot x) = \rho(\gamma) \circ dev(x)$, $\forall x \in \tilde{S}, \forall [\gamma] \in \pi_1(S)$.

Segue da equivariância da dev pela ρ que o gráfico da dev é invariante em $\tilde{S} \times \mathbb{CP}^1$ pela ação definida para construir a suspensão da representação ρ , logo define uma seção holomorfa $\sigma : S \rightarrow S \times_\rho \mathbb{CP}^1$ do fibrado. Como a aplicação *developing* dev é regular, temos que seu gráfico é transversal às folhas de \mathcal{F} e portanto σ é transversal à folheação da suspensão.

Reciprocamente, dada uma seção holomorfa $\sigma : S \rightarrow S \times_\rho \mathbb{CP}^1$ do fibrado sobre S de uma suspensão da representação ρ transversal à folheação \mathcal{F} , em cartas trivializadoras do fibrado $\sigma \circ p$ onde $p : \tilde{S} \rightarrow S$ é o recobrimento universal de S temos $\sigma \circ p(x) = (x, \sigma_1(x))$, podemos vê-la como um gráfico de uma função $\sigma_1 : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ pois uma seção é sempre transversal ao fibrado ($\pi \circ \sigma = id$). Logo, basta tomar $dev = \sigma_1$ e ρ como sendo a mesma da representação suspensa. A dev é equivariante pela ρ , de fato, $\forall x \in \tilde{S}$,

$$dev(\gamma \cdot x) = \sigma_1(\gamma \cdot x) = \rho([\gamma]) \cdot \sigma_1(x) = \rho([\gamma]) \cdot dev(x)$$

onde a penúltima igualdade segue da ação de $\rho(\pi_1(S))$ em \mathbb{CP}^1 .

Observemos que as *dev* equivalentes nos dão seções equivalentes onde as representações de monodromia estão bem-definidas a menos de conjugação por elementos de $PGL_2(\mathbb{C})$.

Logo, esta construção nos dá um dicionário entre estruturas projetivas complexas e seções transversais à folheação de uma suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$.

É consequência do Teorema de Gallo-Kapovich-Marden em [12] que existe uma seção transversal do fibrado $S \times_\rho \mathbb{CP}^1$ suspensão da representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, onde S é superfície fechada e $g(S) \geq 2$, se ρ é não-elementar e ρ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$.

1.2 Estruturas projetivas singulares

Nesta seção, definiremos o tipo de estrutura projetiva singular que adotaremos aqui e detalharemos um tipo particular: as estruturas projetivas ramificadas.

1.2.1 Conceitos

Definição 1.4. Uma estrutura projetiva singular em S é uma estrutura projetiva complexa em $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, onde $\{p_1, \dots, p_k\} \subset S$ é um subconjunto finito de pontos de S .

Cada p_i será chamado de singularidade da estrutura. A restrição de uma estrutura projetiva a um aberto $U \subset S^*$ produz uma estrutura projetiva em U e podemos considerar como germe no anel local as estruturas e considerar equivalência de germes de estruturas projetivas ao redor de seus pontos singulares.

A monodromia de uma singularidade é a monodromia da restrição da estrutura projetiva a um disco ao redor dela.

Exemplo 1.1. Em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, \infty\}$ com monodromia não-trivial, podemos construir cartas projetivas como sendo os ramos da aplicação multivaluada z^α com $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ fixado e monodromia ao redor das cúspides conjugada a $w \mapsto e^{2\pi i \alpha} w$, assim como os ramos de $\log z + \frac{1}{z^n}$ também definirão uma estrutura projetiva singular com monodromia $w \mapsto w + 2\pi i$.

Em qualquer superfície aberta sem hipóteses nas cúspides sempre é possível construir uma estrutura projetiva complexa com monodromia trivial em S^* .

Exemplo 1.2. Em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ temos que a aplicação $f : \mathbb{CP}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ define uma estrutura projetiva complexa em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0\}$ com monodromia trivial. De maneira geral, para todo $p \in \mathbb{C}$, a aplicação $f : \mathbb{CP}^1 \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ dada por $f(z) = e^{\frac{1}{z-p}}$ define uma estrutura projetiva complexa em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{p\}$ com monodromia trivial e singularidade essencial em p .

Podemos construir estruturas projetivas complexas com monodromia trivial em toda superfície de Riemann aberta X , isso é conteúdo de um resultado de Gunning e Narasimhan [21]:

Teorema 1.3. (*Gunning/Narasimhan [21]*) *Toda superfície de Riemann aberta X admite uma imersão holomorfa no plano complexo, isto é, existe uma aplicação holomorfa $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ que é um homeomorfismo local.*

Logo, tomando o gráfico da aplicação F obtida no Teorema como sendo a seção do fibrado trivial $\pi : X \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow X$, esta seção é transversal à folheação horizontal e portanto define uma estrutura projetiva complexa em X mas sem controle nas cúspides de X (tipo de singularidade, se são isoladas, etc.).

Neste trabalho, consideraremos o seguinte tipo de singularidade:

Definição 1.5. Uma singularidade p da estrutura projetiva singular em S é do tipo fuchsiana se existe ao redor do ponto p uma aplicação que a menos de mudança coordenada local holomorfa é dada por z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$, ou $\log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, e essa aplicação é a carta da estrutura projetiva fora do ponto p .

No primeiro caso, a monodromia da singularidade é $w \mapsto e^{2\pi i \alpha} w$ e no segundo é uma monodromia parabólica $w \mapsto w + 2\pi i$.

As singularidades do tipo fuchsiana e monodromia trivial têm uma descrição topológica simples que provém de recobrimentos ramificados.

Sejam R, R' e S superfícies de Riemann. Dizemos que a aplicação holomorfa $f : R \rightarrow S$ não-constante é um recobrimento ramificado de ordem n se existe um conjunto analítico $E \subset S$ tal que $f : R \rightarrow S$ é sobrejetiva e própria (para todo $K \subset\subset S$ compacto, $f^{-1}(K) \subset R$ é compacto) e $f : R \setminus f^{-1}(E) \rightarrow S \setminus E$ é um recobrimento de ordem n sobre $S \setminus E$.

Chamamos E de conjunto singular e $f^{-1}(E)$ de conjunto de ramificação do recobrimento ramificado.

Dizemos que dois recobrimentos ramificados com mesma base $f : R \rightarrow S$ e $f' : R' \rightarrow S$ são *equivalentes* se existe um biholomorfismo $g : R \rightarrow R'$ tal que $f = f' \circ g$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{g} & R' \\ & \searrow f & \downarrow f' \\ & & S \end{array}$$

Definição 1.6. Uma singularidade p de uma estrutura projetiva singular é dita ponto de ramificação se na vizinhança de p em S existe um recobrimento ramificado que é uma carta da estrutura projetiva na vizinhança de p .

Nesse caso, a carta local é holomorficamente equivalente a $z \mapsto z^n$, $n \geq 2$, e a monodromia da singularidade é trivial.

Proposição 1.1. *Um recobrimento ramificado D de ordem n no disco \mathbb{D} e conjuntos singular e de ramificação $\{0\}$ é equivalente localmente a $z^n : (\mathbb{D}, 0) \rightarrow (\mathbb{D}, 0)$.*

Demonstração. Seja $D : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ um recobrimento de n folhas. Primeiramente, vamos puxar a estrutura complexa de $\mathbb{D} \setminus \{0\}$ através da D para $V \setminus \{0\}$, e

obteremos uma estrutura complexa induzida nela. Como $D : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{D} \setminus \{0\}$ é uma aplicação holomorfa e limitada, segue do Teorema de Extensão de Riemann que D se estende holomorficamente a V .

Tomando a carta holomorfa $\tilde{\phi} : \tilde{V} \subset V \rightarrow \mathbb{D}$ com $\tilde{\phi}(0) = 0$ temos que $P = D \circ \tilde{\phi}^{-1}$ é holomorfa.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{\phi}} & \mathbb{D} \\ & \searrow D & \downarrow P \\ & & \mathbb{D} \end{array}$$

Como $P(0) = 0$, podemos escrever como $P(w) = w^m g(w)$, com $g(0) \neq 0$, e escolhemos um ramo holomorfo r tal que $(r(w))^m = g(w)$. Considerando $v(w) = wr(w)$ como $r(0) \neq 0$ temos que $v'(0) \neq 0$ e portanto v é localmente invertível.

Colocando $\psi := v \circ \tilde{\phi}$, obtemos

$$(D \circ \psi^{-1})(z) = (D \circ \tilde{\phi}^{-1} \circ v^{-1})(z) = (P \circ v^{-1})(z) = z^m.$$

Como z^n tem essa mesma caracterização, segue da unicidade de recobrimentos que $n = m$. ■

Definição 1.7. Uma estrutura projetiva singular em S é do tipo fuchsiana se todas suas singularidades são do tipo fuchsiana.

Nem sempre é possível construir estruturas projetivas do tipo fuchsiana em determinadas superfícies fixando a representação de monodromia e o conjunto singular. De fato, segue da seguinte proposição uma classe de superfícies que não admite esse tipo de estrutura projetiva.

Proposição 1.2. Não existe recobrimento ramificado $f : S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ com conjunto singular unitário para S superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 1$.

Demonstração. Suponhamos que $f : S \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ um recobrimento ramificado de ordem $m \geq 1$ com um único ponto singular p , então mostraremos que $g = 0$. Puxando a estrutura complexa pela f , temos que f é uma aplicação holomorfa e segue da Fórmula de Riemann-Hurwitz que

$$2 - 2g = 2m - v_p + 1$$

onde v_p é a ordem de ramificação de p . Logo, $v_p = 2g + 2m - 1$. Como $v_p \leq m$, segue que $m \leq 1 - 2g \leq 1$. Portanto, $m = 1$, $v_p = 2g + 1 = 1$, e assim $g = 0$. ■

Segue imediatamente dessa proposição o seguinte corolário:

Corolário 1.1. Toda estrutura projetiva do tipo fuchsiana com monodromia trivial numa superfície compacta S de gênero $g \geq 1$ possui pelo menos duas singularidades.

Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ onde S é superfície compacta, ao tentarmos realizá-la como monodromia de uma estrutura projetiva em S nem sempre teremos as singularidades apenas nas cúspides, como é o caso das superfícies de tipo finito de gênero maior que ou igual a 1 com monodromia trivial e uma cúspide, seguirá do Corolário 1.1 que é necessário acrescentar ao menos um ponto de ramificação extra.

Podemos reescrever o Corolário 1.1 na linguagem de seções do fibrado suspensão da representação de monodromia sobre a superfície:

Corolário 1.2. *Numa superfície compacta de gênero $g \geq 1$ toda seção do fibrado suspensão $S \times_{Id} \mathbb{CP}^1$ possui no mínimo duas tangências com a folheação horizontal.*

1.2.2 Estruturas projetivas ramificadas

Uma estrutura projetiva ramificada sobre uma superfície S é uma estrutura projetiva singular em S onde todas as suas singularidades são pontos de ramificação. Assim como em estruturas projetivas complexas, dada uma estrutura projetiva ramificada em S toda carta local pode ser estendida a uma aplicação $dev : \tilde{S} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ equivariante em relação a uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ e essa aplicação está bem-definida a menos de pós-composição por elementos de $PSL_2(\mathbb{C})$.

De forma análoga ao dicionário obtido na subseção 1.1.3, existe também um dicionário entre estruturas projetivas ramificadas e seções transversais exceto em um número finito de pontos à folheação de uma suspensão de uma representação.

Seja (dev, ρ) um par associado a uma estrutura projetiva com pontos de ramificação em S . Os pontos em que a dev não for regular, i.e., $x \in \tilde{S}$ tais que $dev'(x) = 0$, são os pontos onde a seção dada pelo gráfico da dev e a folheação são tangentes. Segue da regra da cadeia que as dev equivalentes nos dão seções equivalentes com os mesmos pontos de não-transversalidade e as representações de monodromia estão bem-definidas a menos de conjugação por elementos de $PGL_2(\mathbb{C})$.

Vimos na subseção 1.1.3 que uma estrutura projetiva complexa em uma superfície de Riemann S pode ser definida com uma seção holomorfa não-invariante e não-trivial do fibrado folheado, dado pela suspensão da representação, onde a folheação é regular e transversalmente projetiva e a seção é transversa ao fibrado (isso sempre acontece pela definição de seção de um fibrado) e à folheação em todos os pontos. As cartas da estrutura projetiva complexa são dadas pela projeção da seção ao longo das folhas numa fibra.

Quando a seção tem um número finito de pontos onde falham a transversalidade com a folheação regular, temos que as cartas locais da estrutura projetiva ramificada são dadas pela projeção da curva $\sigma(S)$ ao redor de um ponto, onde $\sigma(S)$ é a imagem da seção σ no espaço total do fibrado, ao longo das folhas numa fibra F_1 , que é sempre transversal à folheação. Isso pode ser calculado através da imagem da $\sigma(S)$ pela integral primeira local h composta com a inversa da integral primeira local restrita à fibra F_1 .

Logo, as submersões locais que definem a folheação regular restritas à curva $\sigma(S)$ definem cartas da estrutura projetiva ramificada em S . Temos também que os pontos de tangência entre $\sigma(S)$ e a folheação produzem os pontos críticos das cartas.

No caso de estruturas projetivas do tipo fuchsiana gerais, a princípio não temos controles sobre as cúspides. De fato, uma carta local da estrutura projetiva do tipo fuchsiana se estende a uma aplicação $dev : \tilde{S}^* \rightarrow \mathbb{CP}^1$ equivariante a uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, onde $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ e as cartas locais ao redor das cúspides p_i são do tipo $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $z \mapsto \log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$. De maneira análoga à construção acima temos um dicionário entre as estruturas projetivas ramificadas em S^* e as seções com no máximo um número finito de pontos de não-transversalidade com a folheação definida na suspensão $S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ de ρ .

Capítulo 2

Teorema de existência de estruturas projetivas do tipo fuchsiana

Neste capítulo, provaremos o seguinte teorema de existência de estruturas projetivas singulares com representação de monodromia fixada cujas singularidades são do tipo fuchsianas.

Teorema de Existência. *Sejam S uma superfície de Riemann compacta de gênero qualquer e $\{p_1, p_2, \dots, p_k\} \subset S$ um subconjunto finito com $S \setminus S^* = \{p_1, \dots, p_k\}$. Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ existe uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana em S com representação de monodromia ρ .*

Mas antes disso, detalharemos a compactificação do fibrado suspensão de uma representação de monodromia sobre uma superfície de Riemann de tipo finito através dos modelos locais de Brunella [5] e mostraremos a existência de seções holomorfas não-triviais, não-invariantes no fibrado suspensão compactificado.

2.1 Compactificação de \mathbb{CP}^1 -fibrados

Nesta seção, mostraremos que podemos compactificar o fibrado suspensão $S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ como um \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre S munido de uma folheação holomorfa singular \mathcal{F}_ρ . Nessa escolha de compactificação, as fibras sobre as cúspides são curvas invariantes e contêm uma ou duas singularidades da folheação. Essas folheações são conhecidas como folheações de Riccati.

Existem modelos locais que foram introduzidos por M. Brunella e podem ser encontrados em [5] que nos permitem compactificar o \mathbb{CP}^1 -fibrado suspensão e a sua folheação sobre as cúspides.

Antes disso, precisaremos de um resultado prévio com o qual poderemos colar modelos locais ao redor das cúspides à suspensão. Mais detalhes sobre folheações transversais a fibrados podem ser vistos em [7].

Seja $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ o disco unitário centrado na origem e $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$. Denotaremos por $(\mathbb{D}^*, \mathcal{F}, \pi)$ uma folheação de Riccati \mathcal{F} definida em $\mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ com π um \mathbb{CP}^1 -fibrado transversal à folheação \mathcal{F} .

Proposição 2.1. *Sejam $(\mathbb{D}^*, \mathcal{F}_1, \pi_1)$ e $(\mathbb{D}^*, \mathcal{F}_2, \pi_2)$ folheações de Riccati. Existe um biholomorfismo $\phi : \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ que leva folhas de \mathcal{F}_1 a folhas de \mathcal{F}_2 e tal que π_1 e π_2 são fibrados equivalentes se, e somente se, as representações de holonomia são analiticamente conjugadas.*

Demonstração. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^*$, sejam $\rho_1 : \pi_1(\mathbb{D}^*, z_1) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ e $\rho_2 : \pi_2(\mathbb{D}^*, z_2) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ as representações de holonomias de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , respectivamente.

Suponhamos que exista um biholomorfismo $\phi : \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$. Identificaremos por \mathbb{CP}^1 as fibras transversais $\pi_1^{-1}(z_1)$ e $\pi_2^{-1}(z_2)$.

Seja $[\gamma]$ o gerador de $\pi_1(\mathbb{D}^*, z_1)$, as holonomias $\rho_1([\gamma]) : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ e $\rho_2([\phi|_{\mathbb{D}^*}(\gamma)]) : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ satisfazem $\phi \circ \rho_1([\gamma]) = \rho_2([\phi|_{\mathbb{D}^*}(\gamma)]) \circ \phi$. Logo, as representações de holonomia de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são analiticamente conjugadas.

Reciprocamente, seja $\varphi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ o biholomorfismo que conjuga as representações de holonomia ρ_1 e ρ_2 , ou seja, dado $[\gamma]$ o gerador de $\pi_1(\mathbb{D}^*, z_1)$, temos que

$$h = \rho_1([\gamma]) = \varphi^{-1} \circ \rho_2([\gamma]) \circ \varphi = \varphi^{-1} \circ \tilde{h} \circ \varphi. \quad (2.1)$$

Como a folheação é de Riccati, podemos supor que as fibras são transversais às folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 .

Para $z \neq 0$, vamos definir

$$\phi(z, w) = (z, \tilde{h}_{\gamma_1} \circ \varphi \circ h_{\gamma_1}^{-1}(w)),$$

onde γ_1 é uma curva ligando z_1 a z com suporte em $L_0 := \overline{\mathbb{D}} \times \{0\}$, e h_{γ_1} e \tilde{h}_{γ_1} são as holonomias ao longo de γ_1 de \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , respectivamente.

Notemos que essa definição não depende da escolha de γ_1 . Sabemos que holonomias só dependem das classes de homotopia.

Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas de z a z_1 . Queremos provar que

$$\tilde{h}_{\gamma_1} \circ \varphi \circ h_{\gamma_1}^{-1} = \tilde{h}_{\gamma_2} \circ \varphi \circ h_{\gamma_2}^{-1},$$

que é equivalente a

$$\tilde{h}_{\gamma_2}^{-1} \circ \tilde{h}_{\gamma_1} \circ \varphi \circ h_{\gamma_1}^{-1} \circ h_{\gamma_2} = \varphi. \quad (2.2)$$

Se denotamos por $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ o laço obtido seguindo γ_1 e depois γ_2 na direção oposta, então 2.2 é equivalente a

$$\tilde{h}_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}} \circ \varphi \circ h_{\gamma_1 * \gamma_2^{-1}}^{-1} = \varphi. \quad (2.3)$$

Como $\gamma_1 * \gamma_2^{-1}$ é um laço com ponto base z_1 e $[\gamma_1 * \gamma_2^{-1}] = [\gamma]$, obtemos que a igualdade 2.3 segue diretamente de 2.1.

Então ϕ é bem-definida e holomorfa em $\mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ pois é a composição de aplicações holomorfas, mais ainda, ela define uma equivalência holomorfa entre as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 em $\mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ levando folhas em folhas e uma equivalência de fibrados que leva fibras $\pi_1^{-1}(z)$ em fibras $\pi_2^{-1}(z)$, i.e., $\pi_1 = \pi_2 \circ \phi$. ■

Observações 2.1. 1. Como uma folheação de Riccati é uma suspensão de uma representação em um grupo Kleiniano temos que no Teorema 2 p. 98 de [7] é provada a unicidade da suspensão de representações de holonomia conjugadas.

2. A holonomia de uma folha da folheação suspensão é a monodromia do fibrado folheado. Isso é um fato geral, a holonomia é a monodromia se, e somente se, o fibrado é plano (o atlas trivializador tem aplicações de transição localmente constantes).

Lema 2.1. *Toda suspensão $S^* \times_\rho \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ admite uma compactificação $\pi : \overline{S^* \times_\rho \mathbb{C}\mathbb{P}^1} \rightarrow S$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre S , munida de uma folheação Riccati \mathcal{F}_ρ .*

Demonstração. Dada a suspensão $S^* \times_\rho \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ da representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ obtemos uma folheação regular em $S^* \times_\rho \mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Seja D_i um disco (imagem de um disco do plano complexo por uma carta da estrutura complexa de S) em S ao redor de p_i , temos que a folheação sobre $D_i \setminus \{p_i\}$ é determinada por $\rho(\partial D_i) \in PSL_2(\mathbb{C})$. Escolhemos um biholomorfismo que leva p_i a 0 e D_i é levado em \mathbb{D} .

Podemos escolher em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ uma folheação de Riccati singular com a monodromia desejada, onde em coordenadas trivializadoras $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ do fibrado ao redor da fibra invariante, a folheação será gerada por uma 1-forma meromorfa definida em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ racional em w (ou, de maneira dual, gerado por campos de vetores). Para cada tipo de monodromia escolheremos os seguintes modelos:

- (i) No caso de monodromia não-parabólica, conjugada a $w \mapsto e^{2\pi i \alpha_i} w$, o campo vetorial $z \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_i w \frac{\partial}{\partial w}$ e a 1-forma $\alpha_i w dz - z dw = 0$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, ou
- (ii) No caso de monodromia parabólica, conjugada a $w \mapsto w + 1$, o campo vetorial $z \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}$ e a 1-forma $dz - z dw = 0$, ou
- (iii) No caso de monodromia trivial, conjugada à identidade, o campo vetorial $z \frac{\partial}{\partial z} + mw \frac{\partial}{\partial w}$ e a 1-forma $mw dz - z dw = 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$.

Logo, pela proposição 2.1 as folheações sobre $D_i \setminus \{p_i\}$ são biholomorfas e portanto podemos colar e obter uma folheação de Riccati singular em todo $\overline{S^* \times_\rho \mathbb{C}\mathbb{P}^1}$ onde sobre as cúspides de monodromia não-trivial possui fibras invariantes em $\{z = 0\}$ e uma ou duas singularidades.

No caso não-parabólico, a folheação é singular em $(0, 0)$ e $(0, \infty)$ com separatrizes $\{w = 0\}$ e $\{w = \infty\}$, e no caso parabólico possui uma singularidade sela-nó em $(0, \infty)$ e uma separatriz $\{w = \infty\}$. ■

Observação 2.1. Nessa compactificação, as fibras sobre as cúspides de monodromia não-trivial são sempre invariantes por \mathcal{F}_ρ . Nas cúspides de monodromia trivial, somente

no caso $m = 0$ em (iii) teríamos uma compactificação dada na vizinhança desses pontos pela folheação produto sem fibra invariante e singularidades.

2.2 Existência de seções em \mathbb{CP}^1 -fibrados

O objetivo desta seção é mostrar que no fibrado obtido no Lema 2.1 existe uma seção holomorfa genericamente transversal à folheação (isso é crucial para descrever as singularidades das estruturas projetivas obtidas através de seções holomorfas de $S^* \times_{\rho} \mathbb{CP}^1$). As referências principais dessa seção são [18], [2], [35], [19], [12].

Um fibrado folheado de uma suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ tem uma seção holomorfa invariante se, e só se, ρ tem pontos fixos. Cada ponto fixo determina uma seção holomorfa invariante transportando o ponto fixo pela holonomia da folheação. Logo, temos no máximo dois pontos fixos para representações não-triviais e se a representação for não-elementar o fibrado não vai ter seção invariante.

No caso de representações elementares, se a imagem estiver contida em um grupo conjugado de $Aff(\mathbb{C})$ ou em um grupo conjugado ao grupo de rotações da esfera $PSU_2(\mathbb{C})$ podemos ter dois pontos fixos e, portanto, teremos no máximo 2 seções invariantes.

