

IM-UFF

CLUSTERS DE GENES COMO INTERSEÇÃO DE POTÊNCIAS DE
CAMINHOS

Vitor Costa Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal Fluminense, IM-UFF, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Simone Dantas de Souza

Niterói

Dezembro de 2010

CLUSTERS DE GENES COMO INTERSEÇÃO DE POTÊNCIAS DE
CAMINHOS

Vitor Costa Silva

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO DE
MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE (IM-UFF)
COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM MATEMÁTICA.

Examinada por:

Prof. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Haroldo Rodrigues Clark, D.Sc.

Prof. Max Oliveira de Souza, Ph.D.

NITERÓI, RJ – BRASIL

DEZEMBRO DE 2010

Silva, Vitor Costa

Clusters de genes como interseção de potências de caminhos/Vitor Costa Silva. – Niterói: UFF/IM, 2010.

IX, 41 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Simone Dantas de Souza

Dissertação (mestrado) – UFF/IM/Programa de Pós-graduação em Matemática, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 41 – 41.

1. Potência de caminho. 2. Grafo de intervalo unitário. 3. Genomas. 4. Clusters de Genes. I. Souza, Simone Dantas de. II. Universidade Federal Fluminense, IM, Programa de Pós-graduação em Matemática. III. Título.

*Ao meu avô, Juvêncio Costa.
(em memória)*

Agradecimentos

A Deus, sem a intervenção Dele em minha vida eu não teria concluído este desafio.

À Débora, por todo amor, carinho, dedicação, compreensão e paciência a mim destinados ao longo desses anos que estamos juntos. Amo-te!

Aos meus pais, Francisco e Naideci, e minha avó Adália por terem me dado a estrutura de uma família e por estar sempre acreditando em mim e me incentivando em todos os momentos da minha vida. Tenho certeza que sem essa estrutura e incentivo eu não teria êxito.

Aos meus irmãos Arthur e Leonardo, vocês são os meus maiores e verdadeiros amigos.

Aos meus familiares, todos vocês contribuíram para a formação da minha ética e do meu caráter.

Aos meus amigos e companheiros de graduação e mestrado Daniel, Fausto, Flavio, Leandro, Manuel e Rômulo.

À minha orientadora Simone Dantas, a todos os professores da UFF e a todos que passaram pela minha vida estudantil, em particular aos professores Dinamérico Pombo, Francisco Fontenelle, Katia Frensel e Luiz Kowada pela boa formação que me deram. Vocês contribuíram muito para o meu crescimento como matemático e como pessoa. Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) pelo suporte financeiro.

Resumo da Dissertação apresentada ao IM/UFF como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CLUSTERS DE GENES COMO INTERSEÇÃO DE POTÊNCIAS DE CAMINHOS

Vitor Costa Silva

Dezembro/2010

Orientador: Simone Dantas de Souza

Existem várias definições de cluster de genes determinadas por dois genomas, e vários métodos para encontrá-los. No entanto, há pouco trabalho na caracterização das configurações de genes que são elegíveis para ser um cluster de acordo com uma definição dada. Por exemplo, em um ancestral de dois genomas, que conjuntos de genes podem possivelmente refletir um cluster nos dois genomas filhos? Em uma versão deste problema, faremos uso da definição de cluster utilizando Teoria de Grafos.

Seja V_X o conjunto de n marcadores no genoma X . Estes marcadores estão divididos entre um número de ordens totais chamadas cromossomos. Para marcadores g e h em V_X no mesmo cromossomo X , existe a aresta $gh \in E_X$ se o número de genes entre g e h em X é menor que θ , onde $\theta \geq 1$ é um *parâmetro de vizinhança* fixado. Chamamos $G_X = (V_X, E_X)$ de *grafo de θ -adjacência*, se suas arestas são determinadas por um parâmetro de vizinhança θ .

Então o problema pode ser reformulado da seguinte maneira: dado um grafo G , existem dois grafos θ -adjacentes $G_S = (V_S, E_S)$ e $G_T = (V_T, E_T)$ tais que $G_S \cap G_T$ contém G como subgrafo induzido? Nesta dissertação, estudamos o caso em que G é um grafo de intervalo unitário e mostramos um algoritmo $\mathcal{O}(n^2)$ que responde positivamente a esta questão, apresentando os grafos G_S e G_T . Em seguida, discutimos a minimalidade de θ e do número de vértices de G_S e G_T .

Abstract of Dissertation presented to IM/UFF as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

GENE CLUSTERS AS INTERSECTIONS OF POWERS OF PATHS

Vitor Costa Silva

December/2010

Advisor: Simone Dantas de Souza

There are various definitions of a gene cluster determined by two genomes and methods for finding these clusters. However, there is little work on characterizing configurations of genes that are eligible to be a cluster according to a given definition. For example, in the ancestor of two genomes, which sets of genes could possibly reflect a cluster in the two daughter genomes? In one version of this problem, we make use of the graph theoretical definition.

Let V_X be the set of n markers in the genome X . These markers are partitioned among a number of total orders called *chromosomes*. For markers g and h in V_X on the same chromosome in X , let $gh \in E_X$ if the number of genes intervening between g and h in X is less than θ , where $\theta \geq 1$ is a fixed *neighbourhood* parameter. We call $G_X = (V_X, E_X)$ a *θ -adjacent graph* if its edges are determined by a neighbourhood parameter θ .

Then the problem can be reformulated as follows: given a graph G , does there exist two θ -adjacency graphs $G_S = (V_S, E_S)$ and $G_T = (V_T, E_T)$, such that $G_S \cap G_T$ contains G as induced subgraph? In this dissertation, we study the case when G is an unit interval graph and we show an $\mathcal{O}(n^2)$ algorithm which positively answers this question by presenting graphs G_S and G_T . We then discuss the minimality of θ and of the number of vertices of G_S and G_T .