Mostraremos que se a monodromia de uma folheação de Riccati em um \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre uma superfície de Riemann S é não-trivial, o fibrado tem pelo menos três seções holomorfas para garantir a existência de pelo menos uma não-invariante.

Sabemos que localmente, em cada trivialização do fibrado conseguimos infinitas seções, de fato, para qualquer $U \subset S$ aberto onde o fibrado trivializa, podemos definir uma seção $\sigma : U \rightarrow \pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{P}^1$ dada por $\sigma(z) = (z, f(z))$, com f função holomorfa em U . Já globalmente, vamos mostrar aqui de duas formas diferentes que sempre existe uma seção do fibrado compactificado.

A primeira forma provada por Graber, Harris e Starr é usando o conceito de variedade racionalmente conexa.

Definição 2.1. Uma variedade complexa X é racionalmente conexa se dados dois pontos gerais $p, q \in X$ eles estão contidos na imagem de uma aplicação $g : \mathbb{P}^1 \rightarrow X$.

Teorema 2.1. (1.1 de [18]) *Seja $f : X \rightarrow B$ um morfismo próprio de variedades complexas e B uma curva suave. Se a fibra geral de f é racionalmente conexa, então f tem uma seção.*

Como \mathbb{P}^1 é racionalmente conexa, segue desse teorema que o fibrado suspensão compactificado tem uma seção.

Outra forma de mostrar isso é usando um resultado de Tsen sobre \mathbb{CP}^1 -fibrados.

Teorema 2.2. ([2] p. 140) *Um \mathbb{CP}^1 -fibrado holomorfo sobre uma curva compacta suave sempre admite uma seção holomorfa.*

A ideia da prova desse teorema é usar a fórmula da adjunção, conforme Teorema 6.3 p. 22 de [2], para ver que todas as fibras são suaves e do ponto de vista diferenciável, segue do Teorema de Ehresmann que f é uma fibração localmente trivial (compare [29] p. 19). Então, pela teoria de obstrução elementar e o fato que $H^2(S, \mathcal{O})$ é trivial temos que existe uma seção.

Logo, segue dos Teoremas 2.1 e 2.2 o seguinte resultado

Lema 2.2. *O fibrado suspensão compactificado admite uma seção holomorfa.*

No caso de monodromia trivial, o problema de encontrar uma seção não-trivial é equivalente a existência de uma função meromorfa não-constante em S , o que é garantido pelo Teorema de Riemann-Roch.

Se a monodromia ρ não possui ponto fixo, essa seção não-trivial será automaticamente não-invariante pela \mathcal{F}_ρ . No caso com monodromia elementar é necessário apresentar pelo menos três seções diferentes para garantir ao menos uma não-invariante.

Para mostrar que existem no mínimo 3 seções, nossa estratégia será analisar no fibrado vetorial de posto 2 associado ao fibrado compactificado.

Em geral, todo fibrado vetorial sobre uma variedade dá origem a um fibrado projetivo projetivizando as fibras, mas nem todo fibrado projetivo é desta forma.

Mostraremos que um \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre uma superfície de Riemann compacta é sempre a projetivização de um fibrado vetorial de posto 2 sobre a superfície, logo o fibrado suspensão compactificado também é. Depois, através de um dicionário que será mostrado na Proposição 2.3 entre os subfibrados em linhas de um fibrado vetorial de posto 2 e as seções holomorfas do fibrado projetivizado, nosso problema de encontrar seções tornará-se um problema de encontrar subfibrados em linhas de um fibrado vetorial de posto 2.

Relembremos que para qualquer par de trivializações $\varphi_i : T^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r$ e $\varphi_j : T^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times \mathbb{C}^r$ de um fibrado vetorial holomorfo $T : V \rightarrow S$ de posto r a aplicação

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$$

dada por $g_{ij}(z) = (\varphi_i \circ \varphi_j^{-1})|_{\{z\} \times \mathbb{C}^r}$ é holomorfa e as aplicações g_{ij} são chamadas de transição para V relativas às trivializações φ_i, φ_j . As aplicações de transição satisfazem as identidades

$$\begin{aligned} g_{ij}(z) \cdot g_{ji}(z) &= Id, \forall z \in U_i \cap U_j, \\ g_{ij}(z) \cdot g_{jk}(z) \cdot g_{ki}(z) &= Id, \forall z \in U_i \cap U_j \cap U_k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Reciprocamente, dada uma cobertura aberta $\underline{U} = \{U_i\}$ de S e aplicações holomorfas $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ satisfazendo as identidades 2.4, temos que existe um único fibrado vetorial holomorfo $V \rightarrow S$ com funções de transição $\{g_{ij}\}$, onde $V = \bigcup_i U_i \times \mathbb{C}^r$, os pontos $(z, \lambda) \in U_j \times \mathbb{C}^r$, $(z, g_{ij}(z) \cdot \lambda) \in U_i \times \mathbb{C}^r$ são identificados e com a estrutura complexa induzida pelas inclusões $U_i \times \mathbb{C}^r \hookrightarrow V$.

Observemos que essa construção também é válida para fibrados projetivos.

Proposição 2.2. *Seja S uma superfície de Riemann compacta. Dado $\pi : P \rightarrow S$ um \mathbb{CP}^1 -fibrado, temos que existe um $T : V \rightarrow S$ fibrado vetorial de posto 2 tal que $\mathbb{P}(V) = P$. Mais ainda, $\mathbb{P}(V \otimes L) = P$, para todo fibrado em linhas L sobre S .*

Demonstração. Sejam $\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow PGL_2(\mathbb{C})$ as aplicações de transição do fibrado P relativo a uma cobertura $\{U_i\}$ de S . Supondo $\{U_i\}$ suficientemente fina, podemos encontrar levantamentos $g_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow GL_2(\mathbb{C})$ de \tilde{g}_{ij} (o grupo $SL_n(\mathbb{C}) \subset GL_n(\mathbb{C})$ de matrizes com determinante 1 forma um recobrimento de n folhas de $PGL_n(\mathbb{C})$, $\forall n$), em $U_i \cap U_j \cap U_k$, colocamos $h_{ijk} = g_{ij} \cdot g_{jk} \cdot g_{ki}$.

Como as aplicações de transição \tilde{g}_{ij} satisfazem as identidades 2.4 acima, segue que $\tilde{h}_{ijk} = \tilde{g}_{ij} \cdot \tilde{g}_{jk} \cdot \tilde{g}_{ki} = Id$, vemos que $h_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^*$, i.e., $\{h_{ijk}\} \in Z^2(\underline{U}, \mathcal{O}^*)$ é um cociclo. De fato, $\exists m_{ijk} : U_i \cap U_j \cap U_k \rightarrow \mathbb{C}^*$ tal que $h_{ijk} = m_{ijk} \cdot Id$, e portanto pode ser considerada como uma função invertível.

Como $\dim_{\mathbb{C}} S = 1$, pela dualidade de Dolbeault temos que $H^2(S, \mathcal{O}) \simeq H_{\bar{\partial}}^{0,2}(S) = 0$, usando que $H^3(S, \mathbb{Z}) = 0$ e a sequência da exponencial, concluimos que $H^2(S, \mathcal{O}^*) = 0$. Então, podemos escrever $h_{ijk} = l_{ij} \cdot l_{jk} \cdot l_{ki}$ para alguma cocadeia de Čech $\{l_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{C}^*\}$.

Logo, os mapas $g_{ij} \cdot l_{ij}^{-1}$ são as funções de transição para um fibrado vetorial $T : V \rightarrow S$ de posto 2 com $\mathbb{P}(V) = P$.

Para todo fibrado em linhas L sobre S , temos que $\mathbb{P}(V \otimes L) = P$ porque na projetivização as constantes não influenciam. ■

Observações 2.2. 1. O mesmo resultado vale para $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ -fibrados utilizando o mesmo argumento.

2. A proposição também vale para $\dim S \geq 2$ desde que não exista uma obstrução no grupo de cohomologia $H^2(S, \mathcal{O}^*)$, por exemplo, se $H^2(S, \mathcal{O}) = H^3(S, \mathbb{Z}) = 0$.

3. Essa prova nos fornece uma “sequência exata” de grupos de cohomologia

$$H^1(S, \mathcal{GL}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow H^1(S, \mathcal{PGL}_2(\mathbb{C})) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}^*),$$

onde $\mathcal{GL}_2(\mathbb{C})$ e $\mathcal{PGL}_2(\mathbb{C})$ são feixes de germes de aplicações analíticas de S em $GL_2(\mathbb{C})$ e $PGL_2(\mathbb{C})$, respectivamente, e $H^1(S, \mathcal{GL}_2(\mathbb{C}))$ (respectivamente $H^1(S, \mathcal{PGL}_2(\mathbb{C}))$) classifica os fibrados vetoriais analíticos de posto 2 (respectivamente $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrados) sobre S . De fato, os 1-cociclos são dados pelos mapas de transição dos fibrados.

Proposição 2.3. *Se L é um subfibrado em linhas de um fibrado vetorial holomorfo $T : V \rightarrow S$ de posto 2, então $\mathbb{P}(L) \subset \mathbb{P}(V) = P$ é imagem de uma seção holomorfa $\sigma : S \rightarrow P$ do fibrado projetivizado $\pi : P \rightarrow S$ e toda seção de π é desta forma.*

Demonstração. Seja $p : V \rightarrow \mathbb{P}(V) = P$ a projetivização, podemos pensar p como um fibrado em linhas holomorfo sobre a base P . Seja $\sigma : S \rightarrow P$ uma seção holomorfa de P . Definimos um fibrado em linhas holomorfo $L \rightarrow S$ pelo pull-back $\sigma^*(p)$ do fibrado em linhas p . O fibrado em linhas L está canonicamente mergulhado como um subfibrado holomorfo do fibrado $T : V \rightarrow S$ com a imagem $p^{-1}(\sigma(S))$.

Reciprocamente, dado um subfibrado $T|_L : L \rightarrow S$ em linhas do fibrado vetorial holomorfo $T : V \rightarrow S$ de posto 2. Temos que $T \circ p^{-1}|_{\mathbb{P}(L)} : \mathbb{P}(L) \rightarrow S$ é uma aplicação que induz uma seção holomorfa $\sigma : S \rightarrow \mathbb{P}(V)$ do fibrado projetivizado $\mathbb{P}(V)$ definida por $\sigma = p \circ (T|_L)^{-1}$. De fato, $\sigma(S) = \mathbb{P}(L)$ e $\pi \circ \sigma = T \circ p^{-1} \circ p \circ (T|_L)^{-1} = Id$. ■

Vamos agora mostrar que existe uma infinidade de fibrados em linhas L , tais que o fibrado tensorizado $V \otimes L$ do fibrado vetorial holomorfo $T : V \rightarrow S$ possui subfibrados em linhas.

Proposição 2.4. *Existe uma infinidade de fibrado em linhas L tais que o fibrado $V \otimes L$ possui subfibrados em linhas.*

Demonstração. Existe uma correspondência biunívoca entre os fibrados vetoriais holomorfos e o feixes analíticos localmente livres em S .

De fato, essa correspondência é definida tomando o feixe \mathcal{F} das seções do fibrado vetorial $T : V \rightarrow S$ e para mostrar que é localmente livre basta tomarmos um aberto trivializador $U \subset S$ desse fibrado e escrevermos uma seção $\beta : U \rightarrow V$ como $\beta(z) = (z, \beta_1(z), \dots, \beta_r(z))$ onde $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathcal{O}(U)$ e portanto o feixe $\mathcal{F}|_U$ é isomorfo a $(\mathcal{O}(U))^r$.

Usando esta equivalência, mostraremos que o feixe localmente livre \mathcal{F} de posto 2 associado ao fibrado vetorial possui um subfeixe invertível ε .

A ideia é mostrar que tensorizando \mathcal{F} com um fibrado em linhas de grau positivo $\mathcal{O}(D)$, o feixe $\mathcal{F}(D) = \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}(D)$ tem uma seção. Se \mathcal{F} tem uma seção, acaba. Suponhamos que não, escolhendo um divisor efetivo tal que $2degD > h^1(\mathcal{F})$. Tensorizando com \mathcal{F} e tomando a cohomologia da sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}(D) \longrightarrow C_D \longrightarrow 0$$

onde C_D é o feixe arranha-céu com suporte em D , obtemos uma sequência exata longa

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{F}) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}(D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{F}_D) \longrightarrow H^1(\mathcal{F}) \longrightarrow \dots$$

onde $\mathcal{F}_D = \mathcal{F} \otimes C_D$.

Como \mathcal{F}_D é um feixe arranha-céu com suporte em D e cada fibra de dimensão 2, seu espaço de seções tem dimensão $2degD$. Então pela nossa escolha de $degD$, a última aplicação não pode ser injetiva. Segue da exatidão da sequência em $H^0(\mathcal{F}_D)$ que $\mathcal{F}(D)$ tem uma seção global não-trivial que corresponde a uma aplicação não-nula $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}(D)$ e portanto a uma aplicação não-nula $\mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{F}$ cuja imagem ε é um feixe localmente livre de posto 1.

Com isso, mostramos que $V \otimes L$, onde L é um fibrado em linhas associado a $\mathcal{O}(D)$, tem um subfibrado em linhas W se $2degD > h^1(\mathcal{F})$, onde \mathcal{F} é o feixe localmente livre associado a $T : V \rightarrow S$. ■

Como $\mathbb{P}(V \otimes L) = \mathbb{P}(V) = P$, seja $\sigma : S \rightarrow P$ uma seção holomorfa de P dada pela projetivização do subfibrado em linhas W obtido na proposição 2.4. Para mostrar que existem pelo menos três seções em P , conforme havíamos observado no início da seção, usaremos o seguinte lema que relaciona os graus dos fibrados e seus subfibrados com a autointerseção da seção correspondente.

Lema 2.3. (Lema 11.1.1 de [12]) $\sigma^2 = \deg(\det(V)) - 2\deg W$, onde $\det(V)$ denota o fibrado determinante de V , isto é, um fibrado em linhas holomorfo sobre a superfície S e σ^2 é o número de autointerseção do ciclo $\sigma(S)$ em P .

Segue desse lema e tomando pelo menos 3 divisores efetivos com graus diferentes associados aos subfibrados em linhas da proposição 2.4 obtemos pelo menos três seções do \mathbb{CP}^1 -fibrado com números de autointerseção diferentes. Logo, obteremos no mínimo três seções do fibrado compactificado de uma suspensão de uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ e portanto uma seção não-invariante.

2.3 Construção de estruturas projetivas do tipo fuchsiana através de uma seção

Vimos na subseção 1.2.2 que dada uma representação $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ temos que as cartas locais de uma estrutura projetiva ramificada com monodromia ρ podem ser obtidas através das projeções de uma seção de $S \times_\rho \mathbb{CP}^1$ ao redor de um ponto numa fibra próxima ao longo das folhas. Essa construção já era conhecida para o caso sem pontos de ramificação e pode ser estendida de maneira análoga quando se introduzem pontos de ramificação.

Agora, se a superfície é de tipo finito, depois da compactificação do fibrado folheado $S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ realizada na seção 2.1, a folheação passa a ser uma folheação singular. A construção acima só pode ser usada quando a seção não passa pelos pontos singulares da folheação, pois nos pontos singulares não há submersão local. Porém, poderemos estender a construção para os pontos onde existe forma meromorfa fechada que define a folheação localmente, como por exemplo, a forma $\omega = \frac{dz}{z} + \lambda \frac{dw}{w}$ é meromorfa fechada e possui integral primeira Liouvilliana¹ $h(z, w) = zw^\lambda$.

Portanto, ao redor de um ponto singular a folheação \mathcal{F}_ρ vem de uma forma meromorfa fechada que possui integral primeira Liouvilliana, e a carta da estrutura projetiva pode ser calculada da mesma maneira através da projeção da seção ao longo das folhas em uma fibra transversal à folheação.

Por fim, temos que a aplicação developing pode ser calculada considerando o germe de holonomia f entre a fibra transversal F_1 e a seção. A inversa local da f é a *dev*.

2.4 Demonstração do Teorema de existência

Mostraremos aqui o Teorema de Existência de estruturas projetivas do tipo fuchsiana com monodromia dada em superfícies de Riemann com um número finito de pontos de ramificação extras.

¹Uma integral primeira Liouvilliana de uma folheação é uma função não-constante que é constante nas folhas e é construída de funções racionais usando exponenciação, integração e funções algébricas.

Demonstração do Teorema de Existência. Tomamos o fibrado suspensão $S^* \times_\rho \mathbb{P}^1$ e depois uma compactificação $\pi : \overline{S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1} \rightarrow S$ desse fibrado. Usando os resultados da seção 2.2 temos que o fibrado compactificado tem uma seção holomorfa não-trivial e não-invariante. Vamos estudar a estrutura projetiva definida pela seção ao redor de cada ponto de S através da restrição do fibrado a uma vizinhança de um ponto.

Separaremos em dois casos: pontos regulares e cúspides.

1º caso: Pontos regulares.

Nos pontos regulares da superfície obteremos, a menos de mudança conforme, cartas projetivas complexas ou recobrimentos ramificados.

Num ponto regular $(z_0, w_0) \in S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ de uma seção holomorfa σ não-trivial e não-invariante temos que $\mathcal{F}_\rho \overline{\cap} \pi$. Temos dois casos a tratar: quando σ é transversal a folheação \mathcal{F}_ρ ou quando é tangente.

Introduziremos coordenadas $(z, w) \in \pi^{-1}(U) \subset S^* \times_\rho \mathbb{CP}^1$ centradas em (z_0, w_0) de uma trivialização local de π , temos que numa vizinhança de (z_0, w_0) a folheação \mathcal{F}_ρ é regular, onde a folha e a fibra que passam por (z_0, w_0) são transversais. Tomamos uma mudança de coordenadas que leva (z_0, w_0) a $(0, 0)$ e os vetores que definem a folha e a fibra em (z_0, w_0) a $\frac{\partial}{\partial z}$ e $\frac{\partial}{\partial w}$, respectivamente. Logo, o campo de vetores que define a folheação \mathcal{F}_ρ nas coordenadas (z, w) é $\frac{\partial}{\partial z}$.

Usaremos aqui a técnica descrita na seção 2.3 para construir estruturas projetivas. Colocando $\sigma(z) := (z, \sigma_1(z))$, sejam U uma vizinhança de $(0, \sigma_1(0))$ em $\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$, h a integral primeira holomorfa de \mathcal{F}_ρ em U e $F_1 = \pi^{-1}(z_1)$ uma fibra de um ponto próximo de 0. A restrição de h a $F_1 \cap U$ é um difeomorfismo e $\left(h|_{F_1 \cap U}\right)^{-1} \circ h(\sigma(z)) = (z_1, f(z))$. Como a integral primeira local é $h(z, w) = w$, segue que $f(z) = \sigma_1(z)$.

Concluimos que nesse caso a f é holomorfa e se a folheação for transversal à seção em $(0, \sigma_1(0))$ obtemos que a carta da estrutura projetiva é um homeomorfismo ao redor de 0, caso contrário, em coordenadas $\mathcal{F}_\rho \overline{\cap} \sigma$ é equivalente a

$$T_0(\{w = 0\}) = T_0(\sigma) \iff \frac{\partial}{\partial z} = c \cdot \left(\sigma_1'(z) \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \iff \sigma_1'(z) = 0,$$

onde c é uma constante não-nula. Se σ_1 função holomorfa não-constante (seção trivial não define uma estrutura projetiva) com $\sigma_1'(z) = 0$, então σ_1 tem um número finito de zeros.

Como $f(z) = \sigma_1(z)$ é um germe holomorfo podemos reescrever como $\sigma_1(z) = z^n \phi(z)$, $\phi(0) \neq 0$, ou melhor, $\sigma_1(z) = (z \tilde{\phi}(z))^n = (\psi(z))^n$, n é a multiplicidade de 0 como ponto crítico de σ_1 , e $n - 1$ é o índice de tangência da seção com a folheação e como $\psi'(0) \neq 0$, ψ é um germe holomorfo invertível.

Logo, $f(\psi^{-1}(z)) = z^n$, i.e., um recobrimento ramificado de n folhas.

2º caso: Cúspides

Nos pontos $\{p_1, \dots, p_k\}$ obteremos, a menos de mudança conforme, cartas projetivas singulares do tipo $z \mapsto z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, se a monodromia ao redor do ponto for não-parabólica e quando for parabólica será do tipo $z \mapsto \log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ao redor de uma cúspide, tomaremos uma vizinhança trivializadora U do fibrado.

As folheações encontradas após a compactificação são do tipo que tem integral primeira Liouvillian e os modelos locais são dados por folheações de Riccati e separaremos

nos casos parabólicos, não-parabólicos e trivial.

1. Monodromia Não-parabólica

Em coordenadas $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$, a folheação é induzida por $\omega = \alpha w dz - z dw$. Temos que $F = \pi^{-1}(0)$ é a fibra invariante pela folheação cuja monodromia é dada por $g(w) = e^{2\pi i \alpha} w$. Os pontos fixos da monodromia, $w = 0$ e $w = \infty$, representam as separatrizes da folheação que passam pelos pontos singulares $(0, 0)$ e $(0, \infty)$.

Primeiramente, analisaremos o caso em que a seção $\sigma : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ dada por $\sigma(z) = (z, \sigma_1(z))$ não passa pelos pontos singulares da folheação, i.e., $\sigma_1(0) \neq 0, \infty$.

Seja $h(z, w) = z^\alpha w^{-1}$ a integral primeira multivaluada da folheação numa vizinhança U de $(0, \sigma_1(0))$. Observemos que os gráficos (multivaluados) de $w = cz^\alpha$, $c \in \mathbb{C}$, são as folhas. Vamos estudar a projeção de $\sigma \cap U$ ao longo das folhas numa fibra transversal à folheação $F_1 = \pi^{-1}(z_1)$, $z_1 \in \mathbb{D}^*$.

De fato, basta calcularmos $(h|_{F_1})^{-1} \circ (h(\sigma(z))) = (h|_{F_1})^{-1} \circ \left(\frac{z^\alpha}{\sigma_1(z)} \right) = (z_1, z_1^\alpha \cdot \frac{\sigma_1(z)}{z^\alpha})$. Logo, $f(z) = z_1^\alpha \cdot \frac{\sigma_1(z)}{z^\alpha}$. Como $\sigma_1(z)$ é uma germe holomorfo com $\sigma_1(0) \neq 0$, podemos reescrever a f , a menos de automorfismo de \mathbb{CP}^1 , como $\frac{\sigma_1(z)}{z^\alpha} = (z\tilde{\phi}(z))^{-\alpha} = (\psi(z))^{-\alpha}$, observemos que a equação $\tilde{\phi}(z)^{-\alpha} = \sigma_1(z)$, $\sigma_1(0) \neq 0$ admite uma única solução $\tilde{\phi}(z) = e^{-\frac{1}{\alpha} \log(\sigma_1(z))}$ holomorfa na vizinhança de 0 e que ψ é um germe invertível, pois $\psi'(0) = \tilde{\phi}'(0) \neq 0$.

Logo, $f(\psi^{-1}(\frac{1}{z})) = z^\alpha$.

Agora, suponhamos que a seção passa por um dos pontos singulares $(0, 0)$ ou $(0, \infty)$ da folheação.

Se $\sigma_1(0) = 0$, segue do mesmo raciocínio visto acima que $f(z) = z_1^\alpha \cdot \frac{\sigma_1(z)}{z^\alpha}$. Como $\sigma_1(z)$ é um germe holomorfo com $\sigma_1(0) = 0$, podemos reescrever como $\sigma_1(z) = z^n \phi(z)$, $n \geq 1$ e $\phi(0) \neq 0$ e reescrevendo a f , a menos de automorfismo de \mathbb{CP}^1 , obtemos $f(z) = (z\phi(z))^{n-\alpha} = (\psi(z))^{n-\alpha}$ onde ϕ é a única solução holomorfa na vizinhança de 0 da equação $\phi(z)^{n-\alpha} = \sigma_1(z)$, $\phi(0) \neq 0$, e ψ é um germe invertível, pois $\psi'(0) = \phi'(0) \neq 0$.

Logo, $f(\psi^{-1}(z)) = z^{n-\alpha}$.

Se $\sigma_1(0) = \infty$, mudamos as coordenadas por $w \mapsto s = \frac{1}{w}$ e reescrevendo a 1-forma $\alpha \frac{1}{s} dz + z \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{s^2} (\alpha s dz + z ds)$ obtemos uma forma do mesmo tipo. Sua integral primeira é $h(z, s) = z^\alpha s$ e de maneira análoga temos $(h|_{F_1})^{-1} \circ (h(\sigma(z))) = (h|_{F_1})^{-1} \circ (z^\alpha \sigma_1(z)) = (z_1, \frac{1}{z_1^\alpha} \cdot z^\alpha \sigma_1(z))$. Logo, $f(z) = \frac{1}{z_1^\alpha} z^\alpha \sigma_1(z)$ e a menos de pré-composição por um germe de um biholomorfismo local em $(\mathbb{C}, 0)$ a carta coordenada é dada por $z^{n+\alpha}$.

De forma análoga aos pontos regulares, o índice de tangência da seção quando passa por uma das singularidades com a folheação é n , e quando a seção não passa pelas singularidades temos que o índice de tangência é 0.

2. Monodromia Parabólica

Em coordenadas $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$, a folheação é induzida por $\omega = dz - z dw$. Temos que $F = \pi^{-1}(0)$ é a fibra invariante pela folheação cuja monodromia é dada por

$f(w) = w + 1$. Possui uma sela-nó no ponto $(0, \infty)$ cuja separatriz fraca é F e a separatriz forte é transversal a F .

Sejam σ uma seção do fibrado definida como no caso não-parabólico e $h(z, w) = \log z - w$ a integral primeira holomorfa da folheação numa vizinhança U de $(0, \sigma_1(0))$. Observemos que os gráficos de $w = \log z + c$, $c \in \mathbb{C}$, são as folhas. Vamos estudar a projeção de $\sigma \cap U$ ao longo das folhas numa fibra transversal $F_1 = \pi^{-1}(z_1)$, $z_1 \in \mathbb{D}$. De fato, calcularemos $\left(h|_{F_1 \cap U}\right)^{-1} \circ h(\sigma(z)) = \left(h|_{F_1 \cap U}\right)^{-1}(\log z - \sigma_1(z)) = (z_1, \log z_1 - \log z + \sigma_1(z))$ e obtemos $f(z) = \log z_1 - \log z + \sigma_1(z)$ que é equivalente a $\log(ze^{-\sigma_1(z)})$, após pós-composição com a transformação de Möbius $T(z) = \log z_1 - z$.

Afirmamos que existe ψ germe de difeomorfismo tal que $\log\left(\psi(z)e^{\frac{1}{\psi(z)^n}}\right) = \log(ze^{-\sigma_1(z)})$ onde n satisfaz $\sigma_1(z) = \frac{1}{z^n} \cdot \sigma_2(z)$, $\sigma_2(0) \neq 0$. Observemos que quando a seção é transversal à folheação teremos $n = 0$.

De fato, colocando $\psi(z) = zh(z)$, temos

$$\log h(z) + \frac{1}{z^n h^n} = -\frac{\sigma_2(z)}{z^n}.$$

Tomando $F(z, \zeta) = z^n \log \zeta + \frac{1}{\zeta^n} + \sigma_2(z)$, onde $F(z, h(z)) \equiv 0$. Como $\frac{\partial F}{\partial \zeta}(0, h(0)) = -\frac{n}{h(0)^{n+1}} \neq 0$, pois $\frac{1}{h(0)^n} = -\sigma_2(0) \neq 0$, logo $h(0) \neq 0$.

Pelo Teorema da Função Implícita, existirá $h(z)$ holomorfa na vizinhança de 0, portanto $\psi(z)$ é um germe invertível ($\psi'(0) = h(0) \neq 0$).

Logo, $f(\psi^{-1}(z)) = \log z + \frac{1}{z^n}$.

Aqui o índice de tangência da seção quando passa pela singularidade com a folheação é n também, e quando não passa é 0.

3. Monodromia Trivial

Em coordenadas $(z, w) \in \mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$, a folheação é induzida por $\omega = mwdz - zdw$ para algum $m \in \mathbb{N}$. A fibra $F = \pi^{-1}(0)$ é invariante pela folheação e a monodromia ao redor dela é a identidade. Os pontos singulares da folheação são $(0, 0)$ e $(0, \infty)$ e possui uma separatriz em $\{w = \infty\}$.

De maneira análoga aos casos anteriores, sejam $\sigma(z) = (z, \sigma_1(z))$ uma seção não-trivial e não-invariante e $h(z, w) = \frac{z^m}{w}$ a integral primeira holomorfa da folheação numa vizinhança U de $(0, \sigma_1(0))$.

Suponhamos que $\sigma_1(0) \neq \infty$. Fazendo o mesmo cálculo que acima obtemos, a menos de pré-composição com uma transformação de Möbius, $f(z) = \frac{\sigma_1(z)}{z^m}$ e agora a menos de pré-composição com um germe de um biholomorfismo em $(\mathbb{C}, 0)$ a $f(z) = z^{n-m}$, que topologicamente é um recobrimento ramificado com $n - m$ folhas. Se a seção não passa pelo ponto singular $(0, 0)$ temos que $n = 0$.

Se $\sigma_1(0) = \infty$, mudando as coordenadas por $w \mapsto s = \frac{1}{w}$, obtemos $\omega = \frac{1}{s^2}(msdz + zds)$ uma 1-forma do mesmo tipo cuja integral primeira holomorfa local é dada por $h(z, w) = z^m s$. De maneira análoga, obtemos $f(z) = z^{n+m}$, que topologicamente é um recobrimento ramificado com $n + m$ folhas.

■

Observações 2.3. 1. No caso das cúspides com monodromia trivial, as cartas são do mesmo tipo do caso dos pontos regulares da superfície onde a seção é transversal ou não a \mathcal{F}_ρ . De fato, se no Lema 2.1 estivéssemos escolhido nas cúspides com monodromia trivial o modelo $dw = 0$ sem fibra invariante no lugar de $mwdz - zdw = 0$, para algum $m \in \mathbb{N}$ a folheação definida na suspensão da representação de monodromia se estenderia holomorficamente nesses pontos.

2. Segue do Teorema de Existência que dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ e uma estrutura complexa sobre S^* sempre podemos construir uma estrutura projetiva do tipo fuchsiana sobre S e a estrutura complexa subjacente coincidirá com a estrutura complexa inicial porque a seção do fibrado suspensão é holomorfa.

2.4.1 Flips e as estruturas projetivas com mesma monodromia

A representação de monodromia de uma folheação de Riccati dá uma descrição completa da folheação módulo morfismo birracional, conforme o Capítulo 4 de [5].

Quando a monodromia é não-parabólica (inclui o caso trivial), ou seja, dada por $w \mapsto e^{2\pi i\alpha}w$ ao redor da fibra a menos de conjugação por um elemento de $PGL_2(\mathbb{C})$, a folheação ao redor da fibra invariante é $(\alpha + n)wdz - zdw = 0$ ou $\alpha wdz - zdw = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, e essas folheações estão relacionadas uma a outra pelo *flip* (ou transformação elementar) dessa fibra, i.e., por meio de uma sequência de *blowing ups* nos pontos singulares e contrações de fibras invariantes pela folheação respectiva. O *flip* da fibra é um bi-holomorfismo do fibrado fora da fibra que contém o ponto que é explodido e não muda a monodromia $w \mapsto e^{2\pi i\alpha}w$ ao redor da fibra. No caso particular quando a monodromia é trivial temos que $mwdz - zdw = 0$ é birracional a $dw = 0$, i.e., uma folheação sem fibra invariante.

De maneira análoga, quando a monodromia é parabólica as folheações são da forma $dz - zdw = 0$ ou $(nw + z^n)dz - zdw = 0$, $n \in \mathbb{N}$ e estão relacionadas por meio de um *flip* na fibra invariante. No contexto de folheações de Riccati, o *flip* da fibra é usado para reduzir a lista de formas normais.

Uma forma alternativa de mostrar que existe uma infinidade de seções em \mathbb{CP}^1 -fibrados (Seção 2.2) segue imediatamente do seguinte resultado:

Teorema 2.3. ([27], p. 36) *A composição de um número finito de flips em um fibrado trivial $S \times \mathbb{CP}^1$ dá um \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre uma superfície de Riemann compacta S e todo \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre S pode ser obtido dessa forma.*

Logo, existe uma infinidade de seções em um \mathbb{CP}^1 -fibrado sobre S basta tomar as imagens das infinitas seções do fibrado trivial sobre S pela composição de *flips* assegurada pelo teorema acima.

Observemos que as estruturas projetivas encontradas com representação de monodromia dada mudam conforme a mudança de hipóteses sobre a seção: se passa pelos pontos singulares da folheação ou não. Mas essa mudança está relacionada com o modelo local de Brunella escolhido na compactificação a menos de um morfismo birracional.

Proposição 2.5. *Dadas uma folheação de Riccati definida em $\mathbb{D} \times \mathbb{CP}^1$ e uma seção σ que passa por um ponto singular não-trivial e não-invariante pela folheação. Temos que:*

- (i) *O índice de tangência da imagem de σ por uma composição de um blowing up no ponto singular que passa σ e uma contração diminui 1 no índice de tangência da seção inicial com a folheação, a integral primeira Liouwilliana também muda, mas a carta coordenada ao redor da cúspide da estrutura projetiva é a mesma.*
- (ii) *Existe um único modelo, a menos de transformações flips, onde a seção é transversal à folheação ao redor da fibra invariante.*

Demonstração. A ideia da prova é a mesma para os casos de monodromia parabólica e não-parabólica, mas separaremos-as para observar os detalhes.

1. Monodromia Não-parabólica

Tomaremos o modelo $\alpha w dz - z dw = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, e suponhamos que $\sigma(z) = (z, \sigma_1(z))$ onde $\sigma_1(z)$ é um germe holomorfo e a menos de mudança de coordenadas a seção passa pela singularidade $(0, 0)$, então podemos reescrever como $\sigma_1(z) = z^n \phi(z)$, $n \geq 1$ e $\phi(0) \neq 0$.

(i) Fazendo um *blowing up* ($z = z$ e $w = zy$) e depois uma contração da fibra $\{z = 0\}$, obtemos uma nova seção $\beta(z) = (z, z^{n-1}\phi(z))$, logo diminui 1 no índice de tangência da seção inicial com a folheação. Já a folheação após o *flip* ficará $(\alpha - 1)ydz - zdy = 0$ com integral primeira $z^{\alpha-1}y^{-1}$ diferente da inicial. Mas as cartas coordenadas são iguais a $z^{n-\alpha}$, obtendo a mesma estrutura projetiva.

(ii) O *flip* dado pela composição de n *blowing ups* e contrações leva a seção σ na seção $\beta(z) = (z, \phi(z))$, ϕ germe de biholomorfismo, $\phi(z) \neq 0$, ou seja, uma seção transversal à folheação ao redor da fibra invariante e segue de i) que esse é o único *flip* que vai realizar isso.

2. Monodromia Parabólica

Nesse caso, o modelo escolhido na compactificação foi $dz - zdw = 0$ cuja integral primeira é dada por $h(z, w) = w - \log z$.

(i) Primeiramente, faremos um *blowing up* em $(0, \infty)$ e depois uma contração da fibra invariante. De fato, colocando $w = \frac{1}{u}$, obteremos $dz + \frac{z}{u^2}du = 0$, após essa mudança de coordenadas vamos fazer o *blowing up* em $(0, 0)$ ($u = zt$ e $z = z$) e obteremos $\frac{1}{z} \left((z + \frac{1}{t}) dz + \frac{z}{t^2} dt \right) = 0$. Mudando novamente as coordenadas para $v = \frac{1}{t}$ e contraindo a fibra $\{z = 0\}$ obteremos $(v + z)dz - zdv = 0$. Após esse processo, a integral primeira do novo modelo é $h(z, v) = \frac{v}{z} + \log z$.

Suponhamos que a seção σ passa pela singularidade $(0, \infty)$, então podemos escrevê-la na forma $\sigma(z) = (z, \sigma_1(z)) = (z, z^{-n}\sigma_2(z))$, $\sigma_2(0) \neq 0$, que será levada na $\beta(z) =$

$(z, z^{-n+1}\sigma_2(z))$ após o *flip* acima. Aqui o n , de novo, representa o índice de tangência da seção com a folheação.

Fazendo um cálculo análogo ao teorema, teremos que, a menos de pós-composição com uma transformação de Möbius, a estrutura projetiva calculada por meio da projeção da seção ao longo das folhas numa fibra transversal à folheação será dada por $\frac{\sigma_1(z)}{z} + \log z$, depois podemos mostrar que existe um germe de difeomorfismo ψ tal que

$$\log \psi(z) + \frac{1}{\psi(z)^n} = \frac{\sigma_2(z)}{z^n} + \log z,$$

através do Teorema da Função Implícita, e portanto $dev(\psi^{-1}(z)) = \log z + \frac{1}{z^n}$.

Logo, a composição de um *blowing up* e uma contração, mesmo em geral para um *flip* qualquer, muda a seção, a folheação e por conseguinte a integral primeira porém preserva a estrutura projetiva.

(ii) Usando mesmo raciocínio do caso não-parabólico, basta fazer o *flip* dado pela composição de n *blowing ups* e contrações na seção σ descrita no item i) e vamos obter uma seção $\beta(z) = (z, \sigma_2(z))$, σ_2 germe de biholomorfismo, $\sigma_2(z) \neq 0$, ou seja, uma seção transversal à folheação ao redor da fibra invariante e segue de i) que esse é o único *flip* que vai realizar isso.

■

Portanto, podemos escolher um modelo local para compactificar o fibrado suspensão sobre S^* em que a seção é transversa à folheação ao redor das fibras invariantes, ou seja, não passa pelas singularidades da folheação.

Sabemos que, em geral, as folheações de Riccati são geradas pela 1-forma meromorfa ω em $\mathbb{D} \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, racional em w ,

$$\omega = (a(z)w^2 + b(z)w + c(z))dz + d(z)dw$$

com a, b, c e d funções holomorfas em \mathbb{D} . A invariância da fibra $\{z = 0\}$ implica que $d(0) = 0$. Definimos a multiplicidade dessa fibra como sendo a ordem de anulamento de $d(z)$ em 0.

Observemos que a multiplicidade da fibra invariante $\{z = 0\}$ se mantém após um *flip* nos modelos locais dados acima, mas, isso não é válido em geral conforme [5], p. 55.

Capítulo 3

Análise da Schwarziana

Neste capítulo faremos uma abordagem analítica da estrutura projetiva de tipo fuchsiana onde analisaremos a derivada Schwarziana dos modelos locais encontrados no Capítulo anterior e as soluções de equações Schwarzianas dada uma diferencial quadrática meromorfa com polo duplo. Obteremos uma equivalência entre estruturas projetivas do tipo fuchsiana e diferenciais quadráticas meromorfas com polos duplos nas cúspides:

Teorema 3.1. *Dada uma estrutura projetiva do tipo fuchsiana sobre uma superfície de Riemann compacta S , uma diferencial quadrática meromorfa definida pela derivada Schwarziana de suas cartas projetivas tem a forma*

$$\left\{ \frac{1 - \alpha^2}{2z^2} + \sum_{n \geq -1} b_n z^n \right\} dz^2, \quad (3.1)$$

em coordenadas locais ao redor de cada singularidade da estrutura projetiva, $\alpha, b_n \in \mathbb{C}$. Reciprocamente, dada a diferencial quadrática (3.1) o quociente de duas soluções l.i. de sua equação Schwarziana definem cartas projetivas do tipo fuchsiana.

A estrutura projetiva é representada por uma diferencial quadrática numa superfície de Riemann, que é extraída das informações geométricas usando um operador diferencial invariante por transformações de Möbius, chamado a derivada Schwarziana. A inversa dessa construção descreve toda estrutura projetiva em termos das soluções holomorfas de uma equação diferencial ordinária linear (a equação Schwarziana). Deste modo muitas propriedades de estruturas projetivas podem ser estudadas através de teoria de funções complexas.

A derivada Schwarziana de uma aplicação $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{CP}^1$ holomorfa é a diferencial quadrática

$$S(f) = \left\{ \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2 \right\} dz^2.$$

Ela depende da coordenada z e suas principais propriedades são:

1. (Invariante Projetivo) $S(f) = S(g) \iff g(z) = \frac{af(z)+b}{cf(z)+d}$ onde a, b, c, d são constantes complexas com $ad - bc \neq 0$. Em particular, $S(f) = 0 \iff f$ é uma transformação de Möbius.

2. (Propriedade de cociclo) $S(g \circ f) = f^*S(g) + S(f)$, onde $f^*S(g) = f'(z)^2S(g)(f(z))$.

Temos que uma estrutura projetiva complexa se relaciona com a derivada Schwarziana. De fato, seja (dev, ρ) um par associado a uma estrutura projetiva complexa em uma superfície de Riemann S qualquer. Colocando $\tilde{\phi} = S(dev)$, combinando a propriedade de equivariância da dev pela ρ e as propriedades da derivada Schwarziana, obtemos

$$\tilde{\phi} = S(\rho([\gamma]) \circ dev) = S(dev \circ [\gamma]) = [\gamma]^*S(dev) + S([\gamma]) = [\gamma]^*\tilde{\phi},$$

portanto, temos $\tilde{\phi} = [\gamma]^*\tilde{\phi}$, $\forall [\gamma] \in \pi_1(S)$, e $\tilde{\phi}$ desce a uma diferencial quadrática holomorfa ϕ em S . Com abuso de notação, $[\gamma]$ também está representando aqui a ação no recobrimento universal de S por uma transformação de Möbius. Chamaremos ϕ a Schwarziana da estrutura projetiva e como a $d(dev)$ não se anula, ϕ é uma seção global de $K_S^{\otimes 2}$, onde K_S é o fibrado em linhas canônico sobre S .

Reciprocamente, dada $\phi(z)dz^2$ uma diferencial quadrática holomorfa definida em um aberto contrátil U , a equação diferencial linear de segunda ordem (Equação Schwarziana)

$$u''(z) + \frac{1}{2}\phi(z)u(z) = 0 \quad (3.2)$$

tem um conjunto $\{u_1(z), u_2(z)\}$ fundamental de soluções, i.e., $u_1(z)$ e $u_2(z)$ são soluções linearmente independentes e observemos que o Wronskiano de $u_1(z)$ e $u_2(z)$:

$$W(z) = \begin{vmatrix} u_1(z) & u_2(z) \\ u_1'(z) & u_2'(z) \end{vmatrix} = u_1(z)u_2'(z) - u_1'(z)u_2(z)$$

satisfaz $W'(z) = 0$, então $W(z)$ é uma função constante não-nula, e u_1 e u_2 não se anulam simultaneamente. Logo, a função meromorfa $f(z) = u_1(z)/u_2(z)$ satisfaz $S_z(f) = \phi(z)dz^2$ (ver [31]).

Calcularemos a $\phi(z)dz^2$ para os modelos ao redor das cúspides encontrados no Capítulo anterior, que é uma diferencial quadrática meromorfa com no máximo polos duplos. Estudaremos as soluções da equação Schwarziana para esse caso e mostraremos que o coeficiente do polo da Schwarziana determina a forma local da estrutura módulo uma homografia, como ocorre no caso das estruturas projetivas ramificadas, conforme [26], p. 268. Desse modo, associaremos biunivocamente uma estrutura projetiva singular de tipo fuchsiana em S a uma diferencial quadrática meromorfa com no máximo polos duplos.

No modelo $f(z) = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$, a derivada Schwarziana é dada por $\frac{1-\alpha^2}{2z^2}dz^2$. Observemos que $\alpha = \pm 1 \iff S(f) = 0 \iff f \in PSL_2(\mathbb{C})(f(z) = z \text{ ou } \frac{1}{z})$. Logo, para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$ a $S(f)$ tem polo em 0 de ordem 2.

Teorema 3.2. *Dados $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, a Schwarziana dada por*

$$\left\{ \frac{1 - \alpha_0^2}{2z^2} + \frac{1 - \alpha_1^2}{2(z-1)^2} - \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_\infty^2 - 1}{2z(z-1)} \right\} dz^2 \quad (3.3)$$

define uma única estrutura projetiva em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ com cartas locais projetivamente equivalentes a $z \mapsto z^{\alpha_i}$, $i = 0, 1, \infty$, nas cúspides. Se $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_\infty \in \mathbb{Z}$, a expansão em

série de Laurent ao redor de uma cúspide $z_i \in \{0, 1, \infty\}$ da Schwarziana dada por

$$\left\{ \frac{1 - \alpha_i^2}{2(z - z_i)^2} + \sum_{n \geq -1} a_n^{(i)} (z - z_i)^n \right\} dz^2,$$

é diferencial quadrática meromorfa de uma estrutura projetiva ramificada se, e somente se, os $a_n^{(i)}$ satisfizerem uma equação da forma $A_{\alpha_i}(a_{-1}^{(i)}, \dots, a_{\alpha_i-1}^{(i)}) = 0$ onde A_{α_i} é polinômio com coeficientes em \mathbb{C} . Se $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ e os $a_n^{(i)}$ não satisfizerem uma relação polinomial, então a carta local ao redor da cúspide z_i é projetivamente equivalente a $z \mapsto \log z + \frac{1}{z^{\alpha_i}}$.

A *dev* é dada pelo quociente de duas soluções linearmente independentes da equação da Schwarziana 3.3. Como quaisquer três pontos em \mathbb{CP}^1 podem ser levados em 0, 1 e ∞ por uma transformação de Möbius, segue que uma estrutura projetiva com três singularidades sobre \mathbb{CP}^1 é completamente determinada pelos seus índices.

O caso de estruturas projetivas ramificadas pode ser visto com mais detalhes em Mandelbaum [[26], p. 268].

Sejam $[\gamma_0], [\gamma_1], [\gamma_\infty] \in \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\})$ laços ao redor de i , para $i = 0, 1, \infty$, que possuem o mesmo ponto base, satisfazendo $[\gamma_0] \cdot [\gamma_1] \cdot [\gamma_\infty] = Id$. Segue desta relação que a representação de monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ deverá satisfazer

$$\rho([\gamma_0]) \cdot \rho([\gamma_1]) \cdot \rho([\gamma_\infty]) = Id. \quad (3.4)$$

A transformação $\rho([\gamma_i])$ é a monodromia local ao redor de cada polo $i = 0, 1, \infty$ e é conjugada em $PSL_2(\mathbb{C})$, no caso não-parabólico, a $w \mapsto e^{2\pi i \alpha_i} w$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$, e no caso das cúspides com cartas do tipo logarítmicas a monodromia é parabólica conjugada a $w \mapsto w + 2\pi i$. A relação 3.4 é equivalente a $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty \in \mathbb{Z}$ e ρ induzirá uma estrutura projetiva complexa em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$.

Schwarz estabeleceu um primeiro link entre a derivada Schwarziana e o problema de uniformização via equações diferenciais, por volta de 1870, obtendo expressões explícitas para os biholomorfismos procurados em certos domínios simplesmente conexos do plano.