Sumário

| | |
|---|-----------|
| Lista de Figuras | ix |
| 1 Introdução | 1 |
| 2 Preliminares | 6 |
| 3 O algoritmo | 11 |
| 3.1 Construção de uma potência de caminho | 11 |
| 3.2 Demonstrações | 18 |
| 4 Exemplos | 29 |
| 5 Conclusões | 39 |
| Referências Bibliográficas | 41 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Genoma X com 20 marcadores e 2 cromossomos. | 2 |
| 1.2 | Grafo $G_X = (V_X, E_X)$ com 20 marcadores, 3 cromossomos e parâmetro de vizinhança $\theta = 3$ | 3 |
| 2.1 | Grafo de intervalo unitário G com uma família de intervalos I | 7 |
| 2.2 | G_S e G_T , com potência $\theta = 2$, cuja a interseção $G_{ST}[V]$ contém G como subgrafo induzido, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ | 8 |
| 3.1 | Exemplo onde v_5 é adjacente a v_3 e não adjacente a v_2 | 13 |
| 3.2 | O número de vértices entre v e o vértice de maior índice adjacente a v_1 em P^θ é igual a distância $d_{P^{\theta_0}}(v_1, v_{t+1})$ | 13 |
| 3.3 | Exemplo onde v_6 é adjacente a v_2 em G , mas v_6 é não-adjacente a v_2 em P^{θ_0} ; e a nova potência de caminho P^{θ_1} após o procedimento <i>SHIFT</i> | 14 |
| 3.4 | Número de vértices que são adjacentes a v_i e não-adjacentes a v_{i+1} em P^θ é igual a d | 15 |
| 3.5 | Número de vértices adjacentes a v_i e não-adjacentes a v_{i+1} em G é d | 16 |
| 3.6 | Inserção dos primeiros vértices de P^θ em $P^{\theta+1}$ | 20 |
| 3.7 | Inserção dos últimos vértices de P^θ em $P^{\theta+1}$ pelo procedimento <i>SHIFT</i> | 21 |
| 4.1 | Exemplo 1 onde $V(G)$ tem ordenação dada por $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5 < v_6 < v_7$ | 29 |
| 4.2 | Exemplo 2 onde $V(G)$ tem ordenação dada por $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < \dots < v_{10}$ | 32 |
| 5.1 | Grafo G igual a C_4 e suas respectivas potências de caminhos. | 40 |

Capítulo 1

Introdução

Devido às recentes pesquisas sobre mapeamento genético, estão disponíveis uma imensa quantidade de informações arquivadas em bancos de dados de vários centros de pesquisas no mundo. Processar estas informações de forma a obter conclusões biológicas relevantes é um dos atuais desafios na Biologia. Uma das maneiras de estruturar estas informações é através de comparação de genomas, ou seja, a busca de semelhanças ou diferenças entre dois ou mais organismos.

Antes de elucidarmos o significado de genoma precisamos da seguinte definição. O DNA (deoxyribonucleic acid ou ácido desoxirribonucleico) é um composto orgânico cujas moléculas contêm as instruções genéticas que coordenam o desenvolvimento e o funcionamento de todos os seres vivos e alguns vírus. O seu principal papel é armazenar as informações necessárias para a construção das proteínas. O genoma é toda a informação hereditária de um organismo que está codificada em seu DNA. Os segmentos de DNA que contêm a informação genética são denominados genes e o conjunto de todos os genes contidos em uma cadeia conexas de um genoma é chamado de cromossomo.

Cluster de genes, ou apenas *cluster*, é um conjunto de dois ou mais genes que serve para codificar um mesmo (ou um similar) produto no organismo. Por exemplo, indivíduos com um mesmo ancestral podem possuir um mesmo conjunto de cluster de genes.

Destá forma, o problema central desta tese consiste em:

Questão 1. *Dado um cluster em um genoma é sempre possível obter dois cromossomos cuja interseção é exatamente o cluster dado? Se a resposta for afirmativa, quais os dois menores cromossomos que solucionam o problema?*

Para estudar este problema definiremos alguns objetos bioquímicos usados na teoria genética através de uma modelagem matemática baseada no artigo [1]. Com esta modelagem, reformularemos o problema acima utilizando a Teoria de Grafos.

Um cromossomo pode ter seus genes ordenados, pois os aminoácidos que compõem o DNA podem ser ordenados e orientados. Portanto, está bem-definida a seguinte modelagem.

Dizemos que X é um *conjunto de genes ordenados*, se $X = \{g_1, \dots, g_l\}$ é um conjunto de genes em um cromossomo tal que g_{i+1} é o gene posterior ao gene g_i , para todo $i \in \{1, \dots, l - 1\}$.

Seja V_X o conjunto de marcadores em um genoma X . Esses marcadores estão divididos entre um número de ordens totais chamadas *cromossomo*.

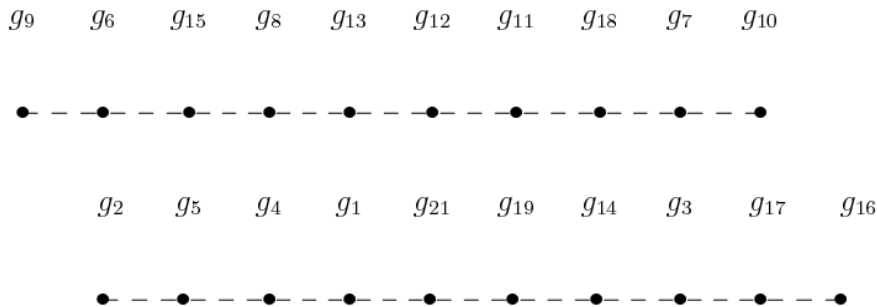


Figura 1.1: Genoma X com 20 marcadores e 2 cromossomos.

Dados dois marcadores g e h em um cromossomo, definimos a *distância* entre g e h em um cromossomo como o número de marcadores entre g e h ao longo do cromossomo. *Adjacência generalizada* é a propriedade compartilhada por dois marcadores que estão a uma distância menor ou igual a um número inteiro positivo pré-fixado, ao longo de um cromossomo. Da mesma forma, para marcadores $g, h \in V_X$ em um mesmo cromossomo de X , a aresta $gh \in E_X$ se o número de genes entre g e h em X é menor que θ , onde $\theta \geq 1$ é um *parâmetro de vizinhança* fixado.

Chamamos $G_X = (V_X, E_X)$ de *grafo de θ -adjacência*, se o conjunto de vértices V_X é um conjunto de marcadores ao longo de um genoma e o conjunto de arestas E_X é determinado por um parâmetro de vizinhança θ .