De fato, nesse exemplo, a *dev* : $\mathbb{H} \rightarrow T$ será uma uniformizante (aplicação que uniformiza a superfície), que se estende homeomorficamente ao bordo $\overline{\partial\mathbb{H}}$, de um triângulo T com lados geodésicos e ângulos $\alpha_0\pi$, $\alpha_1\pi$ e $\alpha_\infty\pi$ se $\alpha_i \in (0, 1)$ nos vértices w_1, w_2 e w_3 que são imagens de 0, 1 e ∞ pela *dev*. Mais precisamente,

Teorema 3.3. (Uniformização de triângulos) *Fixamos um triângulo T de vértices w_1, w_2 e w_3 cujos ângulos nos vértices são respectivamente $\alpha_0\pi$, $\alpha_1\pi$ e $\alpha_\infty\pi$ para $\alpha_i \in (0, 1)$.*

Então a solução da equação da Schwarziana 3.3 que envia 0, 1 e ∞ em w_1, w_2 e w_3 e envia biholomorficamente o semi-plano superior sobre o triângulo T . Essa solução se estende a $\overline{\mathbb{H}}$ e envia $\overline{\partial\mathbb{H}}$ homeomorficamente sobre o bordo do triângulo.

O caso geral para polígonos quaisquer com bordo circular pode ser visto em [32] Proposition IV.2.4. Basta decompor o polígono em união de triângulos que sabemos uniformizar e depois usar este resultado com outros de colagem de uniformizações, e portanto garantiremos a uniformização do polígono todo.

Mais detalhes podem ser vistos no Capítulo 4 (*Le travail de Schwarz*) do livro [32].

Ainda sobre equações cujo quociente de duas soluções uniformiza superfícies, ditas equações diferenciais uniformizantes, a equação da Schwarziana 3.3 é conhecida como a Equação Hipergeométrica de Gauss: equação fuchsiana sobre \mathbb{CP}^1 a três parâmetros cujos polos estão situados em $0, 1$ e ∞ .

Equações hipergeométricas têm a mesma monodromia projetiva se correspondem necessariamente por um elemento de

$$\Gamma' = \{(\pm\alpha_0 + n_0, \pm\alpha_1 + n_1, \pm\alpha_\infty + n_\infty); (n_0, n_1, n_\infty) \in \mathbb{Z}^3, n_0 + n_1 + n_\infty \in 2\mathbb{Z}\}.$$

Proposição 3.1. (*Proposition IX 2.3 de [32]*) *Duas equações do tipo*

$$u''(z) + \left\{ \frac{1 - \alpha_0^2}{2z^2} + \frac{1 - \alpha_1^2}{2(z-1)^2} - \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_\infty^2 - 1}{2z(z-1)} \right\} u(z) = 0$$

têm a mesma representação de monodromia projetiva se, e só se, elas se correspondem sob a ação do grupo de simetrias Γ' .

Como no caso da Equação Hipergeométrica de Gauss do Teorema 3.2 podemos calcular a expressão da Schwarziana para o caso da esfera menos 4 pontos, cuja equação associada é conhecida como Equação de Heun, e fazendo um cálculo análogo em $\mathbb{CP}^1 \setminus \{p_1, \dots, p_k, \infty\}$ podemos mostrar que sua equação uniformizante é da forma

$$u''(z) + \left\{ \frac{1}{4} \sum_{j=1}^k \frac{1}{(z-p_j)^2} - \frac{Q(z)}{\prod_{j=1}^k (z-p_j)} \right\} u(z) = 0$$

onde Q é um polinômio de grau $k-2$ de termo dominante $\frac{k-1}{4}z^{k-2}$ conforme Capítulo 9 de [32].

Baseado no caso inteiro do Teorema 3.2, mostraremos o seguinte Teorema

Teorema 3.4. *Dada uma aplicação do tipo $\psi(z)^k$, $k \in \mathbb{Z}$ não-nulo, ψ é germe de difeomorfismo na origem, a expansão em série de Laurent da derivada Schwarziana de $\psi(z)^k$ ao redor da origem é*

$$\phi(z)dz^2 = \left\{ \frac{1-k^2}{2z^2} + \sum_{n \geq -1} b_n z^n \right\} dz^2. \quad (3.5)$$

Uma condição necessária e suficiente para que $\phi(z)$ seja a diferencial quadrática mero-morfa associada a uma aplicação da forma $\psi(z)^k$ é que os coeficientes b_n satisfaçam uma equação polinomial da forma

$$p_{k-2}(b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{k-2}) = 0, k > 0$$

(ou $p_{-k-2}(b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{-k-2}) = 0$, $k < 0$) onde p é um polinômio em k variáveis ($-k$, se $k < 0$) com coeficientes em $\mathbb{C}[k]$.

Esta proposição relaciona os coeficientes da série de uma Schwarziana para o caso geral. Por exemplo, para $k = 2$ (ver [12]), dada uma aplicação developing do tipo $\psi(z)^2$, ψ um germe de difeomorfismo na vizinhança da origem a diferencial quadrática $S_z(f)$ tem expansão em série de Laurent dada por

$$\left\{ -\frac{3}{2z^2} + \frac{b}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right\} dz^2, \quad b^2 + 2a_0 = 0.$$

E reciprocamente, se $\phi(z)$ tem tal expressão perto de $z = 0$, uma solução da equação Schwarziana será da forma $f(z) = az^2(1 + o(1))$ perto de $z = 0$.

Para $k = 2$, podemos calcular explicitamente a relação entre os coeficientes da série, para o caso geral utilizaremos o método de soluções em série próximo a um ponto regular-singular de uma equação linear de segunda ordem para provar o teorema.

Demonstração. Dada a equação diferencial $u''(z) + \frac{1}{2}\phi(z)u(z) = 0$, colocamos $u(z) = z^r(a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n + \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{r+n}$, $a_0 \neq 0$, e analisaremos para quais valores

de r , e relações de recorrência entre os b_n , teremos uma estrutura do tipo $\psi(z)^k$ para a Schwarziana dada no enunciado.

Suponhamos que exista uma solução da forma acima e substituindo na equação Schwarziana obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= u''(z) + \frac{1}{2}\phi(z)u(z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)z^{r+n-2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1-k^2}{2z^2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{r+n} + \sum_{n \geq -1} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{r+n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+r-2} z^{n+r-2} \end{aligned}$$

$$\text{onde } c_{n+r-2} = a_n \left((n+r)(n+r-1) + \frac{1}{4}(1-k^2) \right) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{n-2-i}.$$

Como $a_0 \neq 0$, podemos supor $a_0 = 1$. O termo envolvendo z^{r-2} dá origem à equação $r(r-1) + \frac{1}{4}(1-k^2) = 0$, conhecida como equação indicial e suas raízes são $r_1 = \frac{1+k}{2}$ e $r_2 = \frac{1-k}{2}$.

Analisando a equação

$$c_{n+r-2} = a_n \cdot F(r+n) + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} a_i b_{n-2-i} = 0 \quad (3.6)$$

onde $F(x) = x(x-1) + \frac{1}{4}(1-k^2)$, vemos que a_n depende de r e dos a_0, a_1, \dots, a_{n-1} . Ou seja, se os $F(r+1), \dots, F(r+n), \dots$ são não-nulos podemos calcular os $a_i, i \geq 1$.

Faremos com detalhes os recorrências para $r_1 = \frac{1+k}{2}$, e para r_2 seguirá de forma análoga.

Colocando $r_1 = \frac{1+k}{2}$ em $c_{r-1} = 0$ temos $a_1 \cdot (k+1) + \frac{1}{2}b_{-1} = 0$. Se $k = -1$, precisamos impor $b_{-1} = 0$, para ter a solução da forma desejada. Se $k \neq -1$, então $a_1 = -\frac{1}{2(k+1)}b_{-1}$. Continuando, substituímos a_1 na equação $c_r = 0$ e obtemos

$$a_2 \cdot 2(2+k) + \frac{1}{2} \left(b_0 - \frac{1}{2(k+1)}b_{-1}^2 \right) = 0.$$

Se $k = -2$, então precisamos impor $b_0 = \frac{1}{2(k+1)}b_{-1}^2$ mas se $k \neq -2$, então

$$a_2 = -\frac{1}{2(4+2k)} \left(b_0 - \frac{1}{2(k+1)}b_{-1}^2 \right).$$

Continuando esse processo, temos que se $k \neq -n+1$,

$$a_n \cdot n(n+k) + \frac{1}{2}p(b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-2}) = 0.$$

Se $k = -n$, então precisamos impor $p(b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-2}) = 0$ onde p é um polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}[k]$ e se $k \neq -n$, $a_n = -\frac{1}{2n(n+k)}p(b_{-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-2})$ e o processo pode ser continuado.

De maneira análoga, podemos fazer o mesmo para $r_2 = \frac{1-k}{2}$. ■

No modelo $f(z) = \log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, a derivada Schwarziana é dada por

$$S(f) = \left\{ \frac{z^{2n} - 2n(n^2+1)z^n + n^2(1-n^2)}{2z^2(z^n-n)^2} \right\} dz^2.$$

Analisando as derivadas Schwarzianas para valores de n vamos obter que o coeficiente do polo também determina o modelo local ao redor da cúspide.

Para $f(z) = \log z$, $S(f) = \frac{1}{2z^2}dz^2$, onde $S(f)$ tem polo em 0 de ordem 2. Quando $f(z) = \log z + \frac{1}{z}$, temos que

$$S(f) = \frac{z-4}{2z(z-1)^2}dz^2 = \left\{ -\frac{2}{z} - \frac{7}{2} - 5z - \frac{13}{2}z^2 - \dots \right\} dz^2,$$

ou seja, esse modelo nos dá uma estrutura projetiva com Schwarziana tendo um polo simples. Para $n \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$,

$$S(f) = \left\{ \frac{1-n^2}{2z^2} - 2nz^{n-2} - \frac{7}{2}z^{2n-2} - \dots \right\} dz^2$$

e tem um polo de ordem 2 em $z = 0$ para $n \geq 2$.

Logo, assim como no caso não-parabólico, para $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, o coeficiente $\frac{1-n^2}{2}$ do polo duplo determina a forma local $\log z + \frac{1}{z^n}$ a menos de automorfismo de \mathbb{CP}^1 .

Em resumo, obtemos as seguintes formas locais para a derivada Schwarziana:

Proposição 3.2. *As formas locais da Schwarziana $S(f)$ ao redor de singularidades do tipo fuchsiana são dadas por:*

- (i) $\frac{1-\alpha^2}{2z^2}dz^2$ quando $f(z) = z^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$;
- (ii) $\frac{1}{2z^2}dz^2$ quando $f(z) = \log z$;
- (iii) $\left\{ \frac{1-n^2}{2z^2} - 2nz^{n-2} - \frac{7}{2}z^{2n-2} - \dots \right\} dz^2$ quando $f(z) = \log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Agora, estamos interessados pelo processo contrário. Dada uma diferencial quadrática do tipo 3.5 para $k \in \mathbb{C}^*$ ao redor de $z = 0$ analisaremos o quociente de duas soluções linearmente independentes da equação diferencial 3.2, ou seja, queremos saber quais são os modelos locais ao redor de $z = 0$ dada a Schwarziana 3.5.

Consideramos a equação diferencial 3.2. Para resolver a equação diferencial linear, suponhamos que existe solução do tipo $u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{r+n}$, $a_0 = 1$, e analisaremos para quais valores de r , e relações de recorrência entre os a_n , $u(z)$ é uma solução para a equação da Schwarziana.

Analisando a equação 3.6 vista no Teorema 3.4, temos que a_n depende de r e dos a_0, a_1, \dots, a_{n-1} e se os $F(r+1), \dots, F(r+n), \dots$ são não-nulos podemos calcular os a_i , $i \geq 1$.

Os únicos valores de r para os quais $F(r) = 0$ são $r_1 = \frac{1+k}{2}$ e $r_2 = \frac{1-k}{2}$. Suponhamos $k \notin \mathbb{Z}$, então $r_1 + n$ é diferente de r_1 e de r_2 para $n \geq 1$ (bastaria $k \notin \mathbb{Z}^-$), logo $F(r_1 + n) \neq 0$ para $n \geq 1$. Desse modo, podemos sempre determinar uma solução da equação da forma

$$u_1(z) = z^{\frac{1+k}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) z^n \right] \quad (3.7)$$

onde $a_n(r_1)$ foi determinado pela equação 3.6 colocando $r = r_1 = \frac{1+k}{2}$.

Como $r_2 \neq r_1$ ($k \neq 0$) e $r_1 - r_2 = k$ não é um inteiro positivo, temos que $r_2 + n \neq r_1$, portanto $F(r_2 + n) \neq 0$, e podemos obter uma segunda solução

$$u_2(z) = z^{\frac{1-k}{2}} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) z^n \right] \quad (3.8)$$

Logo, $f(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)} = z^k(1 + o(1))$ satisfaz $S_z(f) = \phi(z)dz^2$, $k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

O caso excepcional é quando $r_1 - r_2 = k$ é inteiro positivo (k inteiro negativo temos a mesma Schwarziana). Nesse caso, uma das soluções é da forma 3.7. A outra não pode ser considerada da forma 3.8.

Logo, a outra solução pode ser considerada da forma

$$u_2(z) = au_1(z) \log z + z^{\frac{1-k}{2}} \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_2) z^n \right] \quad (3.9)$$

onde a é constante que pode ser nula e os coeficientes podem ser determinados substituindo a série na equação diferencial, detalhes podem ser vistos em [4], p. 277.

Logo, $f(z) = \frac{u_1(z)}{u_2(z)} = \log z^a + z^{-k}(1 + o(1))$ satisfaz $S_z(f) = \phi(z)dz^2$.

Sumarizando, obtemos:

Proposição 3.3. *Para $k \in \mathbb{C}^*$, a equação da Schwarziana*

$$S_z(f) = \left\{ \frac{1-k^2}{2z^2} + \sum_{n \geq -1}^{\infty} b_n z^n \right\} dz^2$$

tem como soluções ao redor da origem

1. $f(y) = y^k$

2. $f(y) = \log y + \frac{1}{y^k}$, se $k \in \mathbb{Z}$ (para $k < 0$, colocamos $-k$)

onde $y(z)$ é coordenada local em 0 .

Observação 3.1. Quando $k = 1$ a Schwarziana de $\log z + \frac{1}{z}$ é $\left\{ -\frac{2}{z} - \frac{7}{2} - 5z - \frac{13}{2}z^2 - \dots \right\} dz^2$, e a última descrição funciona para esse caso.

Capítulo 4

Deformações isomonodrômicas e excesso de ângulo

No espírito do Teorema de Calsamiglia, Deroin e Francaviglia ([6]), estudaremos nesse capítulo deformações contínuas da estrutura projetiva do tipo fuchsiana através de cirurgias que preservam a holonomia.

O movimento de pontos de ramificação é uma cirurgia feita ao redor de um ponto de ramificação e consiste na deformação da carta projetiva ramificada local que pode ser pensada como uma configuração análoga a das variações de Schiffer na teoria de superfícies de Riemann, conforme [30]. Esses movimentos foram introduzidos por Tan em [34] para estruturas projetivas com pontos de ramificação simples e então generalizados em [6] para pontos de ramificação de ordem superior. As variações de Schiffer, em particular os movimentos de pontos de ramificação, produzem deformações da estrutura projetiva sem alterar a representação de monodromia e em geral não preservam a estrutura complexa subjacente.

Neste capítulo, estudaremos a geometria/topologia das cartas projetivas ao redor das cúspides. Vamos definir a cirurgia de movimento de pontos de ramificação e generalizá-la quando uma das singularidades envolvida é do tipo fuchsiana.

Fixaremos o disco unitário deletado $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ como vizinhança aberta deletada de uma cúspide, a menos de biholomorfismo, e $p : T \rightarrow \mathbb{D}^*$ o recobrimento universal de \mathbb{D}^* onde $T = \{x \in \mathbb{C} \mid \Re x < 0\}$ e $p(x) = e^x$.

4.1 Cartas projetivas na vizinhança de uma cúspide

4.1.1 Geometria de z^α , $\alpha \in \mathbb{C}$

Estudaremos aqui a geometria ao redor da singularidade do tipo fuchsiana z^α através de uma decomposição do recobrimento universal do disco deletado.

Definição 4.1. O grau de uma função multivaluada $f : \mathbb{D}^* \dashrightarrow \mathbb{D}^*$ é o número máximo de pré-imagens de $z \in \mathbb{D}^*$ pelo levantamento da f ao recobrimento universal, denotaremos-a por \tilde{f} , restrita a um domínio fundamental.

Observemos que para funções multivaluadas de grau 1, \tilde{f} é injetiva em cada domínio fundamental.

Exemplo 4.1. A função multivaluada $z^{\frac{3}{2}}$ define uma carta projetiva ao redor de uma cúspide com monodromia $w \mapsto -w$ e aplicação developing $e^{\frac{3}{2}x}$ definida em T . Os pontos de $\{z \in \mathbb{D}^* \mid \text{Im } z < 0\}$ tem uma pré-imagem no domínio fundamental $T_0 = \{x \in T \mid 0 < \Im x < 2\pi\}$, enquanto os pontos de $\{z \in \mathbb{D}^* \mid \Im z > 0\}$ tem duas pré-imagens em T_0 , logo essa função tem grau 2.

Dada uma monodromia local não-parabólica conjugada a $w \mapsto e^{2\pi i\alpha}w$, quando $\Re\alpha \neq 0$ temos que a estrutura projetiva definida ao redor de um dos pontos fixos dessa monodromia, que vamos supor sendo a origem, pode ser pensada como sendo um setor de $\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, \infty\}$ centrado em 0 com abertura de ângulo $2\pi\Re\alpha$ e lados de comprimento 1 e $e^{-2\pi\Im\alpha}$ identificados pela transformação $w \mapsto e^{2\pi i\alpha}w$.

Se tomarmos $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ com $0 < \Re\alpha_0 < 1$, $0 < \Re\alpha_1 < 1$ e $\Re\alpha_0 + \Re\alpha_1 = 1$, $\Im\alpha_0 = \Im\alpha_1$, as estruturas projetivas possuem a mesma monodromia e podem ser pensadas como setores complementares de ângulos $2\pi\Re\alpha_0$ e $2\pi\Re\alpha_1$, em que cada um cola suas componentes de bordo com a transformação que define a monodromia. Os setores estão centrados em um dos pontos fixos da monodromia, que podemos supor a origem.

Geometricamente, dois pontos $(u, v), (u', v') \in T$ possuem a mesma imagem pela *dev* se, e somente se, $(u', v') = (u, v) - \frac{2\pi i}{\alpha}\mathbb{Z} = (u, v) - \beta\mathbb{Z}$, onde $\beta = \frac{2\pi i}{\alpha}$.

O semi-plano $au - bv < 0$ é decomposto em faixas biholomorfas ao disco menos o raio $[0, 1)$ pela *dev* e essa decomposição é dada por retas paralelas a $av + bu = 0$ e equidistantes com distância $\frac{2\pi}{|\alpha|}$.

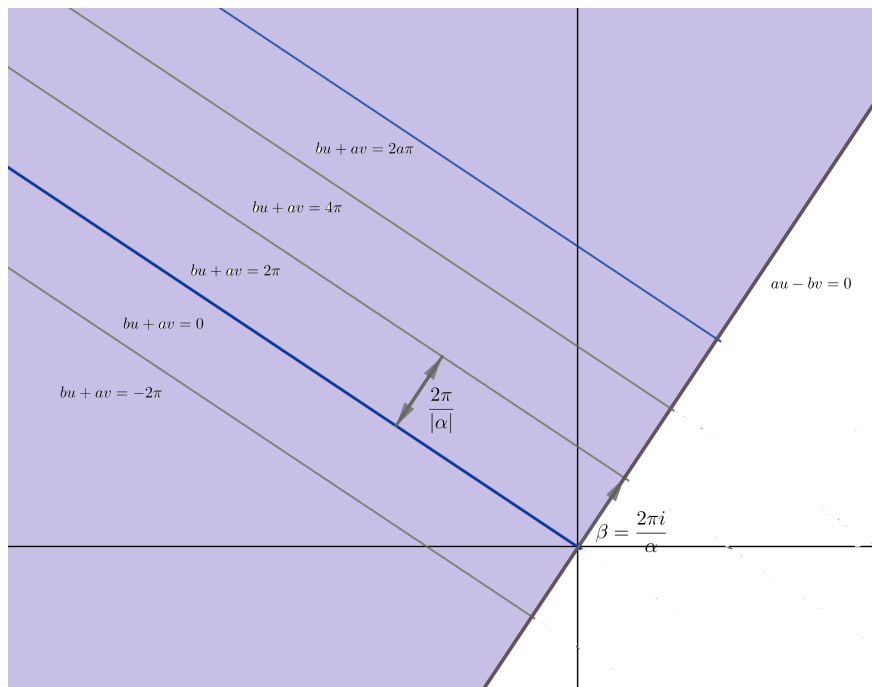


Figura 4.1: Decomposição de $dev(x) = e^{\alpha x}$, $\Re\alpha > 0$

Mudaremos o recobrimento universal de \mathbb{D}^* de modo que o novo domínio fundamental é dado por uma faixa cujo bordo é constituído pelas retas $bu + av = 0$ e $bu + av = 2\pi|\alpha|$. Logo, o número máximo de pré-imagens de $z \in \mathbb{D}^*$ pela dev restrito a esse domínio fundamental é $\lceil \Re\alpha \rceil$, e esse é portanto o grau de z^α .

No caso em que $\Re\alpha = 0$, o domínio fundamental T_0 recobre um anel $A = \{z \in \mathbb{C} \mid e^{-2\pi b} < |z| < 1\}$ através da $dev(x) = e^{ibx}$. A ação da dev é definida pela translação $w \mapsto w - \frac{2\pi}{b}$ onde o semi-plano $v > 0$ será decomposto pelas retas paralelas a $u = 0$ e equidistantes com distância $\frac{2\pi}{|b|}$, conforme figura 4.2 abaixo. Nesse caso, a estrutura projetiva pode ser vista como o anel A com os bordos identificados pela transformação $w \mapsto e^{-2\pi b}w$, que é topologicamente um toro.

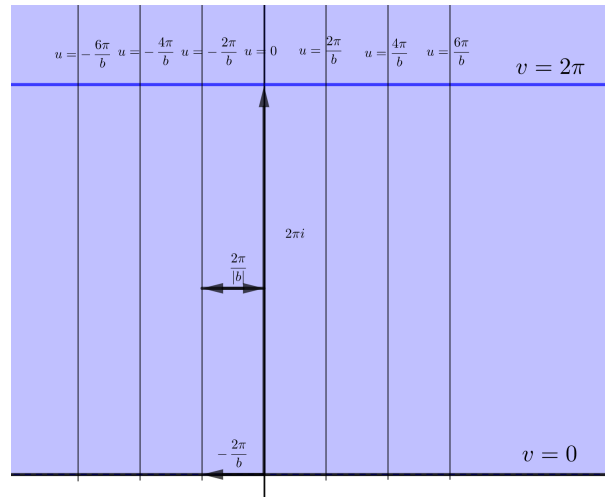


Figura 4.2: Decomposição de $dev(x) = e^{ax}$, $\Re\alpha = 0$

A menos de uma composição com $z \mapsto \frac{1}{z}$ os z^α com $\Re\alpha > 0$ vão cobrir todos os z^α com $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$, $\Re\alpha \neq 0$. Através de duas ações no recobrimento universal do \mathbb{D}^* obtemos a seguinte classificação de estruturas projetivas do tipo z^α , $\Re\alpha > 0$.

Proposição 4.1. *A estrutura projetiva definida pelos ramos de z^α , $\Re\alpha > 0$, em \mathbb{D}^* é representada por um par de vetores $(2\pi i, \frac{2\pi i}{\alpha})$, onde $x \mapsto x + 2\pi i$ e $x \mapsto x + \frac{2\pi i}{\alpha}$ são ações de $\pi_1(\mathbb{D}^*)$ no recobrimento universal de \mathbb{D}^* . Reciprocamente, esse par define a estrutura projetiva definida pelos ramos de z^α em \mathbb{D}^* .*

Demonstração. Foi visto acima que dada uma estrutura projetiva definida pelos ramos de z^α em \mathbb{D}^* , teremos duas ações $x \mapsto x + 2\pi i$ e $x \mapsto x + \frac{2\pi i}{\alpha}$ do recobrimento universal de \mathbb{D}^* . Reciprocamente, dado o par $(2\pi i, \frac{2\pi i}{\alpha})$, estabelecemos que $2\pi i$ é o vetor da ação de $\pi_1(\mathbb{D}^*)$ no recobrimento universal de \mathbb{D}^* e $\frac{2\pi i}{\alpha}$ é o vetor da ação da equivariância da dev pela representação de monodromia.

Para mostrar que esse par se associa a estrutura proveniente dos ramos de z^α , basta mostrar que existe um biholomorfismo $\tilde{\phi} : T \rightarrow T$ tal que $\tilde{\phi}(t + 2\pi i) = \tilde{\phi}(t) + 2\pi i$ e $dev = e^{\alpha x} \circ \tilde{\phi}$.

De fato, colocando $\tilde{\phi} = id$ temos que as condições acima são satisfeitas e $\tilde{\phi}$ desce a \mathbb{D}^* , obtendo uma equivalência de estruturas projetivas em \mathbb{D}^* com monodromia não-parabólica. ■

4.1.2 Topologia de $\log z + \frac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Descreveremos topologicamente $\log z + \frac{1}{z^n}$, para isso faremos um breve estudo de estruturas induzidas pelo *pull-back* de estruturas de translação no disco deletado por uma aplicação de recobrimento de grau ≥ 2 . Aqui uma estrutura de translação em uma superfície é definida como um atlas de cartas ao plano tais que as mudanças de cartas são translações.

Os ramos de $\log z$ e $\log z + \frac{1}{z}$ definem estruturas de translações diferentes em \mathbb{D}^* , por exemplo. Mostraremos que essas estruturas e seus *pull-backs* por aplicações de recobrimento de grau ≥ 2 nos fornecem uma lista de estruturas de translação em \mathbb{D}^* a menos de equivalência projetiva. Escolheremos um ramo do logaritmo tal que $\log(\gamma \cdot z) = \log z + 2\pi i$, onde $\langle \gamma \rangle = \pi_1(\mathbb{D}^*)$ e $z \in \mathbb{D}^*$.

Proposição 4.2. *As estruturas de translação em \mathbb{D}^* induzidas pelo pull-back de $\log z$ pela aplicação $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, são projetivamente equivalentes a $\log z$.*

Demonstração. De fato, o *pull-back* de $\log z$ por z^n é a função multivaluada $n \log z$ em \mathbb{D}^* e sua representação de monodromia é dada por $\rho : \pi_1(\mathbb{D}^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ onde $\rho([\gamma])(w) = w + 2\pi i n$ e a transformação de Möbius $T(\xi) = \frac{\xi}{n}$ conjuga as monodromias ($T \circ \rho([\gamma]) \circ T^{-1}(w) = w + 2i\pi$) e $\log z$ é a pós-composição de $n \log z$ com T , portanto definem estruturas projetivas equivalentes em \mathbb{D}^* . ■

Como estrutura de translação, a estrutura definida por $\log z$ pode ser vista como um cilindro infinito com um fim. De fato, levantando $z \in \mathbb{D}^*$ ao recobrimento universal T , temos $z = e^x$, $x \in T$, identificando as semi-retas $2\pi i + \mathbb{R}^-$ e \mathbb{R}^- pela translação $x \mapsto x + 2\pi i$, obtemos que x está num cilindro infinito com um fim.

Sabemos que qualquer determinação de $\log z$ em \mathbb{C} menos uma semi-reta partindo da origem restrita ao disco deletado \mathbb{D}^* é injetiva, vamos mostrar que $\log z + \frac{1}{z}$ também é injetiva restrita a uma vizinhança deletada da origem. Para isso usaremos algumas ideias da Seção 2.2 de [3] onde está feito um estudo de modelos locais de polos de formas meromorfas que induzem estruturas de translação em superfícies de Riemann compactas.

Sejam $U_R = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R\}$ e V_R a superfície de Riemann obtida retirando de U_R a π -vizinhança da semi-reta real \mathbb{R}^- e identificando as linhas $-i\pi + \mathbb{R}^-$ e $i\pi + \mathbb{R}^-$ através da translação $z \mapsto z + 2\pi i$.

Escolhendo a determinação usual de $\log z$ em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ restrito a $U_{R'}$, obtemos a aplicação $z \mapsto z + \log z$ bem-definida de $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$ a \mathbb{C} .

Proposição 4.3. *A aplicação $z + \log z$ se estende a uma aplicação holomorfa injetiva $f : U_{R'} \rightarrow V_R$ para R' suficientemente grande.*

Demonstração. Afirmamos que a aplicação $f(z) = z + \log z$ é injetiva restrita a $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$. Vemos que f é localmente injetiva para $R' > 1$ pois $f'(z) \neq 0$ em $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$.

Para mostrar a injetividade global, sejam z_1, z_2 pontos distintos de $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$ e suponhamos primeiramente que z_1 e z_2 estão em semi-planos diferentes, i.e., $\Im z_1 < 0 < \Im z_2$ assim $\Im(\log z_1) < 0 < \Im(\log z_2)$ pois $\text{Arg } z_1 < 0 < \text{Arg } z_2$ e portanto $\Im(f(z_1)) < 0 < \Im(f(z_2))$, logo $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Se z_1 e z_2 estão no mesmo semi-plano, tomamos γ um caminho suave retificável ligando-os de comprimento $l(\gamma)$ no máximo $2|z_1 - z_2|$ em $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$, então uma aplicação

da desigualdade triangular e o Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de linha nos dá:

$$\begin{aligned}
|f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_{\gamma} f'(z) dz \right| \\
&\geq \left| \int_{\gamma} dz \right| - \left| \int_{\gamma} [f'(z) - 1] dz \right| \\
&\geq |z_1 - z_2| - \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|} \\
&> |z_1 - z_2| - \frac{l(\gamma)}{R'}
\end{aligned}$$

Tomando $R' > 2$, isto nos dá $|f(z_1) - f(z_2)| > 0$, logo f é injetiva.

Observemos que f é holomorfa em $U_{R'} \setminus \mathbb{R}^-$ por ser soma de funções holomorfas. Falta mostrar que essa aplicação se estende holomorficamente a $U_{R'}$. De fato, escrevendo em coordenadas polares $z = |z|e^{i\theta}$, onde $\theta \in (-\pi, \pi]$, $Arg(z) = \theta$, temos que a imagem por f quando aproximamos de \mathbb{R}^- pela parte imaginária positiva é

$$\lim_{\theta \rightarrow \pi} f(|z|e^{i\theta}) = \lim_{\theta \rightarrow \pi} |z|e^{i\theta} + \log |z| + i\theta = -|z| + \log |z| + i\pi$$

e se aproximamos pela parte imaginária negativa temos

$$\lim_{\theta \rightarrow -\pi} f(|z|e^{i\theta}) = -|z| + \log |z| - i\pi$$

que em V_R são identificadas. Logo, $f : U_{R'} \setminus \mathbb{R}^- \rightarrow V_R$ se estende holomorficamente a \mathbb{R}^- . ■

Compondo com uma inversão e uma rotação de $-\pi$ graus ($z \mapsto -\frac{1}{z}$) obtemos uma carta projetivamente equivalente a $\log z + \frac{1}{z}$ e concluímos que ela também é injetiva restrita a uma vizinhança deletada da origem, como queríamos. Falta mostrar que f é sobrejetiva numa vizinhança do infinito e concluir através da Proposição 4.3 que essa carta definida na vizinhança da origem é topologicamente V_R . De fato, temos

Proposição 4.4. *A função $f : U_{R'} \rightarrow V_R$ é sobrejetiva numa vizinhança do infinito, i.e., para $Z \in V_R$ com módulo suficientemente grande, existe $z \in U_{R'}$ tal que $f(z) = Z$.*

Demonstração. Dado $Z \in V_R$, consideremos $g(z) = Z - \log z$, onde o ramo de $\log z$ é definido para $z \in U_{R'}$ com $z = |z|e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi]$, como $\log z = \log |z| + i\theta$. Observemos que g é uma contração¹, de fato, $|g'(z)| = \frac{1}{|z|} < 1$ para $z \in U_{R'}$ e portanto g restrita a cada um dos domínios convexos $\{z \in U_{R'} \mid \Im(z) > 0\}$ e $\{z \in U_{R'} \mid \Im(z) < 0\}$ é uma contração. Escolhemos $\rho = 2 \log |Z|$ e uma bola B centrada em Z e raio ρ .

Suponhamos que B não intersecta \mathbb{R}^- . Afirmamos que a imagem de B pelo ramo do logaritmo escolhido acima está contida no disco $D = D(0, 2 \log |Z|)$ para $|Z|$ suficientemente grande.

¹Uma aplicação entre espaços normados $T : (C, \|\cdot\|) \rightarrow (C, \|\cdot\|)$ é uma contração se $\|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|$, $\forall x, y \in C$ e $0 \leq k < 1$.

A imagem de $U_{R'}$ por $\log z$ é o retângulo $R = \{w \in \mathbb{C} \mid \Re w > \log R', -\pi < \Im w \leq \pi\}$. Tomando a reta que une a origem e Z , ela corta o bordo de B em um ponto z_0 (o ponto de \bar{B} mais distante da origem) cuja distância desse ponto à origem é $|Z| + 2 \log |Z|$, logo, $\forall z \in B$, $|z| < |Z| + 2 \log |Z|$. É suficiente mostrar que a imagem do anel $A = A(0, R'; |Z| + 2 \log |Z|)$ por $\log z$ está contida no disco D , i.e., $\log |z| < 2 \log |Z|$, $\forall z \in A$ para $|Z|$ suficientemente grande. Como

$$|Z| + 2 \log |Z| < |Z| + 2|Z| = 3|Z| \neq |Z|^2$$

para $|Z| > 3$ e a função logarítmica real é monótona crescente,

$$\log |z| < \log(|Z| + 2 \log |Z|) < 2 \log |Z|,$$

para todo $z \in A$. Logo, a imagem por $\log z$ do anel A está contida no disco D , para $|Z|$ suficientemente grande, em particular, $B \subset D$.

Compondo $\log z$ com os automorfismos de \mathbb{C} : $w \mapsto -w$ e $\xi \mapsto \xi + Z$, concluímos que $g(B) \subset B$ para $|Z|$ suficientemente grande.

Se B intersecta \mathbb{R}^- , consideraremos $B^+ = B \cap \{z \mid \Im(z) > 0\}$ se $\Im(Z) > 0$ (ou $B^- = B \cap \{z \mid \Im(z) < 0\}$ se $\Im(Z) < 0$). A imagem de B^+ (ou B^-) por $\log z$ está contido no retângulo $R^+ = R \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$ (ou $R^- = R \cap \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z < 0\}$).

De maneira análoga, podemos mostrar que as imagens de B^\pm por $\log z$ estão contidas em D com $B^+ \subset D^+ = D \cap \{\Im z > 0\}$ e $B^- \subset D^- = D \cap \{\Im z < 0\}$ para $|Z|$ maior que uma constante suficientemente grande e, finalmente, compondo com a isometria $w \mapsto Z - w$ obtemos $g(B^\pm) \subset B^\pm$.

Então, segue do Teorema do ponto fixo das contrações que existe um ponto fixo de g em \bar{B} , ou seja, um ponto z tal que $z + \log(z) = Z$. \blacksquare

Sabemos que a estrutura projetiva definida pelos ramos de $\log z$ pode ser pensada como um setor baseado no infinito definido pela região entre duas retas horizontais separadas por $2\pi i$ identificadas através da translação $w \mapsto w + 2\pi i$. Se tomarmos o outro “setor” com ponto base no infinito, com o mesmo bordo e identificamos com a mesma translação obtemos a descrição da estrutura projetiva definida por $\log z + \frac{1}{z}$. Essa relação de complementaridade entre estruturas projetivas locais com mesma monodromia é semelhante a que ocorre no caso de monodromia não-parabólica conjugada a $w \mapsto e^{2\pi i \alpha_0} w$ e satisfazem $\Re \alpha_0 + \Re \alpha_1 = 1$, $0 < \Re \alpha_0 < 1$ e $0 < \Re \alpha_1 < 1$, $\Im \alpha_0 = \Im \alpha_1$.

Proposição 4.5. *A estrutura projetiva em \mathbb{D}^* dada pelo pull-back de $\log z + \frac{1}{z}$ por $z \mapsto z^n$ é projetivamente equivalente a $\log z + \frac{1}{z^n}$.*

Demonstração. Reescalando $\log z + \frac{1}{z}$ por $\zeta \mapsto \frac{1}{n}\zeta$ e compondo com um recobrimento de ordem n obtemos $-\log n + n \log z + \frac{n}{z^n}$ e pós-compondo com a transformação $T(z) = \frac{1}{n}(z + \log n)$, concluímos. \blacksquare

Segue dessa proposição que $\log z + \frac{1}{z^n}$, em termos de estrutura projetiva, é um reescalamento e um rotacionamento adequado do recobrimento de ordem n de V_R .

Observação 4.1. As equivalências das proposições 4.2 e 4.5 estão na classe das estruturas projetivas, elas não são equivalentes vistas como estruturas de translação.

4.2 Curvas gêmeas

Seja S uma superfície de Riemann fechada munida de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana com aplicação *developing dev*.

Definição 4.2. Seja p uma singularidade do tipo fuchsiana. Um par de gêmeas mergulhadas em S é um par de curvas mergulhadas $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ que partem de p e existe uma determinação da aplicação *developing* ao redor de $\gamma_1 \cup \gamma_2$ que mapeia injetivamente γ_1, γ_2 na mesma curva simples $\hat{\gamma} \subset \mathbb{CP}^1$.

Dado um par de curvas gêmeas iremos definir e generalizar na próxima seção uma cirurgia de corte e cola chamada movimento de pontos de ramificação que preserva a holonomia. Mas antes disso, vamos encontrar famílias de gêmeas fixando a imagem pela *dev* para as cartas que estamos trabalhando. Esse estudo será importante no momento de excluir as cartas que não serão candidatas para a resultante da cirurgia.

Ao redor de um ponto de ramificação de ordem n , a carta coordenada é dada por z^n , $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ de acordo com a proposição 1.1. Observemos que restrito ao disco \mathbb{D} a aplicação $z \mapsto z^n$ leva raios em raios e setores em setores do disco. Fixando um raio na imagem, digamos o intervalo aberto $(0, 1)$, ele possui exatamente n pré-imagens dadas por raios no disco deletado. Esses raios levantam-se ao recobrimento universal T de \mathbb{D}^* e dividem igualmente um domínio fundamental em n partes. Nesse caso, os raios são segmentos de geodésicas no modelo do disco de Poincaré e podem ser tomados como gêmeas.

Para $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$, de maneira análoga ao caso natural podemos obter gêmeas através de segmentos de geodésicas com pré-imagens de $(0, 1)$ pela *dev*, pois raios também vão em raios pela aplicação z^a . Escrevendo $a = a_0 + n$, $0 < a_0 < 1$ e $n \in \mathbb{N}$, esses segmentos levantam-se ao recobrimento universal de \mathbb{D}^* com $n+1$ cópias em cada domínio fundamental. Observemos que como $dev(w) = e^{aw}$ é holomorfa e injetiva em cada domínio fundamental para $a \in (0, 1]$ e portanto é necessário impor $a > 1$ para a existência de curvas gêmeas.

Em geral, temos $dev(x) = e^{\alpha x}$, com $x = u + iv \in T$ e $\alpha = a + ib$, $a > 0$, a imagem de *dev* está contida no disco deletado se $au - bv < 0$ e as pré-imagens do raio $(0, 1)$ são dadas por $av + bu = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Escolheremos a orientação $u \rightarrow -\infty$ e as retas $av + bu = 2\pi k$ com essa orientação são possíveis gêmeas dessa carta cujas imagens em \mathbb{D}^* são espirais equiangulares que convergem para a origem quando $a \neq 0$. Nesse caso, as gêmeas obtidas não são geodésicas.

Conforme o estudo do grau de $dev(x) = e^{\alpha x}$ feito na seção anterior, temos que existem curvas gêmeas para $\Re \alpha > 1$.

No caso de monodromia parabólica, vimos na seção anterior que $\log z$ e $\log z + \frac{1}{z}$ são injetivas em \mathbb{D}^* , logo não têm gêmeas. Para $n \geq 2$, $\log z + \frac{1}{z^n}$ pode ser visto como recobrimento ramificado de ordem n de $\log z + \frac{1}{z}$, conforme foi feito na proposição 4.5 e portanto a pré-imagem de um raio terá n cópias em \mathbb{D}^* por $\log z + \frac{1}{z^n}$ e são as gêmeas candidatas nesse modelo.

4.3 Uma generalização da cirurgia

Seja S uma superfície de Riemann fechada munida de uma estrutura projetiva ramificada com aplicação *developing dev*.

Primeiramente, descreveremos a cirurgia de movimento de pontos de ramificação, conforme foi feito em [6].

Seja p um ponto de ramificação de S , tomamos γ_1, γ_2 curvas gêmeas partindo de p com pontos finais q_1 e q_2 . Denotamos por α e β os ângulos que formam em p , e por θ_i os ângulos em $q_i, i = 1, 2$, onde $\theta_i = 2\pi$, se q_i for um ponto regular. Uma nova estrutura projetiva ramificada em S será obtida cortando S em $\gamma_1 \cup \gamma_2$ e colando as cópias conforme as identificações feitas na figura 4.3.

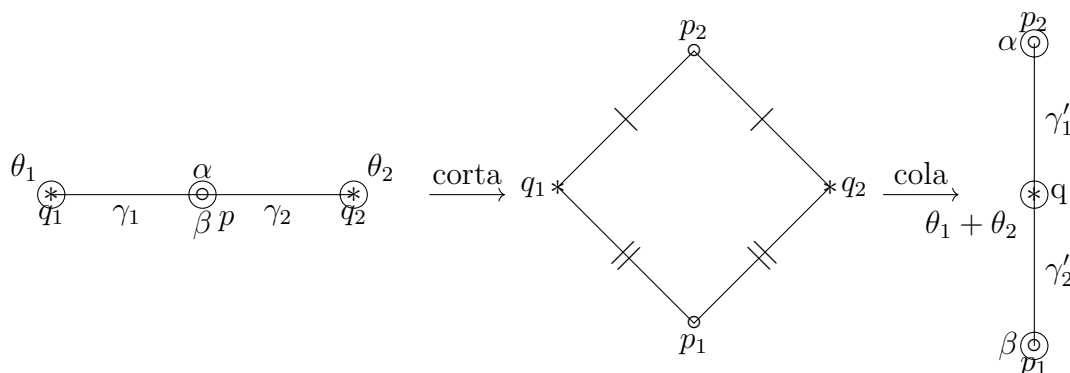


Figura 4.3: Movimento de ponto de ramificação

Após esse processo, obtemos duas novas curvas gêmeas γ'_1 e γ'_2 partindo de um ponto q com ângulo total igual a $\theta_1 + \theta_2$ e os pontos finais p_1 e p_2 das novas gêmeas possuem ângulo β e α , respectivamente. Observemos que a imagem de γ'_1 e γ'_2 pela aplicação *developing* é a mesma imagem de γ_1 e γ_2 , ou seja, a cirurgia não muda a imagem pela *dev*, logo temos um par de gêmeas mergulhadas induzidas na nova estrutura, e voltaremos a estrutura inicial se movermos os pontos ao longo desse par.

Notemos que os ângulos α, θ_i e β são múltiplos de 2π e se p é um ponto de ramificação simples, então $\alpha = \beta = 2\pi$. Esse processo é conhecido como movimento de pontos de ramificação e descreve localmente uma deformação contínua no espaço das classes de estruturas projetivas ramificadas sobre S com representação de monodromia fixada. Além de usado para colapsar pontos de ramificação, o processo pode ser utilizado para mudar a posição de pontos de ramificação e para separar um ponto de ramificação de ordem superior em vários pontos de ramificação de ordem menor.

Calsamiglia, Deroín e Francaviglia em [6] provam que duas estruturas projetivas ramificadas em superfícies compactas com mesma holonomia quasi-fuchsiana e mesmo grau de ramificação são relacionadas por um movimento de pontos de ramificação, desse modo é possível usar essa cirurgia para mostrar a não-unicidade de estruturas projetivas com mesma representação de monodromia.

Gostaríamos de generalizar essa cirurgia supondo que um dos q_i é uma singularidade do tipo fuchsiana. Sabemos que para singularidades mais gerais perdemos a noção de

ângulo como temos para o caso de pontos de ramificação e para singularidades do tipo z^a , $a \in \mathbb{R}$, também. Desse modo, vamos reconhecer o tipo de singularidade através das caracterizações que obtivemos anteriormente.

4.3.1 Singularidades com monodromia não-parabólica

Sabemos que as singularidades com monodromia não-parabólica podem ser subdivididas em singularidades com monodromia trivial, elíptica, hiperbólica e loxodrômica. Temos que na representação de monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{D}^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ dada por $\rho([\gamma])(w) = e^{2\pi i \alpha} w$, $\langle [\gamma] \rangle = \pi_1(\mathbb{D}^*)$, $w \in \mathbb{C}P^1$ e $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}^*$ quando $b = 0$, $\rho(\pi_1(\mathbb{D}^*))$ é elíptica e, se em particular $a \in \mathbb{Z}$ a representação é trivial. Se $a = 0$, então a representação é dada por $w \mapsto e^{-2\pi b} w$, $b \in \mathbb{R}$ não-nulo, ou seja, é hiperbólica, e essas são casos particulares de representações loxodrômicas, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Para as primeiras, a cirurgia foi descrita acima. Estudaremos aqui a cirurgia de movimento de ponto de ramificação quando as gêmeas partem de um ponto de ramificação simples e os pontos finais são uma singularidade do tipo z^α , $\alpha \in \mathbb{C}^*$, e um ponto regular ou ponto de ramificação. Como essa cirurgia preserva a holonomia, esperamos que a singularidade resultante seja da forma $z^{\alpha+n}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.

Seja S uma superfície de Riemann fechada munida de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana.

As singularidades com monodromia elíptica $w \mapsto e^{2\pi i a} w$ são do tipo z^a , $a \in \mathbb{R}$. Essas singularidades são conhecidas como cônicas e possuem a geometria de um cone standard tendo um único invariante que é a sua abertura dada por um número real positivo.

Definição 4.3. Um *cone standard* de ângulo θ é

$$V_\theta = \{(r, t) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 0; t \in \mathbb{R}/\theta\mathbb{Z}\} / (0, t) \sim (0, t')$$

munido da métrica $ds^2 = dr^2 + r^2 dt^2$.

Um cone de ângulo θ é produzido a partir de um setor de ângulo θ (θ pode ser maior que 2π) colando os bordos por uma isometria, como na figura 4.4.

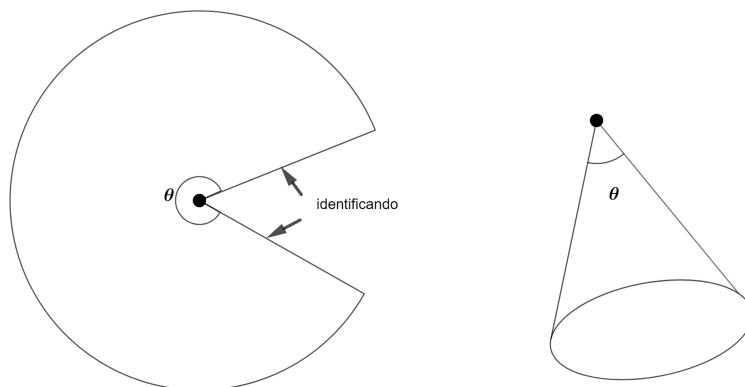


Figura 4.4: Cone standard de ângulo θ

Portanto, a topologia de z^a , $a \in \mathbb{R}$, ao redor da origem é a de um cone de ângulo $2\pi a$. Quando $a \in \mathbb{Z}$, dizemos que o ângulo é integral.