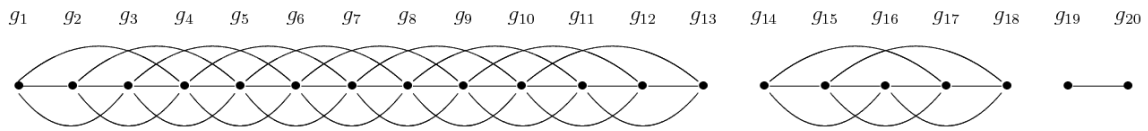


Figura 1.2: Grafo $G_X = (V_X, E_X)$ com 20 marcadores, 3 cromossomos e parâmetro de vizinhança $\theta = 3$.

Para prosseguirmos com a modelagem precisamos definir alguns objetos da Teoria de Grafos. Para maiores informações sugerimos a referência [2].

Seja $V' \subseteq V$. O subgrafo de G *induzido por V'* , denotado por $G[V']$, é o subgrafo cujo conjunto de vértices é V' e cujo conjunto de arestas é o conjunto de arestas de G que tem ambos os extremos em V' .

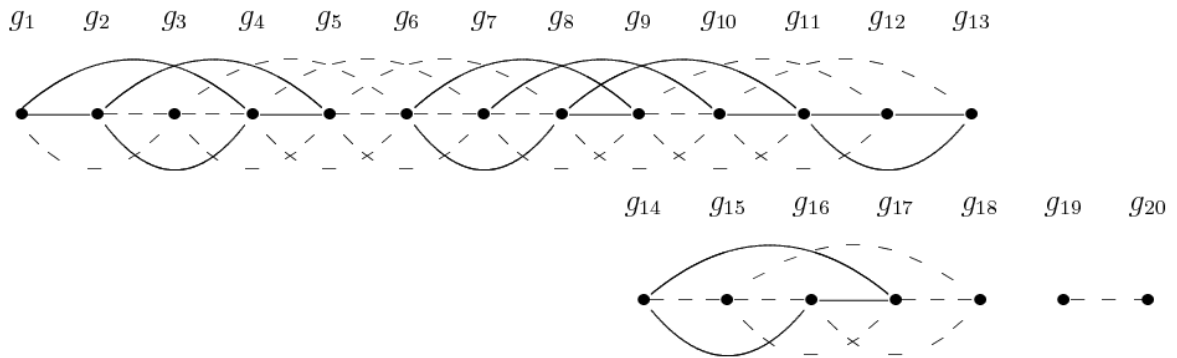
Um caminho entre dois vértices v_0 e v_l de um grafo G é uma sequência de vértices $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_l$ tal que $v_i v_{i+1}$ é uma aresta de G , $i = 0, \dots, l - 1$. Um grafo que é um caminho com n vértices será representado por P_n . Um grafo G é *conexo* se, para todo par de vértices $v, \bar{v} \in V(G)$, existe um caminho entre v e \bar{v} em G .

Seja S um conjunto e $S' \subseteq S$. O conjunto S' é maximal em relação a uma propriedade Π , se S' satisfaz a propriedade Π e não existe subconjunto S'' de S tal que $S'' \supset S'$ e também satisfaz Π .

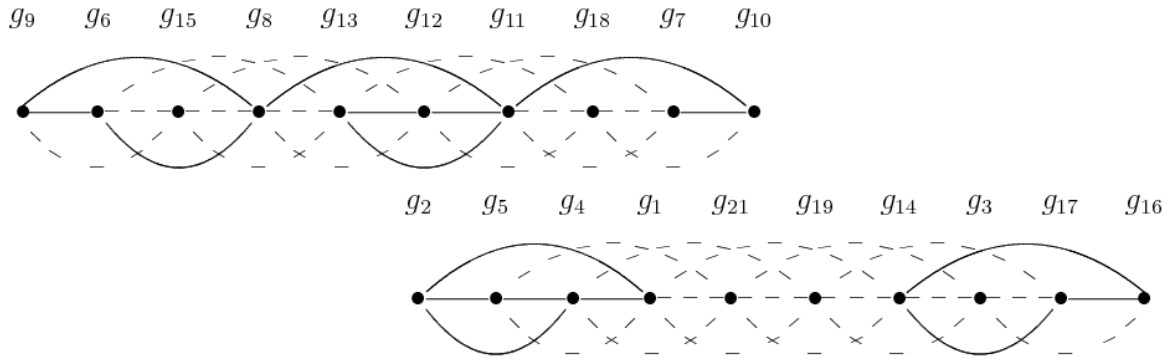
Considere $G_S = (V_S, E_S)$ e $G_T = (V_T, E_T)$ dois grafos de θ -adjacência com $V_{ST} = V_S \cap V_T \neq \emptyset$. Dizemos que $V \subseteq V_{ST}$ é um *cluster de adjacência generalizada*, ou *cluster*, se este consiste em um conjunto de marcadores de um subgrafo induzido conexo maximal do grafo $G_{ST} = (V_{ST}, E_S \cap E_T)$.

Exemplo 1. Sejam os grafos $G_S = (V_S, E_S)$ e $G_T = (V_T, E_T)$ grafos de 3-adjacência do genoma S e do genoma T , respectivamente, com $V_{ST} = \{g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}, g_{14}, g_{15}, g_{16}, g_{17}\}$ representados na figura abaixo. As arestas do grafo $G_{ST} = (V_{ST}, E_S \cap E_T)$ estão destacadas com linhas contínuas nos grafos G_S e G_T .

Grafo de 3-adjacência G_S com 3 cromossomos



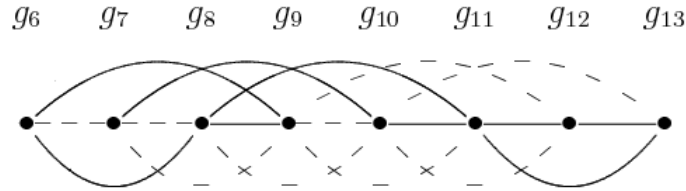
Grafo de 3-adjacência G_T com 2 cromossomos



Neste exemplo, os 3 clusters de adjacência generalizada são os conjuntos $\{g_1, g_2, g_4, g_5\}$, $\{g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}\}$ e $\{g_{14}, g_{16}, g_{17}\}$.