As singularidades cônicas ainda possuem a mesma noção de ângulo que tem no caso de pontos de ramificação. Assim a cirurgia de movimentar pontos de ramificação vai funcionar do mesmo modo. De fato, sejam duas gêmeas γ_1 e γ_2 partindo do ponto de ramificação p com pontos finais q_1 e q_2 , onde q_1 é uma singularidade cônica de ângulo $2\pi a$ e q_2 é um ponto de ramificação de ordem n . Após a cirurgia, o ponto p se separa em dois pontos de ramificação p_1 e p_2 e o ponto q_2 se junta a q_1 , formando uma singularidade cônica de ângulo $2\pi(a + n)$, conforme a figura 4.5.

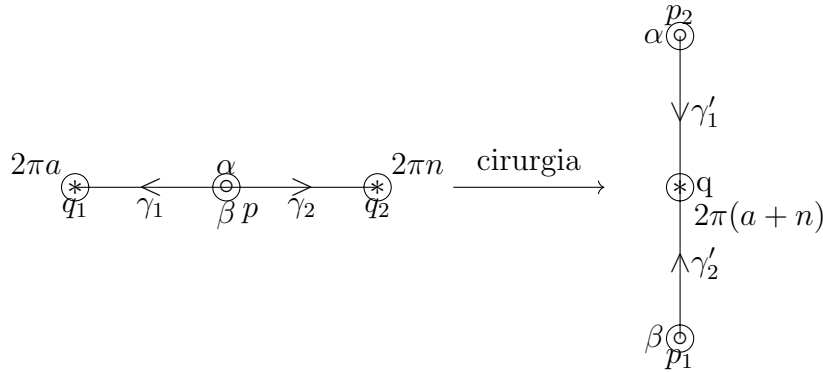


Figura 4.5: Movimento de ponto de ramificação para singularidades cônicas

Logo, após a cirurgia obteremos uma singularidade cônica com carta coordenada z^{a+n} , $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ equivariante pela mesma monodromia elíptica $w \mapsto e^{2\pi ia} w$. Podemos também fazer a inversa dessa cirurgia e voltar a estrutura inicial.

Em [36], Troyanov caracterizou superfícies compactas, orientáveis com singularidades cônicas dados alguns invariantes. Esses invariantes são números reais que representam a abertura do cone e por fim, ele obteve uma classificação dessas superfícies. Mais precisamente, dados $p_1, \dots, p_k \in S$ e $\theta_1, \dots, \theta_k > 0$, se $\chi(S) + \sum_{i=1}^k (2\pi - \theta_i) < 0$ (respectivamente $= 0$ ou $= 1$), então existe uma métrica hiperbólica (respectivamente, Euclidiana ou esférica) em $S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ com uma singularidade cônica de ângulo θ_i em p_i .

A próxima proposição nos dá exatamente qual é a forma resultante para a inversa da cirurgia no caso $\Re\alpha > 1$, ou seja, quando o grau da função multivaluada z^α é no mínimo 2. Dadas duas curvas gêmeas partindo de z^α , vamos retirar um ângulo de 2π , que visto em um domínio fundamental, seria retirar uma das faixas biholomorfa ao disco menos um raio através da $dev(x) = e^{\alpha x}$ e colar no sentido perpendicular ao bordo da faixa obtendo uma nova decomposição do domínio fundamental e usar a caracterização geométrica da singularidade z^α obtida na Proposição 4.1 para encontrar a nova carta projetiva. Observemos que nesse caso não temos mais a noção de ângulo que tínhamos antes.

Proposição 4.6. *Sejam γ_1, γ_2 um par de gêmeas que partem de uma singularidade p do tipo z^α , com $\Re\alpha > 1$, formando um setor com ângulo 2π e cujos pontos finais q_1 e q_2 são pontos regulares. A inversa da cirurgia do movimento que retira o ângulo 2π em*

p resulta em um ponto de ramificação simples de onde partem duas curvas gêmeas com pontos finais uma singularidade do tipo $z^{\alpha-1}$ e um ponto regular.

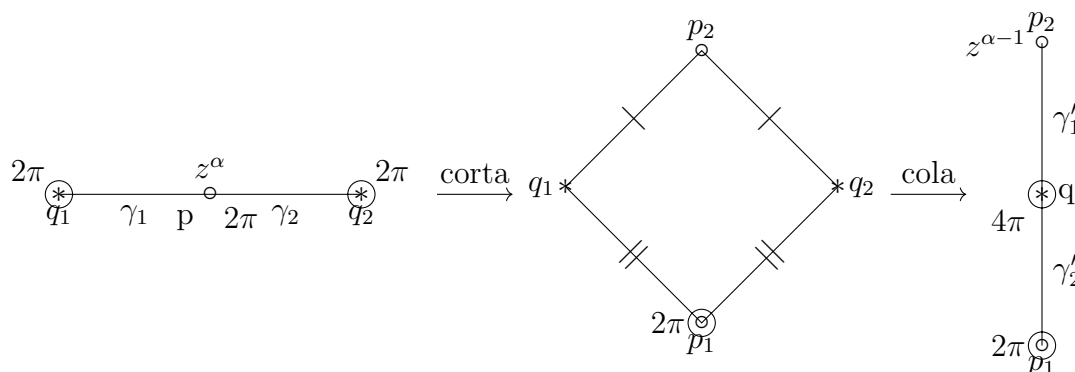


Figura 4.6: Inversa do movimento de ponto de ramificação em z^α

Demonstração. Após o processo de corte e cola, a identificação dos dois pontos regulares q_1 e q_2 nos dará um ponto de ramificação simples q , faltaria mostrarmos que retirar um ângulo 2π (que fornecerá um ponto regular no final do processo) de z^α resultará em uma singularidade do tipo $z^{\alpha-1}$.

Sabemos que o semi-plano $au - bv < 0$ é decomposto em faixas biholomorfas ao disco menos o raio $[0, 1)$ pela *dev* e essa decomposição é dada por retas paralelas a $av + bu = 0$ e equidistantes com distância igual a $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ e o grau da *dev* é $[\Re\alpha]$ conforme visto na figura 4.1.

Retiraremos uma faixa biholomorfa ao disco menos o raio pela *dev* e todas suas cópias via ação do grupo fundamental $\pi_1(\mathbb{D}^*)$ e definiremos uma relação no feixe de retas $av + bu = 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, dada por $u + iv \sim u' + iv' + j\beta$, $j \in \mathbb{Z}$, onde essa relação identifica os bordos das faixas na direção do vetor $\beta = \frac{2\pi i}{\alpha}$.

De fato, $av + bu = 2k\pi$ cola com a reta $av + bu = 2(k+1)\pi$, onde k é o grau da *dev*, no sentido do vetor β e o mesmo acontece com os outros domínios fundamentais a reta $a(v - 2\pi m) + bu = 2k\pi$ cola com $a(v - 2\pi m) + bu = 2(k+1)\pi$ no sentido do mesmo vetor β , onde $m \in \mathbb{Z}$.

Obteremos uma nova coordenada complexa que a denotaremos por $t = r + is$ e nessa coordenada a colagem está contida no semi-plano $ar - bs < 0$.

A *dev* inicial é dada por $D(x) = e^{\alpha x}$. Como o feixe de retas são as gêmeas da estrutura projetiva em \mathbb{D}^* vemos que $D(0) = D(\beta)$ e segue da equivariância de D pela representação de monodromia $\rho : \pi_1(\mathbb{D}^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ dada por $\rho([\gamma]) = e^{2\pi i \alpha} w$ que $D(2\pi i) = D(0+2\pi i) = D(\beta) \cdot e^{2\pi i \alpha}$, aqui usamos a ação $x \mapsto x+2\pi i$ do grupo fundamental em T .

Observemos que $D(\beta + w) = D(\beta) \cdot e^{2\pi i \alpha}$, onde $w = 2\pi i - \beta$. Afirmamos que D é equivariante pela representação de monodromia ρ e a nova ação do grupo fundamental é dada por $x \mapsto x + w$. Bastamos mostrar que, $\forall x \in T$, $D(x + w) = D(x) \cdot e^{2\pi i \alpha}$. De fato, $D(x + w) = D(x + 2\pi i - \beta) = D(x - \beta) \cdot e^{2\pi i \alpha} = D(x) \cdot e^{2\pi i \alpha}$, pois $D(x - \beta) = D(x)$.

Obteremos um novo domínio T' da aplicação de recobrimento e uma nova aplicação

developing D_1 equivariante pela ρ com a nova ação do grupo fundamental e as imagens coincidirão com a da aplicação *developing* inicial nos pontos respectivos colados.

O domínio T' é simplesmente conexo, o seu quociente pela ação de $x \mapsto x + w$ é homeomorfo a \mathbb{D}^* e portanto pode ser tomado como um recobrimento universal de \mathbb{D}^* . Como recobrimentos universais são essencialmente únicos, i.e., existe um homeomorfismo $f : T \rightarrow T'$ tal que comuta com as aplicações de recobrimento de \mathbb{D}^* .

Usando a classificação obtida na Proposição 4.1 através de vetores que definem a estrutura projetiva em \mathbb{D}^* , temos que após a cirurgia eles são dados por $(w, \beta) = (2\pi i (\frac{\alpha-1}{\alpha}), \frac{2\pi i}{\alpha})$ e a transformação linear $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $L(t) = \frac{\alpha}{\alpha-1}t$ leva-os a um par da forma $(2\pi i, \beta')$ onde $\beta' = \frac{2\pi i}{\alpha-1}$ e portanto a estrutura obtida é biholomorficamente equivalente a $z^{\alpha-1}$ em \mathbb{D}^* com nova aplicação *developing* dada por $D_1 \circ L^{-1}$. ■

4.4 Excesso de ângulo

Nesta seção, relacionaremos a ausência de gêmeas com o excesso de ângulo em uma singularidade da estrutura projetiva e, finalmente, listar as singularidades candidatas a serem deformadas isomodromicamente.

Seguirá da demonstração do Teorema de Existência que ao redor de cada singularidade p da estrutura projetiva do tipo fuchsiana as cartas projetivas são definidas, a menos de mudança conforme, por:

- Singularidades com monodromia trivial: z^{n_p+1} ;
- Singularidades com monodromia não-parabólica: $z^{\alpha+n_p}$, $0 \leq \Re\alpha < 1$;
- Singularidades com monodromia parabólica: $\log z$ ou $\log z + \frac{1}{z^{n_p+1}}$

e definimos como $n_p \in \mathbb{N}$ o excesso de ângulo em cada ponto singular.

Seguirá do fato que os modelos $\log z$, $\log z + \frac{1}{z}$ e z^α , $0 < \Re\alpha < 1$, são injetivos em \mathbb{D}^* , e que a singularidade z^α , $\Re\alpha = 0$, sequer possui curvas convergindo para o ponto fixo da monodromia conforme vimos na seção 4.1 acima e portanto não possuirão gêmeas partindo desses tipos de singularidades.

Logo, podemos concluir que os modelos rígidos, ou seja, aqueles que não possuem gêmeas são os modelos que não possuem excesso de ângulo e os modelos $\log z + \frac{1}{z^n}$, $n \geq 2$ e z^α , $\Re\alpha > 1$ possuem gêmeas e são candidatas a serem deformadas isomodromicamente.

Capítulo 5

Interpretações álgebro-geométricas para estruturas projetivas do tipo fuchsiana

Neste capítulo, serão abordados resultados adicionais ao teorema de existência de estruturas projetivas singulares de tipo fuchsiana provado no Capítulo 2. Podemos ver esse teorema de existência de outra forma, além da representação de monodromia prescrita, encontraremos uma relação que nos dá uma condição necessária para a estrutura projetiva existir e a partir dessa relação, obteremos condições sobre o grau do divisor de *branching* da estrutura.

5.1 Conceitos e resultados

Nesta seção, fixaremos notações e recordaremos conceitos importantes de teoria de folheações e alguns invariantes sobre curvas suaves que serão importantes para calcular a autointerseção de uma seção de fibrado.

5.1.1 Número de interseção

Nesta subseção, definiremos o número de interseção entre duas curvas em uma superfície regular e listaremos algumas propriedades que serão usadas mais tarde para calcular a autointerseção de uma seção de um fibrado holomorfo. A principal referência para esta subseção é [2], p. 65-67.

Sejam C, C' duas curvas numa superfície regular S e x um ponto de interseção isolado entre elas. Sejam $f, g \in \mathcal{O}_{S,x}$ as funções definidoras locais para C, C' , respectivamente, onde $\mathcal{O}_{X,x}$ é o anel local de X em x .

Definimos o número

$$i_x(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,x} / \langle f_x, g_x \rangle$$

como a multiplicidade de interseção de C e C' em x .

Temos que $i_x(C, C') = 1$ se, e só se, f e g geram $m_x \subset \mathcal{O}_{S,x}$, onde m_x é o ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$, i.e., se C e C' são regulares e se tocam em x transversalmente. Convecionaremos que $i_x(C, C') = 0$ quando as curvas não se tocam em x .

Denotando por z' a imagem de $z \in \mathcal{O}_{X,x}$ no anel de coordenadas da curva $\{f = 0\}$, \mathcal{O}_f , é imediato verificar que $i_x(C, C') = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_f / \langle g' \rangle$.

Suponhamos que X é conexa, então $H_c^4(X, \mathbb{Z}) \cong H_0(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, e de maneira canônica, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} H_c^2(X, \mathbb{Z}) \times H^2(X, \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_c^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \\ \xi \times \eta &\mapsto \xi \cdot \eta \end{aligned}$$

Se D é um divisor em X com suporte compacto, e E é um outro divisor, colocamos

$$D \cdot E = c_1(\mathcal{O}_X(D)) \cdot c_1(\mathcal{O}_X(E))$$

onde $c_1(\mathcal{O}_X(D)) \in H_c^2(X, \mathbb{Z})$ é a primeira classe de Chern de $\mathcal{O}_X(D)$.

Chamamos esse inteiro de número de interseção. Suas principais propriedades são:

1. $D \cdot (E + E') = D \cdot E + D \cdot E'$, onde D, E e E' são divisores em X (bilinear com relação a adição de divisores).
2. $D \cdot E = E \cdot D$ (simétrico).
3. Sejam C, C' curvas e C é compacta,

$$C \cdot C' = \deg \mathcal{O}_X(C')|_C,$$

ou seja, $\mathcal{O}_C(C')$ tem uma seção que se anula em $C \cdot C'$ pontos.

4. Se os divisores D e E com suporte compacto não tem componente em comum, i.e., se eles intersectam-se em um número finito de pontos, então

$$D \cdot E = \sum_{x \in D \cap E} i_x(D, E).$$

5. $C \cdot C = \deg \mathcal{O}_X(C)|_C = \deg N_C|_X = c_1(N_C)$, onde N_C é o fibrado normal de C em X .

Chamamos $C \cdot C$ de autointerseção de C .

5.1.2 Fórmulas de Brunella

Nesta subseção, lembraremos conceitos importantes na teoria de folheações como fibrados tangente e normal a uma folheação e conforme [5] calcularemos seus graus em superfícies de Riemann compactas obtendo fórmulas que se relacionam com as tangências da folheação e a superfície, sua autointerseção e a sua característica de Euler.

Seja X uma variedade algébrica complexa, conexa, compacta, suave de dimensão n . Definimos o fibrado canônico

$$\mathcal{K}_X = \bigwedge^n T^*X$$

como sendo um fibrado em linhas em X cujas seções são n -formas em X .

Uma folheação holomorfa \mathcal{F} de dimensão 1 em uma superfície complexa (suave) X é definida tomando uma cobertura aberta $\{U_j\}_{j \in I}$ de X e em cada U_j um campo de vetores holomorfo v_j com zeros isolados satisfazendo:

$$v_i = g_{ij}v_j \text{ em } U_i \cap U_j, \quad g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j).$$

A folheação \mathcal{F} é uma classe de equivalência de coleções $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$, onde a relação de equivalência é dada por: $\{U_j, v_j\}_{j \in I} \sim \{U'_j, v'_j\}_{j \in I'}$ se v_j e v'_i coincidem em $U_j \cap U'_i$ a menos de multiplicação por uma função holomorfa não-nula.

O conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} é o subconjunto discreto de X definido por

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_j = \text{zeros de } v_j, \forall j \in I.$$

As funções $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$ formam um cociclo multiplicativo e portanto define uma classe de cohomologia em $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, que é um fibrado em linhas em X . Podemos verificar que esse fibrado em linhas é intrinsicamente definido pela \mathcal{F} : se mudamos de $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$ a um equivalente $\{U'_j, v'_j\}_{j \in I'}$, então obtemos um cociclo $\{g'_{ij}\}$ cohomólogo a $\{g_{ij}\}$. É chamado fibrado cotangente de \mathcal{F} , e denotamos por $T_{\mathcal{F}}^*$. Seu dual $T_{\mathcal{F}}$, representado pelos cociclos inversos $\{g_{ij}^{-1}\}$ é chamado fibrado tangente de \mathcal{F} .

Todas essas construções podem ser feitas usando 1-formas no lugar de campos de vetores: uma folheação pode ser definida como uma coleção de 1-formas $\omega_j \in \Omega_X^1(U_j)$ com zeros isolados e tais que

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j \text{ em } U_i \cap U_j, \quad f_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j).$$

O cociclo $\{f_{ij}\}$ define um fibrado em linhas em X , chamado o fibrado normal de \mathcal{F} e denotaremos por $N_{\mathcal{F}}$. O dual $N_{\mathcal{F}}^*$ é chamado fibrado conormal de \mathcal{F} .

Esses fibrados em linhas estão relacionados um ao outro via o fibrado canônico \mathcal{K}_X de X :

$$\mathcal{K}_X = T_{\mathcal{F}}^* \otimes N_{\mathcal{F}}^*.$$

Daremos aqui algumas fórmulas envolvendo os graus dos fibrados $T_{\mathcal{F}}$ e $N_{\mathcal{F}}$ em curvas compactas com o objetivo de entendê-los geometricamente.

Seja \mathcal{F} uma folheação na superfície X , não necessariamente compacta, e seja $C \subset X$ uma curva compacta, possivelmente singular, onde cada componente irredutível de C não é \mathcal{F} -invariante. Seja $p \in C$ um ponto, definimos um índice $tang(\mathcal{F}, C, p)$, representando a ordem de tangência de \mathcal{F} a C em p , como segue: seja $\{f = 0\}$ uma equação local de C em p , seja v um campo de vetores local holomorfo com zeros isolados que gera \mathcal{F} ao redor de p , definimos

$$tang(\mathcal{F}, C, p) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{X,p} / \langle f, v(f) \rangle$$

onde $\mathcal{O}_{X,p}$ é o anel local de X em p , $v(f)$ é a derivada de Lie de f ao longo de v , e $\langle f, v(f) \rangle$ é o ideal gerado por f e $v(f)$ em $\mathcal{O}_{X,p}$. Observe que $v(f)$ não é identicamente

nula em C , pois C não é invariante pela \mathcal{F} , portanto, $\langle f, v(f) \rangle$ tem codimensão finita em $\mathcal{O}_{X,p}$ e $\text{tang}(\mathcal{F}, C, p) < \infty$. De fato, $\text{tang}(\mathcal{F}, C, p) = 0$ exceto em um número finito de pontos onde \mathcal{F} não é transversa a C em p (se \mathcal{F} é transversa a C em p , então $v(f)$ é uma unidade em $\mathcal{O}_{X,p}$).

Uma ferramenta computacional para o cálculo desse índice é dada pela parametrização de Puiseux, de fato, o $\text{tang}(\mathcal{F}, C, p)$ pode ser visto como a multiplicidade de interseção de f e $v(f)$ em p e portanto, se C é analítica e irredutível em p e $\pi : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (C, p)$ é uma parametrização de Puiseux de C ao redor de p , i.e., π é analítica e injetiva em alguma vizinhança da origem de \mathbb{C} , então

$$\text{tang}(\mathcal{F}, C, p) = i_p(f, v(f)) = \text{ord}_0 \pi^* v(f). \quad (5.1)$$

Portanto, definimos

$$\text{tang}(\mathcal{F}, C) = \sum_{p \in C} \text{tang}(\mathcal{F}, C, p).$$

Observação 5.1. Na demonstração do Teorema da Existência no Capítulo 2 vimos que sobre os pontos regulares da superfície, o índice de tangência da seção com a folheação (regular) é $n - 1$ onde n é a ordem de anulamento da seção no ponto e foi calculado como na fórmula 5.1. Sobre as cúspides, o índice de tangência é n quando a seção passa pela singularidade e possui ordem de anulamento n no ponto. Em particular, quando a seção é transversal à folheação, o índice de tangência é 0 para todo ponto.

Existe uma fórmula importante, brevemente citada na ideia da prova do Teorema 2.2, que relaciona os fibrados canônicos de uma variedade e de uma hipersuperfície contida nela.

Teorema 5.1. (*Fórmula de Adjunção*) ([2] p. 22) *Se Y é uma subvariedade complexa de codimensão 1 da variedade complexa X , então*

$$\mathcal{K}_Y = \mathcal{K}_X \otimes \mathcal{O}_X(Y)|_Y.$$

Definimos a característica de Euler aritmética $\chi(C)$ de C via a fórmula de adjunção:

$$\chi(C) = -\mathcal{K}_X \cdot C - C \cdot C.$$

Quando C é suave, esta coincide com a característica de Euler topológica, mas se C tem singularidades, então esta é menor ou igual à característica de Euler topológica de uma suavização de C . Notemos que $\chi(C)$ depende apenas da classe de cohomologia de C .

Proposição 5.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação numa superfície complexa X e seja $C \subset X$ uma curva complexa compacta onde cada componente não é invariante pela \mathcal{F} . Então*

$$N_{\mathcal{F}} \cdot C = \chi(C) + \text{tang}(\mathcal{F}, C)$$

$$T_{\mathcal{F}} \cdot C = C \cdot C - \text{tang}(\mathcal{F}, C).$$

Demonstração. Observemos que as duas fórmulas são equivalentes, pois $\chi(C) = -\mathcal{K}_X \cdot C - C \cdot C$ e $\mathcal{K}_X^* = T_{\mathcal{F}} \otimes N_{\mathcal{F}}$. Portanto, é suficiente provar a segunda. Seja $\{U_j\}$ um cobertura aberta de X , campo de vetores holomorfos v_j em U_j que geram \mathcal{F} , e funções holomorfas f_j em U_j definindo C . Nas interseções $U_i \cap U_j$ temos

$$v_i = g_{ij}v_j, \quad f_i = f_{ij}f_j$$

onde $\{g_{ij}\}$ é um cociclo representando $T_{\mathcal{F}}^*$ e $\{f_{ij}\}$ é um cociclo representando $\mathcal{O}_X(C)$. Portanto as funções $\{v_j(f_j)\}$ restritos a C dá uma seção de $[T_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)]|_C$, de fato, segue da regra de Leibniz que

$$v_i(f_i) = g_{ij}v_j(f_{ij}f_j) = g_{ij}f_{ij}v_j(f_j) + g_{ij}f_jv_j(f_{ij})$$

e $g_{ij}f_jv_j(f_{ij}) \equiv 0$ em C . Esta seção se anula nos pontos de C onde \mathcal{F} não é transversal a C , e a ordem de anulamento é igual a $\text{tang}(\mathcal{F}, C, \cdot)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \text{tang}(\mathcal{F}, C) &= \text{deg}[T_{\mathcal{F}}^* \otimes \mathcal{O}_X(C)]|_C \\ &= \text{deg}(T_{\mathcal{F}}^*|_C) + \text{deg}(\mathcal{O}_X(C)|_C) \\ &= T_{\mathcal{F}}^* \cdot C + C \cdot C \\ &= C \cdot C - T_{\mathcal{F}} \cdot C. \end{aligned}$$

■

Observações 5.1. 1. Fórmulas análogas podem ser obtidas considerando C uma curva invariante pela folheação \mathcal{F} , conforme [5], p. 25.

2. Poderíamos definir $\text{tang}(\mathcal{F}, C)$ como um divisor em C , e portanto a prova acima mostra que $T_{\mathcal{F}}|_C$ é isomorfo a $N_C \otimes \mathcal{O}_C(-\text{tang}(\mathcal{F}, C))$ e $N_{\mathcal{F}}|_C$ é isomorfo a $TC \otimes \mathcal{O}_C(\text{tang}(\mathcal{F}, C))$.

5.1.3 Campos vetoriais em superfícies reais

Seja S uma superfície real (suave), um campo vetorial v tangente a S é uma seção suave do fibrado tangente TS , i.e., para cada ponto $p \in S$ associamos um elemento $v(p) \in T_pS$.

Um ponto p em S é zero (singularidade) de um campo vetorial v se $v(p) = 0$ e é não-degenerado em p se $\det(dv)_p \neq 0$, ou seja, dX_p é um isomorfismo. Temos que os zeros não-degenerados de um campo de vetores são isolados.

O índice de um zero isolado p de um campo é definido como o número inteiro $\text{ind}_p(v) = \text{deg}(f)$ onde $f : D_\varepsilon(p) \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{S}^1$ é dada por $f(z) = \frac{v(z)}{|v(z)|}$, onde $D_\varepsilon(p)$ é o disco centrado em p com raio ε suficientemente pequeno para que não contenha nenhuma outra singularidade de v .

Em um zero não-degenerado p de um campo de vetores v , $\text{ind}_p(v) = 1$ se o isomorfismo dv_p preserva a orientação e $\text{ind}_p(v) = -1$ se dv_p inverte a orientação. Por exemplo, se p é um poço temos que a forma normal do campo ao redor dessa singularidade é $-x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ e o índice $\text{ind}_p(v) = 1$. Se p é uma fonte, então a forma normal do campo ao redor dessa

singularidade é $x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$ e o índice é 1. Se p é uma sela, segue que a forma normal do campo ao redor dessa singularidade é dada por $x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$ e o índice é -1 .

Pensando no campo de vetores como a imagem de S pela seção do fibrado tangente TS , podemos notar que os zeros de um campo v correspondem aos pontos de interseção de v com a seção nula $\mathbf{0}$ do fibrado tangente TS e p é um zero não-degenerado de v se, e só se, $v \bar{\cap} \mathbf{0}$ em $(p, 0)$.

Se p é um zero não-degenerado de v , é possível mostrar que $ind_p(v)$ é o número de orientação do ponto $(p, 0)$ em $\mathbf{0} \cap v$.

Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em S . Um ponto $p \in S$ é um ponto crítico de f se $df_p = 0$. Se introduzirmos uma métrica Riemanniana em S e definirmos um campo de vetores $grad f$ por

$$\langle grad f(p), v \rangle = df_p(v), \quad \forall v \in T_p S$$

obtemos que p é um ponto crítico de f se, e só se, para toda métrica Riemanniana em S , p é uma singularidade de $grad f$.

Um ponto crítico p de $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é não-degenerado se para alguma parametrização ao redor de p a matriz Hessiana de f nessas coordenadas é não-nula. Se o determinante da matriz Hessiana é positivo, o ponto crítico pode ser um ponto de máximo ou mínimo de f , e se for negativo é uma sela.

Dizemos que uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é de Morse se todos seus pontos críticos são não-degenerados.

Teorema 5.2. (*Poincaré-Hopf*) *A soma dos índices nos zeros de um campo de vetores em uma superfície real (suave) S com zeros isolados é igual a $\chi(S)$.*

5.1.4 Fibrados vetoriais holomorfos sobre superfícies compactas

Vimos na proposição 2.2 que todo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado $\pi : P \rightarrow S$ sobre uma superfície de Riemann S compacta pode ser obtido através de uma projetivização de um fibrado vetorial complexo $T : V \rightarrow S$ de posto 2.

Definição 5.1. O fibrado determinante de um fibrado vetorial V de posto r (ou um feixe localmente livre de posto r), é definido como o r -ésimo produto *wedge* de um fibrado (ou feixe).

Se $\{g_{\alpha\beta}\}$ é o cociclo que define o fibrado V , então o fibrado determinante $det(V)$ é um fibrado em linhas definido pelo cociclo $\{j_{\alpha\beta}\}$ onde $j_{\alpha\beta}(x) = \wedge^r g_{\alpha\beta}(x) = det g_{\alpha\beta}(x) \in GL(\wedge^r \mathbb{C}^r) = GL_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$.

O grau de um fibrado vetorial de posto r é definido como o grau do fibrado determinante.

Seja $\sigma : S \rightarrow \mathbb{P}(V)$ uma seção holomorfa de $\mathbb{P}(V)$. Definimos um fibrado em linhas holomorfo $L \rightarrow S$ como o *pull-back* $\sigma^*(p)$ do fibrado $p : V \rightarrow \mathbb{P}(V) = P$. O fibrado em linhas L está canonicamente mergulhado como um subfibrado de $T : V \rightarrow S$ com a imagem $p^{-1}(\sigma(S))$.

Voltando ao lema que foi usado na seção 2.2 para mostrar a existência de seções de um $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado não-invariantes pela folheação:

Lema 5.1. (Lemma 11.1.1 de [12]) a) $\sigma^2 = \deg(\det(V)) - 2\deg L$, onde $\det(V)$ denota o fibrado determinante de V , isto é, um fibrado em linhas holomorfo sobre a superfície S e σ^2 é a autointerseção do ciclo $\sigma(S)$ em P .

b) $\sigma^2 \equiv w_2(P) \pmod{2}$, onde $w_2(P)$ representa a 2^{a} classe de Stiefel-Whitney do fibrado $\pi : P \rightarrow S$.

Existem exatamente dois \mathbb{S}^2 -fibrados orientados topologicamente distintos sobre S e eles são distinguidos pela 2^{a} classe de Stiefel-Whitney do fibrado sobre S .

Segue imediatamente do lema acima que a paridade da autointerseção σ^2 depende somente do fibrado: σ^2 é par se o fibrado é difeomorfo ao fibrado trivial e é ímpar, caso contrário.

Corolário 5.1. Sejam σ e σ' duas seções holomorfas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrados holomorfos sobre uma superfície de Riemann compacta que possuem a mesma 2^{a} classe de Stiefel-Whitney. Temos que

$$\sigma^2 \equiv \sigma'^2 \pmod{2}.$$

Em particular, seções holomorfas de um mesmo $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado possuem autointerseção com mesma paridade.

Seja $\pi : P \rightarrow S$ um $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado munido de uma folheação de Riccati, após um *flip* de uma fibra invariante obtemos um outro $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado $\pi' : P' \rightarrow S$ também munido de uma folheação de Riccati birracionalmente equivalente a π . A seguinte proposição mostra que o *flip* muda a classe topológica do fibrado.

Proposição 5.2. As segundas classes de Stiefel-Whitney $w_2(P)$ e $w_2(P')$ possuem paridades diferentes.

Demonstração. Dada uma seção holomorfa σ do fibrado $\pi : P \rightarrow S$, fazendo um *flip* em uma fibra invariante, quando o *blow-up* é realizado em um ponto fora da seção, após o *flip* temos que a nova seção $\tilde{\sigma}$ de $\pi' : P' \rightarrow S$ tem autointerseção $\tilde{\sigma}^2 = \sigma^2 + 1$, e quando o *blow-up* é realizado em um ponto da seção, após o *flip* temos que a nova seção tem autointerseção $\sigma^2 - 1$. Logo, o resultado segue do Lema 5.1 b). ■

Observação 5.2. Os *blowing ups* usados para fazer os *flips* das fibras neste trabalho são realizados nos pontos singulares da folheação e apenas quando a seção passa por essas singularidades.

5.2 Estruturas projetivas singulares do tipo fuchsiana

Dada $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ uma superfície de tipo finito onde S é uma superfície compacta de gênero g . Seja $\pi : P \rightarrow S$ um $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado sobre S associado à representação de monodromia $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana em S , vimos na seção 2.1 que $P = \overline{S^* \times_{\rho} \mathbb{C}\mathbb{P}^1}$. Esse fibrado vem munido de uma folheação de Riccati \mathcal{F}_{ρ} com mesma monodromia. A aplicação *developing* da

estrutura projetiva definida em S define uma seção holomorfa não-trivial σ do fibrado $\pi : P \rightarrow S$ e não-invariante pela folheação.

Nesta seção, com o objetivo de obter uma versão da Proposição 11.2.2 de [12] para estruturas projetivas de tipo fuchsiana, calcularemos a autointerseção de $\sigma(S)$ em P e depois faremos algumas interpretações na estrutura projetiva sobre S .

Teorema 5.3. *Sob essas condições, a autointerseção de $\sigma(S)$ em P é*

$$\sigma(S) \cdot \sigma(S) = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) + \chi(S) - k_0,$$

onde k_0 representa o número de fibras invariantes à folheação \mathcal{F}_ρ .

Demonstração. Vamos supor que a seção σ não passa pelas singularidades da folheação \mathcal{F}_ρ , ou seja, a imagem da seção σ é transversal a \mathcal{F}_ρ em cada ponto de interseção com as fibras invariantes em P .

Os pontos de ramificação da estrutura projetiva geram pontos de não-transversalidade da seção com a folheação \mathcal{F} antes da compactificação (essa é regular) e nas cúspides de monodromia trivial com compactificação escolhida $\frac{\partial}{\partial z}$ onde a seção é tangente à folheação \mathcal{F}_ρ . Nesse último caso, observemos que a suspensão da representação de estende holomorficamente a essas cúspides e a fibra sobre elas não é invariante pela \mathcal{F}_ρ . Vamos denotar por k_0 o número de fibras invariantes a \mathcal{F}_ρ . Suponhamos que existam inicialmente d pontos de ramificação.

Conforme calculamos na seção 2.4, ao redor de cada ponto crítico a carta projetiva coordenada se escreve, a menos de mudança holomorfa de variáveis, como z^{n_i} , $n_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \geq 2$. Notemos que o índice de tangência com a folheação é $n_i - 1$ em cada ponto de ramificação. Usando a inversa da cirurgia do movimento de pontos de ramificação vista no Capítulo 4 podemos decompor todos os pontos de ramificação de ordem superior em pontos de ramificação simples, de fato, se o índice de tangência da folheação com a seção em cada ponto de ramificação é $n_i - 1$, então obtemos $n_i - 1$ pontos de ramificação simples para cada um deles.

Logo,

$$\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) = \sum_{i=1}^d n_i - 1 = l.$$

Observemos que $\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S))$ não muda depois da separação dos pontos de ramificação em l pontos de ramificação simples, pois o índice é 1 em cada um deles e a soma total é mantida. A autointerseção $\sigma(S)^2$ também é preservada, pois a inversa da cirurgia produz uma nova *dev* associada a nova estrutura projetiva cujo gráfico é uma seção holomorfa deformada continuamente da seção inicial do mesmo \mathbb{CP}^1 -fibrado, o que não muda a classe de homologia da seção. Denotaremos os l pontos de ramificação simples da estrutura por $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$.

Existe um campo de vetores (real) suave v em S que tem $2g + 2$ zeros não-degenerados, onde g é o gênero de S : tem 1 poço, 1 fonte e $2g$ selas. De fato, para construir esse campo podemos tomar, por exemplo, uma função de Morse $\mu : S \rightarrow \mathbb{R}$ que tem um mínimo, um máximo e $2g$ pontos de sela e introduzindo uma métrica Riemanniana em S , colocamos

$v = \text{grad}(\mu)$. Observemos que a soma dos índices deverão satisfazer o Teorema de Poincaré-Hopf

$$\sum_{v(p)=0} \text{ind}_p(v) = M - s + m = \chi(S) = 2 - 2g,$$

onde M , m e s são o número de pontos de máximo, mínimo e sela da função μ , respectivamente.

Denotando os zeros de v por $\zeta_1, \dots, \zeta_{2g+2}$ onde os dois últimos pontos têm índice 1. Podemos escolher v tal que

$$\{\zeta_1, \dots, \zeta_{2g+2}\} \cap \{\xi_1, \dots, \xi_l, p_1, \dots, p_k\} = \emptyset.$$

Portanto, o campo vetorial v é uma seção do fibrado tangente TS que é transversal à seção nula. De fato, as imagens das seções em TS se intersectam nos zeros do campo v como dv_{ζ_i} é não-singular para todo zero ζ_i de v , a afirmação segue. Agora, usando a seção $\sigma : S \rightarrow P$, podemos levantar o campo de vetores v ao campo de vetores $Y = \sigma_*(v) = v \circ \sigma^{-1}|_{\sigma(S)}$ tangente a $\sigma(S) \subset P$. As direções verticais em P definem o fibrado normal a $\sigma(S)$. Como $\sigma(S)$ é sempre transversal a π , temos que o fibrado normal de $\sigma(S)$ é canonicamente isomorfo ao fibrado tangente do fibrado π restrito a $\sigma(S)$. A conexão plana holomorfa em $P \setminus \pi^{-1}(\{p_1, \dots, p_k\})$ define a projeção

$$\nabla : T\sigma(S^*) \rightarrow T\pi|_{\sigma(S^*)} \simeq N_{\sigma(S^*)}$$

do fibrado tangente de $\sigma(S^*)$ ao fibrado tangente da fibração π , definido como a projeção ao longo do fibrado tangente de \mathcal{F} .

Afirmamos que essa projeção se estende meromorficamente de $T\sigma(S)$ a $T\pi|_{\sigma(S)}$. De fato, ao redor de uma cúspide com monodromia parabólica supondo que foi escolhido o modelo local $\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial w}$ para compactificar o fibrado, obtemos que nas coordenadas (z, w) , a projeção tem a seguinte forma

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial w}.$$

Portanto, a projeção ∇ tem um polo simples na cúspide de monodromia parabólica. O mesmo acontece para cúspides de monodromia não-parabólica, a projeção de $\frac{\partial}{\partial z}$ na direção de $\frac{\partial}{\partial z} + \alpha_i \frac{w}{z} \frac{\partial}{\partial w}$, $\alpha_i \neq 0$, é igual a $\alpha_i \frac{w_0}{z} \frac{\partial}{\partial w}$ e portanto ∇ tem um polo simples na cúspide.

No caso de cúspides com monodromia trivial e a compactificação escolhida é $\frac{\partial}{\partial z}$, ou seja, $\alpha_i = 0$, temos que a folheção (regular) induzida pela suspensão da representação sobre S^* se estende holomorficamente a essas cúspides, e portanto tem o comportamento de um ponto regular ou ponto de ramificação da estrutura projetiva.

Independentemente da compactificação usada, retirando o caso do modelo local escolhido ser o holomorfo $\frac{\partial}{\partial z}$, essa extensão possui polo simples nas cúspides.

De fato, no caso parabólico, tomando uma carta projetiva dada por um ramo de $\log z + \frac{1}{z^n}$ definida em uma vizinhança D_i de uma cúspide p_i , que podemos supor \mathbb{D} . O fibrado $\pi : P \rightarrow S$ restrito a $\pi^{-1}(D_i)$ é dado pelo quociente de $T \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ pela ação $A(x, w) = (x + 2\pi i, w + 2\pi i)$, onde T representa o recobrimento universal de \mathbb{D}^* . O gráfico

de $x + e^{-nx}$ define uma seção σ nesse fibrado e o biholomorfismo local $f : T \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ dado por $f(x, w) = (z, v) = (e^x, e^{nx}(x - w))$. Como $f \circ A = f$, segue que f é invariante pela transformação A preserva a fibração vertical, leva a folheação horizontal $dw = 0$ em $(nv + z^n)dz - zdv = 0$, $(z, v) \in \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$, e a seção σ será dada por $v = -1$ em coordenadas (z, v) .

Pensando no espaço tangente $\langle \frac{\partial}{\partial z} \rangle$ restrito a $f(\sigma(\mathbb{D}^*))$. Segue que a projeção é

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = \left(-\frac{n}{z} + z^{n-1} \right) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Portanto, ∇ possui um polo simples na cúspide parabólica p_i .

No caso não-parabólico, tomando uma carta projetiva dada por um ramo de $z^{\alpha+n}$ definida em uma vizinhança D_i de uma cúspide p_i , que podemos supor \mathbb{D} . O fibrado suspensão $\pi|_{\pi^{-1}(D_i)}$ é dado pelo quociente de $T \times \mathbb{CP}^1$ pela ação $A(x, w) = (x + 2\pi i, e^{2\pi i \alpha} w)$. O gráfico de $e^{(\alpha+n)x}$ define uma seção σ nesse fibrado e o biholomorfismo local $f : T \times \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{D}^* \times \mathbb{CP}^1$ dado por $f(x, w) = (z, v) = \left(e^x, \frac{w}{e^{(\alpha+n)x}} \right)$. Observemos que f é invariante por A , preserva a fibração vertical, leva a folheação horizontal em $zdv - (\alpha + n)v dz = 0$ e a seção σ é levada na seção $v = 1$. De forma análoga, a projeção é dada por

$$\nabla \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = -\frac{\alpha + n}{z} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Logo, ∇ se estende meromorficamente de $T\sigma(S)$ a $T\pi|_{\sigma(S)} \simeq N_{\sigma(S)}$ com polos simples nas cúspides que possuem fibra invariante a \mathcal{F}_ρ , digamos $\{p_1, \dots, p_{k_0}\}$.

Tomando o campo de vetores $Q = \nabla(Y)$ podemos ver que Q define uma seção do fibrado normal $N_{\sigma(S)}$. Como a seção σ é transversal à conexão plana em $P \setminus \pi^{-1}(\{p_1, \dots, p_{k_0}\})$ exceto no conjunto $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$. Portanto o conjunto de zeros de Q é

$$\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_l, \zeta_1, \dots, \zeta_{2g+2}\}$$

e o conjunto de polos é $\sigma\{p_1, \dots, p_{k_0}\}$.

A seção Q é transversal a seção nula $\mathbf{0}$ do fibrado normal $N_{\sigma(S)}$ e afirmamos que a interseção $Q(\sigma(S)) \cap \mathbf{0}$ é positiva nos pontos $\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_l, \zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+2}\}$ e negativa nos pontos $\sigma\{\zeta_1, \dots, \zeta_{2g}, p_1, \dots, p_{k_0}\}$.

Vamos analisar cada caso separadamente:

1. $Q(\sigma(S)) \cap \mathbf{0}$ é positiva em $\sigma\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$.

Nesses pontos a seção σ é tangente à folheação com índice de tangência 1, como a folheação em P fora da vizinhança das fibras invariantes vem de uma suspensão de uma representação de monodromia ou de uma compactificação com o modelo $\frac{\partial}{\partial z}$, podemos supor a folheação horizontal.

Tomando uma parametrização adequada na vizinhança de um dos $\sigma(\xi_i) = (0, 0)$ podemos supor que a folheação é $\frac{\partial}{\partial z}$, a fibração é $\frac{\partial}{\partial w}$ e a seção é $w + z^2 = 0$, tomando o campo em $\sigma(S)$ na vizinhança de $(0, 0)$ como $\frac{\partial}{\partial z} - 2z \frac{\partial}{\partial w}$. Temos que a projeção de $\frac{\partial}{\partial z} - 2z \frac{\partial}{\partial w}$ ao longo do fibrado tangente à folheação $\frac{\partial}{\partial z}$ é $-2z \frac{\partial}{\partial w}$ e portanto tem um zero de ordem 1 em $(0, 0)$.

2. $Q(\sigma(S)) \cap \mathbf{0}$ é positiva em $\sigma\{\zeta_{2g+1}, \zeta_{2g+2}\}$ e negativa em $\sigma\{\zeta_1, \dots, \zeta_{2g}\}$.

O campo v foi construído de tal modo que os índices em seus zeros são não-nulos. Mostraremos aqui que se ζ_i é um zero do campo de vetores v em S , então $\sigma(\zeta_i)$ é um zero do campo Y em $\sigma(S)$ e que os índices de Y nos seus zeros mantêm os sinais dos zeros respectivos de v .

Seja U uma vizinhança aberta de ζ_i em S , então $v|_U$ é

- (i) $z \frac{\partial}{\partial z} + \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$, a singularidade é uma fonte;
- (ii) $\bar{z} \frac{\partial}{\partial z} + z \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$, a singularidade é uma sela;
- (iii) $-z \frac{\partial}{\partial z} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = -x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y}$, a singularidade é um poço.

onde $z = x + iy$ é a coordenada complexa de S , $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ são os geradores do espaço tangente complexificado $T_z^{\mathbb{C}} S$.

Escrevendo a seção $\sigma : S \rightarrow P$ como $\sigma(z) = (z, \sigma_1(z))$, vamos tomar a imagem de um zero de v pela σ , seja $(\zeta_i, w_i) = (\zeta_i, \sigma_1(\zeta_i)) \in \sigma(S)$. Estamos supondo que os zeros de v não são cúspides de S nem pontos de ramificação da estrutura projetiva.

Se $v|_U = a(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} + b(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = c(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + d(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$, onde a, b são funções complexas definidas na vizinhança U de ζ_i e c, d são funções reais de classe \mathcal{C}^∞ , então colocando coordenada $w = k + il$ em \mathbb{CP}^1 temos que $\forall (z, w)$ numa vizinhança aberta de (ζ_i, w_i) em $\sigma(S)$

$$\begin{aligned} Y(z, w) &= \sigma_* v(z, \sigma_1(z)) \\ &= c \frac{\partial}{\partial x} + d \frac{\partial}{\partial y} + \left(c \frac{\partial}{\partial x} (\Re \sigma_1) + d \frac{\partial}{\partial y} (\Re \sigma_1) \right) \frac{\partial}{\partial k} + \left(c \frac{\partial}{\partial x} (\Im \sigma_1) + d \frac{\partial}{\partial y} (\Im \sigma_1) \right) \frac{\partial}{\partial l} \\ &= a(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial z} + b(z, \bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \sigma'_1(z) (c + id) \frac{\partial}{\partial w}. \end{aligned}$$

onde $\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial k} - i \frac{\partial}{\partial l} \right)$ e $\frac{\partial}{\partial \bar{w}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial k} + i \frac{\partial}{\partial l} \right)$ geram o espaço tangente complexificado $T_w^{\mathbb{C}} \mathbb{CP}^1$.

Como $Y(\zeta_i, w_i) = d\sigma_{\zeta_i} \cdot v(\zeta_i)$, segue que Y se anula nos zeros de v . Observemos que $Q = \nabla(Y) = \sigma'_1(z) (c + id) \frac{\partial}{\partial w}$ e como $\sigma'_1(z)$ é um isomorfismo fora dos pontos críticos da estrutura projetiva, segue que o índice se mantém.

3. $Q(\sigma(S)) \cap \mathbf{0}$ é negativa em $\sigma\{p_1, \dots, p_{k_0}\}$.

Como já foi observado acima, em cada um desses pontos Q possui um polo simples, logo seu número de interseção é negativo.

Logo, concluímos que a autointerseção de $\sigma(S)$ é dada por

$$\sigma(S)^2 = \deg N_{\sigma(S)}|_P = \langle Q(\sigma(S)), \mathbf{0}(\sigma(S)) \rangle = l + 2 - k_0 - 2g = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) + \chi(S) - k_0.$$

Agora, supondo que a seção σ passa pelas singularidades de \mathcal{F}_ρ , ou seja, ao redor de cada singularidade sobre a fibra $\pi^{-1}(p_i)$, $i = 1, \dots, k_0$, a seção se escreve, a menos de

mudança de coordenadas, como $\sigma(z) = (z, z^{n_i}\phi(z))$, $n_i \in \mathbb{Z}$, $\phi(0) \neq 0$ e nem todos os n_i são iguais a 0.