Desta forma, chamaremos $G = G_{ST}[V]$ o grafo induzido pelo cluster V .

Exemplo 2. Grafo G induzido pelo cluster $V = \{g_6, g_7, g_8, g_9, g_{10}, g_{11}, g_{12}, g_{13}\}$ está desenhado com as arestas contínuas.



Sejam G_S e G_T dois grafos, a *interseção* $G_S \cap G_T$ é formada pelo conjunto de vértices $V_S \cap V_T$ e o conjunto de arestas $E_S \cap E_T$. Através desta modelagem obtemos a seguinte reformulação do tema desta tese:

Questão 2. *Dado um grafo G , é possível exibir dois grafos de θ -adjacência, cuja interseção contém G como subgrafo induzido? Se a resposta for afirmativa, quais os dois menores grafos de θ -adjacência (com relação a θ e ao número de vértices) que solucionam o problema?*

Neste trabalho respondemos a esta questão quando o grafo G pertence a classe dos grafos de intervalo unitário.

Esta tese está dividida da seguinte forma. No Capítulo 2, apresentamos as definições, as notações, os algoritmos e os teoremas que serão utilizados ao longo deste trabalho. No Capítulo 3, mostraremos os resultados obtidos que respondem a questão central desta tese para a classe dos grafos de intervalo unitário. No Capítulo 4, aplicamos o algoritmo em exemplos de grafos de intervalo unitário. Finalmente, no Capítulo 5, concluímos a tese com proposta de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e teoremas que são utilizados nesta tese. As referências utilizadas neste capítulo foram Bondy e Murty [2], Corneil et al. [3], Roberts [4] e Cormen et al. [5].

Seja $G = (V(G), E(G))$ um grafo com conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas $E(G)$. Definimos $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. Sejam $v, \bar{v} \in V(G)$. A *distância* entre dois vértices v e \bar{v} em um grafo G , denotado por $d_G(v, \bar{v})$, é o número de arestas do menor caminho em G entre os vértices v e \bar{v} .

Seja P_n um grafo que é caminho com n vértices. Uma *potência de caminho* $P_n^\theta = (V(P_n^\theta), E(P_n^\theta))$, com potência θ e n vértices, é um grafo tal que $V(P_n^\theta) = V(P_n)$ e $E(P_n^\theta) = \{v\bar{v} : d_{P_n}(v, \bar{v}) \leq \theta \text{ com } v, \bar{v} \in V(P_n^\theta)\}$. Informações sobre a história das potências de caminhos [6].

Segundo esta definição, um grafo de θ -adjacência conexo com parâmetro de vizinhança θ e $n_\theta \geq \theta - 1$ marcadores (definido no Capítulo 1) é semelhante a potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$.

Por esta equivalência de definições, podemos reformular a Questão 2 apresentada no Capítulo 1 da seguinte forma:

Questão 3. Dado um grafo conexo G , existem duas potências de caminhos $G_S = (V_S, E_S)$ e $G_T = (V_T, E_T)$, com potência θ , cuja interseção contém G como subgrafo induzido? Se resposta for afirmativa, quais as duas menores potências de caminhos (com relação a potência θ e o número de vértices n_θ) que solucionam o problema?

Neste trabalho estudamos o caso onde o grafo G é um grafo de intervalo unitário definido a seguir.

Seja G um grafo. Dizemos que G é um *grafo de intervalo unitário* se existe uma família I de intervalos (a, b) sobre a reta real tal que:

- cada $v \in V(G)$ está associado a um único intervalo $(a_v, b_v) \in I$;
- todos os intervalos de I são do mesmo tamanho;
- para $v, \bar{v} \in V(G)$, $v\bar{v} \in E(G)$ se, e somente se, $(a_v, b_{\bar{v}}) \cap (a_{\bar{v}}, b_v) \neq \emptyset$.

A família de intervalos I é chamada de *modelo de intervalos unitários* para G . Então, dado um grafo de intervalo unitário G e um modelo de intervalos unitários I associado aos seus vértices v_1, v_2, \dots, v_n , denotamos as coordenadas da esquerda e da direita de um intervalo associado ao vértice v como (a_v, b_v) . Dizemos que v_1, v_2, \dots, v_n é uma *rotulação natural* para os vértices de G se $a_{v_i} \leq a_{v_{i+1}}$, para cada $1 \leq i \leq n-1$. Um vértice z é um vértice âncora esquerda (left anchor [3]) se z pode receber o rótulo v_1 em alguma rotulação natural para $V(G)$.

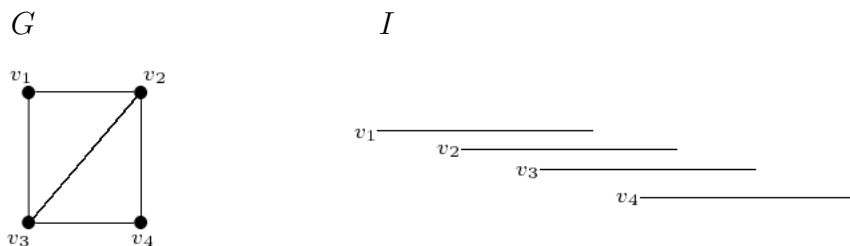


Figura 2.1: Grafo de intervalo unitário G com uma família de intervalos I .

Os grafos de intervalo unitário possuem a seguinte propriedade apresentada no Teorema 9 de Lin et al. [6]:

Teorema 1. [6] *Um grafo G é um grafo de intervalo unitário se e somente se G é um subgrafo induzido de uma potência de caminho.* ■

Dado um grafo de intervalo unitário G , existe uma potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ que contém G como subgrafo induzido. Para construirmos as potências de caminhos G_S e G_T basta rotularmos a potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ de duas formas: os vértices do conjunto $V(G_T) \cap V(G)$ recebem os mesmos rótulos dos vértices do conjunto $V(G_S) \cap V(G)$; e os vértices de $V(G_T) \setminus V(G)$ recebem rótulos que não estão nos vértices de $V(G_S)$. A prova da caracterização estrutural do Teorema 1 dada em [6] não resulta em um algoritmo que responde a Questão 3. Desta forma, o objetivo desta tese é construir a menor potência $P_{n_\theta}^\theta$ que contém G como subgrafo induzido.

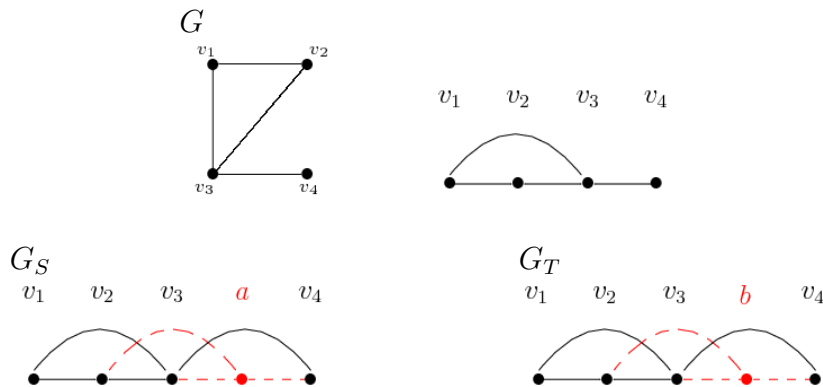


Figura 2.2: G_S e G_T , com potência $\theta = 2$, cuja a interseção $G_{ST}[V]$ contém G como subgrafo induzido, $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Existem vários algoritmos que reconhecem grafos de intervalo unitário em tempo linear, por exemplo, Corneil et al. [3] e De Figueiredo et al. [7]. Outras referências sobre algoritmo de reconhecimento podem ser encontradas em [7].

Dado um grafo de intervalo unitário G o algoritmo *Recognize* [3] fornece uma ordenação de $V(G)$ utilizando o algoritmo busca em largura (breadth-rst search

(BFS) [3]. Sejam L_0, L_1, \dots, L_r os níveis determinados pelo algoritmo de busca em largura a partir do vértice v_1 . Seja v um vértice no nível x de uma busca em largura de G . Representamos por $\text{PrevN}(v)$ o conjunto dos vizinhos de v no nível $x-1$ e por $\text{NextN}(v)$ o conjunto dos vizinhos de v no nível $x+1$ da busca em largura.

Seja $v \in V(G)$ considere a *vizinhança* de v em G é o conjunto $N_G(v) = \{\bar{v} \in V(G) : \bar{v}v \in E(G)\}$ e a *vizinhança fechada* de v em G é o conjunto $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$. Dizemos que dois vértices v, \bar{v} de $V(G)$ são *indistinguíveis* se $N_G[\bar{v}] = N_G[v]$.

Esta ordenação apresenta a seguinte propriedade de Roberts [4].

Teorema 2. [4] *Grafo G é um grafo de intervalo unitário se, somente se, existe uma ordenação $<$ dos vértices tal que para todos os vértices v de $V(G)$, a vizinhança fechada de v , $N_G[v]$, é um conjunto de vértices consecutivos com relação a ordenação $<$.* ■

Seja G um grafo de intervalo unitário. Seja $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ uma ordenação do conjunto de vértices de G que satisfaz o Teorema 2. Usaremos a notação $\text{order}_G(v)$ para nos referirmos à posição do vértice v na ordenação do conjunto de vértices de G . Denotaremos por $\xi_G(v) = \max\{\text{order}_G(\bar{v}) : \bar{v} \in N[v]\}$ e $\eta_G(v) = \min\{\text{order}_G(\bar{v}) : \bar{v} \in N[v]\}$, $v \in V(G)$. Dado um vértice $v \in V(G)$, usaremos a notação $\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v)$ para referirmos à posição do vértice v em $P_{n_\theta}^\theta$, isto é, $\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v) = i$, se v é o vértice u_i em $V(P_{n_\theta}^\theta)$.

No artigo [3], os autores definem uma ordenação $<_B$ do conjunto de vértices baseada:

- i) nos seus níveis da busca em largura e
- ii) entre os vértices no mesmo nível, em ordem crescente de $|\text{NextN}(v)| - |\text{PrevN}(v)|$, ordenando empates arbitrariamente.

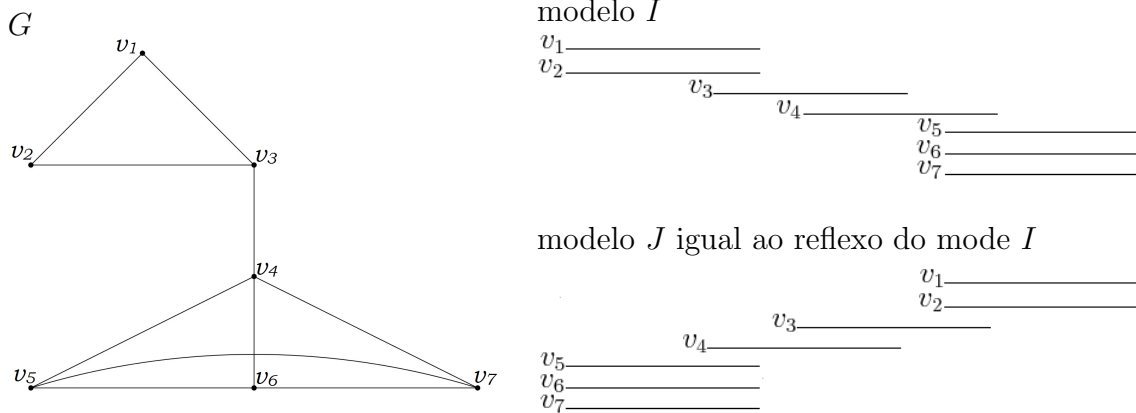
Teorema 3. [3] *Seja $I =$ um modelo de intervalo unitário do grafo de intervalo unitário G com rotulação natural v_1, \dots, v_n . Seja L_0, L_1, \dots, L_r os níveis diferentes de vazio determinados pela busca em largura (BFS) iniciada no vértice v_1 . Então,*

- (1) *para todos vértices \bar{v} , $v \in V(G)$, se $a_{\bar{v}} < a_v$ e $v <_B \bar{v}$ temos que $N_G[v] = N_G[\bar{v}]$.*
- (2) *A ordenação $<_B$ satisfaz a propriedade de ordenação do Teorema 2.* ■

No trabalho [3], se G é um grafo de intervalo unitário, o algoritmo *Recognize* [3] utiliza o procedimento *Get_left_anchor* para definir o primeiro vértice da ordenação.