Denotemos por β a seção após o *flip* na fibra $\pi^{-1}(p_i)$, conforme foi feito na subseção 2.4.1, temos que, em coordenadas, $\beta(z) = (z, z^{n_i-1}\phi(z))$ e é necessária a composição de n_i *flips* para tornar a seção transversal à folheação e que não passe pelas singularidades da folheação restrita a fibra invariante $\pi^{-1}(p_i)$. Nesse primeiro instante, estamos pensando no caso em que a composição dos *flips* mantém o número de fibras invariantes, logo mais estudaremos o caso especial onde esse número muda.

Como após um *flip* $\beta^2 = \sigma^2 - 1$, reduzindo ao caso onde β não passa pelas singularidades da folheação, obtemos:

$$\beta^2 = \sigma^2 - \sum_{i=1}^{k_0} n_i.$$

Segue da primeira parte que $\beta^2 = \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S)) + \chi(S) - k_0$, onde $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ denota a folheação \mathcal{F}_ρ após a composição de $\sum_{i=1}^{k_0} n_i$ *flips*. Como β não passa pelas singularidades do folheação, segue que β é transversal às fibras invariantes e portanto $\text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S)) = \text{tang}(\mathcal{F}, \beta(S))$, onde \mathcal{F} é a folheação regular induzida pela suspensão de ρ estendida holomorficamente às cúspides $\{p_{k_0+1}, \dots, p_k\}$ e como $\text{tang}(\cdot, \cdot)$ independe da escolha de geradores segue que $\text{tang}(\mathcal{F}, \beta(S)) = \text{tang}(\mathcal{F}, \sigma(S))$.

Observemos que nas vizinhanças das fibras sobre as cúspides de monodromia não-parabólica a folheação é definida pelo campo $z\frac{\partial}{\partial z} + (\alpha_i + n)w\frac{\partial}{\partial w}$ e seja $w - z^{n_i}$ a equação local definidora da seção $\sigma(S)$, portanto usando a fórmula 5.1 temos

$$\begin{aligned} \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i) &= i_{p_i}(w - z^{n_i}, z(-n_i z^{n_i-1}) + (\alpha_i + n)w) \\ &= \text{ord}_0(-n_i z^{n_i} + (\alpha_i + n)w)(t, t^{n_i}) \\ &= \text{ord}_0((\alpha_i + n - n_i)t^{n_i}) \\ &= n_i. \end{aligned}$$

No caso de cúspide com monodromia parabólica, a folheação é definida pelo campo $z\frac{\partial}{\partial z} + (z^n + nw)\frac{\partial}{\partial w}$ e a seção se escreve como $\sigma(z) = (z, z^{-n_i}\phi(z))$, $\phi(0) \neq 0$, mudando as coordenadas $w \mapsto s = \frac{1}{w}$ temos que a equação local definidora de $\sigma(S)$ torna-se $s - z^{n_i}$ e o campo vetorial que define a folheação torna-se $z\frac{\partial}{\partial z} - (s^2 z^n + ns)\frac{\partial}{\partial s}$ e de maneira análoga ao caso não-parabólico, temos que

$$\begin{aligned} \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i) &= i_{p_i}(s - z^{n_i}, z(-n_i z^{n_i-1}) - (s^2 z^n + ns)) \\ &= \text{ord}_0(-n_i z^{n_i} - s^2 z^n - ns)(t, t^{n_i}) \\ &= \text{ord}_0(-(n + n_i)t^{n_i} - t^{2n_i+n}) \\ &= n_i. \end{aligned}$$

Logo, $\sigma^2 = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) + \chi(S) - k_0$.

O caso especial onde após a composição dos *flips* o número de fibras invariantes diminui é quando em pelo menos uma cúspide com monodromia trivial cujo modelo escolhido para compactificar foi $z\frac{\partial}{\partial z} + nw\frac{\partial}{\partial w}$ e após a composição de *flips* o novo modelo é $\frac{\partial}{\partial z}$. Nesse caso, $n \leq n_i$ e serão necessários n *flips* para que a nova seção $\beta(S)$, cuja

equação local definidora é dada por $w - z^{n_i-n}$, não passe mais pela singularidade, e a nova folheação $\tilde{\mathcal{F}}_\rho$ é regular em p_i , para algum $i \in \{1, \dots, k_0\}$ e portanto passa a ter $k_0 - 1$ fibras invariantes. Temos que

$$\begin{aligned} \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S), p_i) &= i_{p_i}(w - z^{n_i-n}, (n - n_i)z^{n_i-n-1}) \\ &= \text{ord}_0((n - n_i)z^{n_i-n-1})(t, t^{n_i-n}) \\ &= \text{ord}_0((n - n_i)t^{n_i-n-1}) \\ &= n_i - n - 1. \end{aligned}$$

Já havíamos observado acima que

$$\text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S)) - \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S), p_i) = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) - \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i),$$

portanto,

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S)) + \chi(S) - (k_0 - 1) \\ &= \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S)) - \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S), p_i) + \text{tang}(\tilde{\mathcal{F}}_\rho, \beta(S), p_i) + \chi(S) - k_0 + 1 \\ &= \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) - \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i) + n_i - n - 1 + \chi(S) - k_0 + 1 \\ &= \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) - \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i) + \chi(S) + n_i - n - k_0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \beta^2 + n \\ &= \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) - \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S), p_i) + \chi(S) + n_i - n - k_0 + n \\ &= \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) + \chi(S) - k_0 \end{aligned}$$

e o teorema segue. ■

Observações 5.2. 1. Se o ponto crítico da estrutura projetiva for de ordem n , na vizinhança desse ponto a seção é localmente $w + z^n = 0$ e um campo de vetores definido nela é $\frac{\partial}{\partial z} - nz^{n-1}\frac{\partial}{\partial w}$ onde a projeção ao longo do fibrado tangente da folheação horizontal é $\nabla(\frac{\partial}{\partial z} - nz^{n-1}\frac{\partial}{\partial w}) = -nz^{n-1}\frac{\partial}{\partial w}$, logo vamos obter um zero de ordem $n - 1$ no ponto crítico.

2. Em cúspides com monodromia não-parabólica através da inversa do movimento de pontos de ramificação descrito na subseção 4.3.1, podemos separar uma cúspide $z^{\alpha+n}$, onde $0 < \Re\alpha < 1$, $n \in \mathbb{N}$, em uma cúspide z^α e n pontos de ramificação simples. Conforme foi calculado na seção 2.4, a cúspide $z^{\alpha+n}$ surge da seção do fibrado que passa pela singularidade da folheação com índice de tangência n , e portanto essa decomposição reduz ao caso da seção não passando pelas singularidades e o Teorema 5.3 seguirá do mesmo modo.

Suponha que o \mathbb{CP}^1 -fibrado $\pi : P \rightarrow S$ é a projetivização de um fibrado vetorial holomorfo $T : V \rightarrow S$ de posto 2.

Segue desse Teorema e do Lema 5.1 que:

Corolário 5.2. *Suponha que $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ é uma representação de monodromia de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana σ em S . Denotando por $L \rightarrow S$ o subfibrado em linhas de V associado a σ , temos que*

$$\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) = \text{deg}(\det(V)) - 2\text{deg}(L) - \chi(S) + k_0.$$

Corolário 5.3. *Dadas duas seções σ e σ' holomorfas não-triviais do fibrado compactificado sobre S associado a uma representação de monodromia $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$. Então,*

$$\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) \equiv \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma'(S)) \pmod{2},$$

onde \mathcal{F}_ρ é a folheação de Riccati da compactificação.

Demonstração. Usando o corolário 5.2 para as seções σ e σ' temos que $\text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma(S)) - \text{tang}(\mathcal{F}_\rho, \sigma'(S)) = 2(\text{deg}(L) - \text{deg}(L'))$, e portanto o resultado segue. ■

Usando a fórmula de Brunella (Proposição 5.1), obtemos:

Corolário 5.4. *Dadas \mathcal{F} uma folheação de Riccati e σ uma seção do fibrado não-invariante pela \mathcal{F} , temos que*

$$\text{tang}(\mathcal{F}, \sigma) = \sigma^2 + 2g - 2 + k_0,$$

onde g é o gênero da superfície de Riemann de base e k_0 é o número de folhas verticais de \mathcal{F} .

Sabemos que em uma estrutura projetiva ramificada σ sobre uma superfície S , as singularidades são cônicas, i.e., na vizinhança de um ponto p com ordem de ramificação $n_p \geq 2$ tem ângulo $2\pi n_p$. Definimos o divisor de ramificação D de σ por

$$D = \sum_{p \in S} (n_p - 1)p.$$

Seu grau $\text{deg } D = \sum_{p \in S} (n_p - 1)$ é chamado o grau de ramificação de σ .

Em [12], Gallo-Kapovich-Marden mostraram para o caso de superfície fechada S e representação de monodromia $\rho : \pi_1(S) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ associada a uma estrutura projetiva complexa sobre S que $\sigma^2 = \text{deg } D + \chi(S)$, onde σ é uma seção holomorfa da suspensão da representação ρ definida pela dev e $\text{deg } D$ é o grau de ramificação da estrutura projetiva. Definindo $d(\rho) = \min \text{deg } D$, foi mostrado que $d(\rho) = 0$ para todas as representações não-elementares ρ e que se levantam a $SL_2(\mathbb{C})$ e $d(\rho) = 1$ para todas as representações não-elementares ρ que não se levantam. Eles conjecturaram como tornar precisa e otimizada essa conexão entre o grau de tangências e a monodromia para estrutura projetivas singulares.

Essa função d mede o excesso das tangências, e em nosso contexto, dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ a cada estrutura projetiva singular de tipo fuchsiana σ com essa monodromia, podemos associar a soma de excessos de ângulos nos pontos singulares da estrutura projetiva σ , de fato, conforme definido na seção 4.4 seguirá da demonstração do Teorema de Existência que ao redor de cada ponto singular p da estrutura projetiva do tipo fuchsiana as cartas projetivas são definidas, a menos de mudança conforme, por:

- Singularidades com monodromia trivial: z^{n_p+1} ;
- Singularidades com monodromia não-parabólica: $z^{\alpha+n_p}$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $0 \leq \Re\alpha < 1$;
- Singularidades com monodromia parabólica: $\log z$ ou $\log z + \frac{1}{z^{n_p+1}}$

e definimos como $n_p \in \mathbb{Z}$ o excesso de ângulo em cada ponto singular e a soma $e(\sigma) = \sum_{p \in S} n_p$ de excessos de ângulos da estrutura projetiva σ . Observemos que essa definição generaliza a definição de grau de ramificação para estruturas projetivas ramificadas.

Definimos $d(\rho) = \min\{e(\sigma) : \sigma \text{ é estrutura projetiva do tipo fuchsiana com monodromia } \rho\}$ e novamente essa definição generaliza o $d(\rho)$ definido em [12] para o caso onde as monodromias locais são todas triviais.

A soma de excessos de ângulos pode ser vista também no contexto de grau de tangências de uma folheação de Riccati com seções de fibrados provenientes da compactificação de uma suspensão de uma representação ρ . Fixando uma estrutura complexa em S , segue da prova do Teorema de Existência que esses n_p são as ordens de tangências da folheação com a seção nos pontos de tangência que:

$$e(\sigma) = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho^{\min}, \sigma(S)),$$

onde \mathcal{F}_ρ^{\min} é a compactificação que os modelos locais escolhidos para compactificar nas cúspides são dados por:

- $\alpha wdz - zdw = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}^*$ e $0 \leq \Re\alpha < 1$, nas cúspides de monodromia não-parabólica;
- $zdw - dz = 0$ nas cúspides de monodromia parabólica;
- $dw = 0$ nas cúspides de monodromia trivial.

Nessa compactificação, $e(\sigma) = \text{tang}(\mathcal{F}_\rho^{\min}, \sigma) = 0$ se, e só se, a seção σ é transversal a \mathcal{F}_ρ^{\min} . Por essa razão, denominaremos-a de compactificação mínima.

A seguinte proposição vai detectar quando uma representação não vai poder realizar uma estrutura projetiva sem excessos de ângulos:

Proposição 5.3. *Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$, uma estrutura projetiva da monodromia ρ vai ter soma de excessos de ângulos ímpar se, e só se, na compactificação mínima:*

1. ρ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$ e o número de cúspides com monodromia local não-trivial for ímpar; ou
2. ρ não se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$ e o número de cúspides com monodromia local não-trivial for par.

Para provar essa proposição serão necessários alguns lemas prévios:

Lema 5.2. *Suponha que $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ é uma representação de monodromia de uma estrutura projetiva singular do tipo fuchsiana σ em S , temos que:*

$$w_2(P) + k_0 \equiv e(\sigma) \pmod{2}$$

onde $w_2(P)$ é a 2^ª classe de Stiefel-Whitney da compactificação mínima \mathcal{F}_ρ^{min} e k_0 representa o número de pontos com monodromia local não-trivial.

Demonstração. Segue imediatamente da fórmula obtida no Teorema 5.3 e do Lema 5.1 item b). ■

Seguirá desse lema que a soma de excessos de ângulos $e(\sigma)$ tem a mesma paridade que $w_2(P) + k_0$. Como a compactificação mínima só depende da monodromia, a sua 2^ª classe de Stiefel-Whitney também e k_0 representa o número de cúspides com monodromia local não-trivial, concluímos que a paridade da soma dos excessos dos ângulos só depende da monodromia.

Se uma representação ρ é monodromia de uma estrutura projetiva sem excessos de ângulos, temos que a 2^ª classe de Stiefel-Whitney da compactificação mínima tem a mesma paridade do número de fibras invariantes pela compactificação.

Dada uma representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ do grupo fundamental da superfície de tipo finito $S^* = S \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, onde S é uma superfície fechada de gênero $g \geq 1$, considerando uma apresentação de $\pi_1(S^*)$:

$$\langle a_i, b_i, c_j, \ i = 1, \dots, g, \ j = 1, \dots, k \mid \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] \prod_{j=1}^k c_j = Id \rangle,$$

onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$ é o comutador de a_i e b_i , nessa apresentação podemos definir a representação ρ como $\rho(a_i) = A_i$, $\rho(b_i) = B_i$ e $\rho(c_j) = C_j$, onde A_i, B_i e C_j são elementos de $PSL_2(\mathbb{C})$ que satisfazem

$$\prod_{i=1}^g [A_i, B_i] \prod_{j=1}^k C_j = Id.$$

Para cada gerador a_i, b_i e c_j , ρ pode se levantar em dois possíveis, distintos pelo sinal,

$$\pm \tilde{A}_i, \pm \tilde{B}_i \text{ e } \pm \tilde{C}_j \in SL_2(\mathbb{C}),$$

cujas projetivizações darão as transformações de Möbius A_i, B_i e C_j , respectivamente, escolhemos um sinal para cada elemento e portanto o produto

$$\prod_{i=1}^g [\tilde{A}_i, \tilde{B}_i] \prod_{j=1}^k \tilde{C}_j \tag{5.2}$$

pode ser $\pm Id$. Nas escolhas onde o produto dá a Id dizemos que a representação se levanta a uma representação em $SL_2(\mathbb{C})$, se dá $-Id$, dizemos que a representação não se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$.

No caso de gênero 0, a apresentação de $\pi_1(S^*)$ não há a_i, b_i apenas c_j , $j = 1, \dots, k$, satisfazendo $\prod_{j=1}^k c_j = Id$.

Proposição 5.4. *A paridade da 2^{a} classe de Stiefel-Whitney da compactificação mínima quando a representação levanta a $SL_2(\mathbb{C})$ e das que não se levantam são diferentes.*

Demonstração. Seja $\pi : P \rightarrow S$ um $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado munido de uma compactificação mínima, após um *flip* de uma fibra invariante obtemos um outro $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ -fibrado $\pi' : P' \rightarrow S$ munido de uma folheação de Riccati birracionalmente equivalente a π . Segue da proposição 5.2 que o *flip* muda a classe topológica do fibrados e portanto as segundas classes de Stiefel-Whitney $w_2(P)$ e $w_2(P')$ possuem paridades diferentes.

Se ρ levanta a $SL_2(\mathbb{C})$, temos que cada gerador de $\pi_1(S^*)$ se levanta a uma matriz em $SL_2(\mathbb{C})$, onde o produto dado pela equação 5.2 dessas matrizes é Id . As matrizes relacionadas às monodromias locais da representação vem das equações diferenciais lineares com polos simples usadas para projetivizar e assim obter o modelo local de Riccati. Quando fazemos um único *flip* o sinal dessa matriz mudará, mudando a compactificação e portanto o produto de todas as matrizes é $-Id$ nessa compactificação a representação ρ não se levanta.

Obteremos duas famílias que alternam a paridade quando se faz um *flip*: em uma das famílias a paridade é par e na outra é ímpar. ■

Podemos obter uma versão análoga ao Teorema 3.10 da tese de Goldman em [13]:

Lema 5.3. *Se na compactificação mínima a representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$, então $w_2(P)$ é par. Caso contrário, é ímpar.*

Ideia da prova. Construir um caminho na variedade de caracteres

$$Hom(\pi_1(S^*), PSL_2(\mathbb{C})) // PSL_2(\mathbb{C})$$

entre uma representação ρ que se levanta e a representação trivial, que também se levanta, preservando a relação do levantamento expressa na equação 5.2 igual a Id .

Usando a continuidade de 2^{a} classe de Stiefel-Whitney, podemos deduzir que ela será constante ao longo do caminho, e portanto igual a zero.

Lema 5.4. *Se na compactificação mínima, a representação $\rho : \pi_1(S^*) \rightarrow PSL_2(\mathbb{C})$ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$, então $e(\sigma) \equiv k_0 \pmod{2}$. Se não levanta, então $e(\sigma)$ tem paridade diferente de k_0 .*

Demonstração. Se a representação ρ levanta, segue do lema 5.3 que $w_2(P)$ é par e usando o lema 5.2 seguirá que $e(\sigma) \equiv k_0 \pmod{2}$. Analogamente, se mostra que $e(\sigma)$ tem paridade diferente de k_0 quando a representação ρ não levanta. ■

Prova da Proposição 5.3: Suponhamos que $tang(\mathcal{F}_\rho^{min}, \sigma(S))$ é ímpar. Se a representação ρ se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$, então $\sigma^2 \equiv w_2(P) \equiv 0 \pmod{2}$ e portanto segue da fórmula do Teorema 5.3 que $tang(\mathcal{F}_\rho^{min}, \sigma(S)) \equiv k_0 \pmod{2}$, logo k_0 é ímpar. De maneira análoga, se ρ não se levanta a $SL_2(\mathbb{C})$, segue que k_0 é par.

A implicação contrária segue imediatamente do lema acima. ■

Para os casos da proposição 5.3 teremos necessariamente $d(\rho) \geq 1$. Resta em aberto determinar se nesses casos $d(\rho) = 1$, e nos outros $d(\rho) = 0$.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Allegretti & T. Bridgeland, *The monodromy of meromorphic projective structures*, preprint, arXiv:1802.02505.
- [2] W. Barth, C. Peters & A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
- [3] C. Boissy, *Moduli space of meromorphic differentials with marked horizontal separatrices*, preprint, arXiv:1507.00555.
- [4] W. Boyce & R. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, seventh edition, John Wiley & Sons, Inc, 2000.
- [5] M. Brunella, *Birational Geometry of Foliations*, Publicações Matemáticas, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.
- [6] G. Calsamiglia, B. Deroin & S. Francaviglia, *Branched Projective Structures with Fuchsian Holonomy*, *Geom. Topol.* **18.1** (2014), p. 379-446.
- [7] C. Camacho & A. Lins Neto, *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, 1985.
- [8] D. Dumas, *Complex Projective Structures*, *Handbook of Teichmüller Theory*, vol 2, Eur. Math. Soc, Zurich, (2009), p.455-508.
- [9] I. Dolgachev, *Lectures on invariant theory*, London Mathematical Society Lecture Note Series **296**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [10] C. Earle, *On Variation of Projective Structures*, in *Riemann Surfaces and Related Topics*, (edited by I. Kra and B. Maskit), *Ann. of Math. Studies* **97**, Princeton Univ. Press, (1981) p. 87-99.
- [11] V. Fock & A. Goncharov, *Moduli spaces of local systems and higher Teichmüller theory*, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.* (2006), **103**, 1-211.
- [12] D. Gallo, M. Kapovich & A. Marden, *The Monodromy Groups of Schwarzian Equations on Closed Riemann Surfaces*, *Ann. of Math.* **151** (2000), p. 625-704.
- [13] W. Goldman, *Discontinuous Groups and the Euler class*, PhD Thesis, University of California, Berkeley, 1980.

- [14] W. Goldman, *Projective Structure with Fuchsian Holonomy*, J. Diff. Geom. **25** (1987), p. 297-326.
- [15] W. Goldman, *Topological Components of Spaces of Representations*, Invent. Math., **93(3)**, (1988), p. 557-607.
- [16] S. Gupta, *Monodromy Groups of \mathbb{CP}^1 -structures on Punctured Surfaces*, preprint, ArXiv:1909.10771v1
- [17] X. Gomez-Mont, *Holomorphic Foliations in Ruled Surfaces*, Transactions of the American Mathematical Society **312**, n^o 1 (1989), p. 179-201.
- [18] T. Graber, J. Harris & J. Starr, *Families of Rationally Connected Varieties*, Journal of the American Mathematical Society **16**, n^o 1 (2002), p. 57-67.
- [19] P. Griffiths & J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, Inc, 1978.
- [20] R. C. Gunning, *Special Coordinate Coverings of Riemann Surfaces*, Math. Annalen **170**, (1967), p. 67-86.
- [21] R. C. Gunning & R. Narasimhan, *Immersion of Open Riemann Surfaces*, Mathematische Annalen **174** (1967), p. 103-108.
- [22] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 52. Springer, New York, 1977.
- [23] D. Hejhal, *Monodromy Groups and Linearly Polymorphic Functions*, Acta Math. **135** (1975), p. 1-55.
- [24] F. Loray & D. Marín, *Projective Structures and Projective Bundles over Compact Riemann Surfaces*, Asterisque **323**, (2009), p. 223-252.
- [25] F. Loray & J. V. Pereira, *Transversely projective foliations on surfaces: existence of normal forms and prescription of the monodromy*, Internat. J. Math., **18:6** (2007), 723-747.
- [26] R. Mandelbaum, *Branched Structures on Riemann Surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **163**, (1972), p. 261-275.
- [27] M. Maruyama, *On Classification of Ruled Surfaces*, Lectures in Mathematics, Kinokuniya Book-Store Co. Ltd, Tokyo, 1970.
- [28] B. Maskit, *On a Class of Kleinian Groups*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I **442:8** (1969).
- [29] J. Morrow & K. Kodaira, *Complex Manifolds*, Holt-Rinehart & Winston, New York, 1971.

- [30] S. Nag, *Schiffer Variation and Complex Structure and coordinates for Teichmüller Spaces*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **94.2-3** (1985), p. 111-122.
- [31] Z. Nehari, *The Schwarzian derivative and schlicht functions*, Bull. Amer. Math. Soc., **55:545-551**, (1949).
- [32] H. P. de Saint-Gervais, *Uniformisation des Surfaces de Riemann. Retour sur un Théorème Centenaire*, ENS Editions, Lyon, 2010.
- [33] D. Sullivan & W. Thurston, *Manifolds with Canonical Coordinate Charts: Some Examples*, Enseign. Math. **2**, (1983), 29 (1-2), p. 15-25.
- [34] S. P. Tan, *Branched-Structures on Surfaces with Prescribed Real Holonomy*, Math. Ann. **300.4** (1994), p. 649-667.
- [35] M. Teixidor I Bigas, *Vector Bundle on Curves*, MA02155, Medford.
- [36] M. Troyanov, *Les Surfaces Euclidiennes à Singularités Coniques*, L'Enseignement Mathématique **32** (1986), p. 79-94.