Observação 1. Pelo Teorema 2.3 do artigo [3], qualquer vértice âncora esquerda z retornado pelo procedimento *Get_left_anchor* [3] é indistinguível ou ao vértice v_1 ou ao vértice v_n de uma rotulação natural de G . Portanto, o vértice âncora esquerda é único a menos de vértices indistinguíveis. De fato, se z é indistinguível a v_1 já temos a afirmação, se z é indistinguível a v_n , tome a ordenação $v_n < \dots < v_1$ que é uma ordenação natural, basta tomar o modelo que seja o reflexo de um modelo que satisfaça a rotulação $v_1 < \dots < v_n$, e daí, temos a afirmação.

Exemplo 3. Dados um grafo de intervalo unitário G e dois modelos de intervalos unitários I e J como na figura abaixo. Temos $N_G[v_1] = N_G[v_2]$ e $N_G[v_5] = N_G[v_6] = N_G[v_7]$.



Pelo modelo I temos v_1 e v_2 são vértices âncora esquerda e pelo modelo J temos v_5, v_6 e v_7 são vértices âncora esquerda.

Capítulo 3

O algoritmo

Seja G um grafo de intervalo unitário e seja $v_1 < v_2 < \dots < v_n$ uma ordenação de $V(G)$ dada por [3]. Neste capítulo apresentaremos um algoritmo que retorna a menor potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$, com relação aos parâmetros θ e n_θ , que contém G como subgrafo induzido.

3.1 Construção de uma potência de caminho

A partir de agora utilizaremos a notação P^{θ_i} (resp. P^θ) para representar a potência de caminho $P_{n_i}^{\theta_i}$ (resp. $P_{n_\theta}^\theta$) que contém n_i (resp. n_θ) vértices; e P_{n_i} (resp. P_{n_θ}) para representar o caminho com n_i (resp. n_θ) vértices correspondente a potência de caminho $P_{n_i}^{\theta_i}$ (resp. $P_{n_\theta}^\theta$).

Durante o procedimento e o algoritmo usaremos os seguintes rótulos: o rótulo v para nos referirmos aos vértices de G ; o rótulo u para nos referirmos aos vértices de P^θ ; e o rótulo w para nos referirmos aos vértices de $P^{\theta+1}$. Relembramos que $\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v)$ é a posição do vértice v na ordenação do conjunto de vértices de $P_{n_\theta}^\theta$. Também utilizaremos a expressão “o vértice v em P^θ ” para nos referirmos ao vértice $u \in P^\theta$ que recebeu o vértice $v \in G$.

A ideia do algoritmo consiste em, a partir da clique maximal que contém o vértice v_1 , construir uma sequência de potências de caminhos P^{θ_i} minimais, com relação a θ_i e n_i , $P^{\theta_0} \subset P^{\theta_1} \subset P^{\theta_2} \subset \dots \subset P^{\theta_{l-1}} \subset P^{\theta_l}$ tais que $\theta_i = \theta_{i-1} + 1$.

A cada potência P^{θ_i} , os vértices são adicionados sucessivamente, na ordem citada acima, respeitando-se as adjacências e não-adjacências determinadas por θ .

Ao final do algoritmo a potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ tem as seguintes propriedades:

1. A ordenação $v_1 < \dots < v_n$ é mantida em $P_{n_\theta}^\theta$, isto é, $u_{\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v_1)} < \dots < u_{\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v_n)}$;
2. a potência θ e o número de vértices são mínimos;
3. para $v_i, v_{i+1} \in V(G)$, o primeiro vértice não-adjacente a v_i e adjacente a v_{i+1} em G é o primeiro não-adjacente a $u_{\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v_i)}$ e adjacente a $u_{\text{order}_{P_{n_\theta}^\theta}(v_{i+1})}$ em $P_{n_\theta}^\theta$, (caso esse vértice exista).

O algoritmo começa inserindo em P^{θ_0} a clique maximal que contém o vértice v_1 e definido θ_0 como o número de vértices desta clique subtraído de uma unidade.

Em seguida, o algoritmo analisa v o primeiro vértice não-adjacente a v_1 na ordem de $V(G)$.

Se v é adjacente a v_2 , o algoritmo tem que inserir v em um vértice de P^{θ_0} que esteja a distância $\theta_0 + 1$ em P_{n_0} do vértice que recebeu v_1 , ou seja, v será o vértice consecutivo ao último vértice adjacente a v_1 em P^{θ_0} . Note que esta distância em P^{θ_0} faz com que v esteja a uma distância menor ou igual a θ_0 de v_2 , pois o índice do vértice que recebeu v_2 é maior que o índice do vértice que recebeu v_1 .

Se v é não-adjacente a v_2 , mas é adjacente a v_3 , o algoritmo tem que inserir v em um vértice de P^{θ_0} que esteja a distância $\theta_0 + 1$ em P_{n_0} do vértice que recebeu v_2 . Logo, o algoritmo terá que inserir um vértice entre o vértice v e o vértice de maior índice adjacente a v_1 em P^{θ_0} . A inserção deste vértice que não pertence a G é feita atribuindo-se o rótulo 0 a este vértice em P^{θ_0} . Veja um exemplo na Figura 3.1

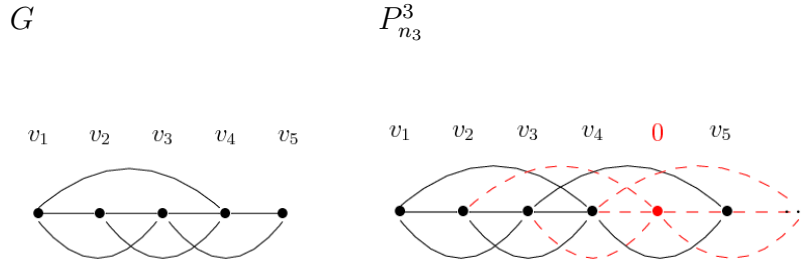


Figura 3.1: Exemplo onde v_5 é adjacente a v_3 e não adjacente a v_2 .

Se v é não-adjacente a v_t , mas é adjacente a v_{t+1} , onde v_t, v_{t+1} pertencem à clique maximal que contém v_1 , o algoritmo tem que inserir $t - 1$ vértices entre o vértice v e o vértice de maior índice adjacente a v_1 em P^{θ_0} . Veja a Figura 3.2.

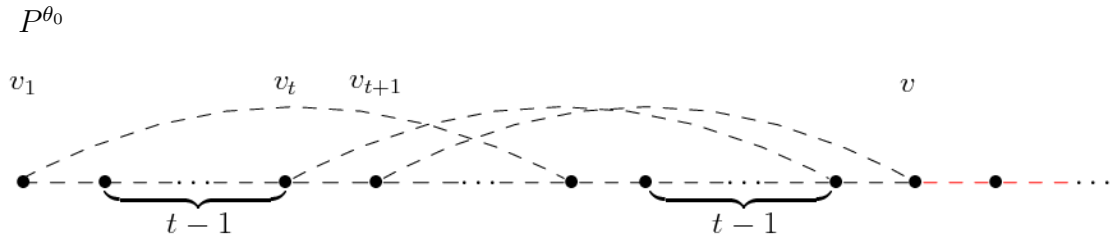


Figura 3.2: O número de vértices entre v e o vértice de maior índice adjacente a v_1 em P^{θ_0} é igual a distância $d_{P^{\theta_0}}(v_1, v_{t+1})$.

Suponha que existam pelo menos dois vértices v, \bar{v} não-adjacentes a v_1 e adjacentes a v_2 . Seja \bar{v} o segundo vértice desse conjunto. A fim de minimizar o número de vértices de P^{θ_0} , o vértice que receberá \bar{v} em P^{θ_0} tem que estar a distância $\theta_0 + 2$ em P_{n_0} do vértice que recebeu v_1 . Como o vértice que recebeu v_2 é o vértice consecutivo ao vértice que recebeu v_1 em P^{θ_0} , temos que a distância de \bar{v} a v_2 em P_{n_0} é $\theta_0 + 1$, isto é, \bar{v} e v_2 são não-adjacentes em P^{θ_0} . O algoritmo precisa executar o procedimento *SHIFT*. O procedimento *SHIFT* aumenta a largura da potência para que P^{θ_0} tenha a aresta $\bar{v}v_2$ e ajusta a potência P^{θ_0} ao novo θ_1 , inserindo vértices em P^{θ_0} para preservar as adjacências e não-adjacências de G e cria a P^{θ_1} . Veja um exemplo na Figura 3.3.

Faremos uma análise semelhante a que fizemos anteriormente para os vértices

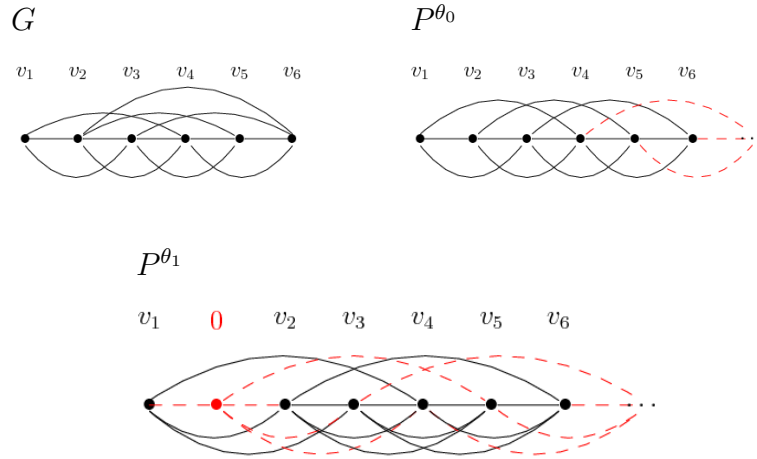


Figura 3.3: Exemplo onde v_6 é adjacente a v_2 em G , mas v_6 é não-adjacente a v_2 em P^{θ_0} ; e a nova potência de caminho P^{θ_1} após o procedimento *SHIFT*.

da ordenação de $V(G)$ que já foram inseridos em uma potência de caminho P^{θ_l} pelo algoritmo.

Seja v_i um vértice de $V(G)$ já inserido em P^{θ_l} e seja v o primeiro vértice maior que v_i em relação a ordenação e não-adjacente a ele.

Se v é adjacente a v_{i+1} , a análise é similar ao caso em que v é não-adjacente a v_1 e adjacente a v_2 .

Se v é não-adjacente a v_{i+j} , mas é adjacente a v_{i+j+1} , onde $1 \leq j \leq \theta_l - 1$, a análise é similar ao caso em que v é não-adjacente a v_i e adjacente a v_{i+1} .

Suponha que existam pelo menos dois elementos no conjunto dos vértices não-adjacentes a v_i e adjacentes a v_{i+1} em P^{θ_l} e que $d_{P_{n_l}}(v_i, v_{i+1}) = d \geq 1$.

Se o número de elementos no conjunto dos vértices não-adjacentes a v_i e adjacentes a v_{i+1} em P^{θ_l} é menor ou igual a d , a fim de minimizar o número de vértices de P^{θ_l} , o algoritmo insere o primeiro vértice desse conjunto, em relação a ordem, a distância $\theta_l + 1$ do vértice que recebeu v_i em P_{n_l} . Nos referimos a Figura 3.4. O segundo vértice desse conjunto, em relação a ordem, é inserido a distância $\theta_l + 2$ do

vértice que recebeu v_i em P_{n_i} , e assim sucessivamente, até esgotar o conjunto. Note que todos os vértices deste conjunto serão adjacentes a v_{i+1} , pois o último vértice desse conjunto, em relação a ordem, será inserido a uma distância menor ou igual a $\theta_l + d$ do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} e o vértice de maior índice adjacente a v_{i+1} em P^{θ_l} está exatamente $\theta_l + d$ distante do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} .

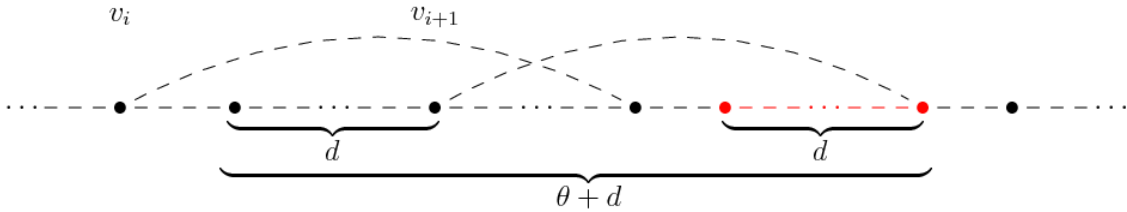


Figura 3.4: Número de vértices que são adjacentes a v_i e não-adjacentes a v_{i+1} em P^{θ_l} é igual a d .

Se o número de elementos no conjunto dos vértices não-adjacentes a v_i e adjacentes a v_{i+1} em P^{θ_l} é maior que d , a fim de minimizar o número de vértices de P^{θ_l} , o algoritmo insere o primeiro vértice desse conjunto, em relação a ordem, a distância $\theta_l + 1$ do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} . Veja a Figura 3.5. O segundo vértice desse conjunto, em relação a ordem, é inserido a distância $\theta_l + 2$ do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} , e assim sucessivamente, até o $(d + 1)$ -ésimo vértice desse conjunto, em relação a ordem, a distância $\theta_l + d + 1$ do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} . Seja \bar{v} este vértice. Como o vértice de maior índice adjacente a v_{i+1} em P^{θ_l} está $\theta_l + d$ distante do vértice que recebeu v_i em P_{n_i} , temos que a distância de \bar{v} a v_{i+1} em P_{n_i} é $\theta_l + 1$, isto é, \bar{v} e v_{i+1} são não-adjacentes em P^{θ_l} .

O algoritmo executa o procedimento *SHIFT* para inserir a aresta $\bar{v}v_{i+1}$ e ajustar a nova potência de caminho. Esse argumento será repetido até o algoritmo inserir todos os vértices desse conjunto em uma potência P^{θ_l+r} , onde r é a cardinalidade do conjunto de vértices não-adjacentes a v_i e adjacentes a v_{i+1} menos d .

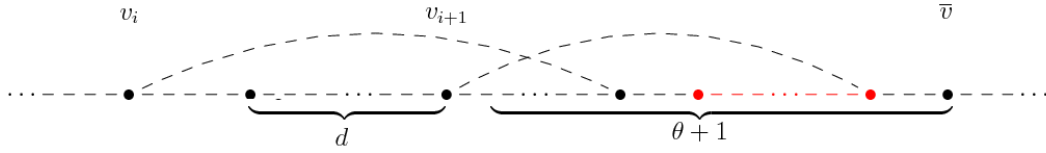


Figura 3.5: Número de vértices adjacentes a v_i e não-adjacentes a v_{i+1} em G é d .

A seguir apresentamos o algoritmo Construct a power of path (*CPP*) e em seguida o procedimento *SHIFT*.

Algoritmo 1. CPP

- *Entrada:* grafo de intervalo unitário G conexo e uma ordenação de $V(G)$, $v_1 < \dots < v_n$, dada por [3].
- *Saída:* a menor potência de caminho P^θ , com relação a θ e ao número de vértices n_θ , que contém G como subgrafo induzido.

1. $\theta := \xi_G(v_1) - 1$.

2. $P^\theta := (u_1, u_2, \dots, u_{\theta(n-1)}, u_{\theta(n-1)+1})$ vetor nulo.

3. Para $j := 1$ até $\xi_G(v_1)$ faça

$$u_j := v_j.$$

4. Para $i := 1$ até $\eta_G(v_n) - 1$ faça

Para $j := 1$ até $\xi_G(v_{i+1}) - \xi_G(v_i)$ faça

$$u_{\text{order}_{P^\theta}(v_i)+\theta+j} := v_{\xi_G(v_i)+j}.$$

Se $|\text{order}_{P^\theta}(v_{\xi_G(v_i)+j}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{i+1})| > \theta$ então

$$\text{SHIFT} \left(P^\theta \left[u_1, u_2, \dots, u_{\text{order}_{P^{\theta-1}}(v_i)+\theta+j} \right] \right).$$

5. Retorne $P^\theta := (u_1, u_2, \dots, u_{\text{order}_{P^\theta}(v_n)})$. □

Considere $P^\theta = P^\theta [u_1, u_2, \dots, u_{\text{order}_{P^\theta}(v_i)+\theta+j}]$ a potência de caminho que o algoritmo executa no procedimento *SHIFT* (Passo 4) onde $u_1 = v_1$, $v_l = v_{\xi_G(v_i)+j}$, u_{n_θ} é o último vértice que recebeu v_l , ou seja, $u_{n_\theta} = u_{\text{order}_{P^\theta}(v_i)+\theta+j}$. Note que v_l é não-adjacente a v_i e é adjacente a v_{i+1} em G , mas o algoritmo insere v_l a distância

$\theta + 1$ de v_{i+1} em P_{n_θ} , isto é, $v_{i+1}v_l \in E(G)$ e $v_{i+1}v_l \notin E(P^\theta)$. Também, temos como hipótese que P^θ é a menor potência de caminho que contém $G[v_1, \dots, v_{l-1}]$ como subgrafo induzido, e que a ordenação de $V(G)$ é preservada em P^θ .

O procedimento *SHIFT* aumenta a potência θ e acrescenta vértices em P^θ para preservar adjacências e não-adjacências de $V(G)$ na nova potência de caminho $P^{\theta+1}$. Este processo será explicado detalhadamente na demonstração do Lema 1.

Procedimento 2. SHIFT.

- *Entrada:* a menor potência de caminho P^θ que contém $G[v_1, \dots, v_{l-1}]$ como subgrafo induzido.
- *Saída:* a menor potência de caminho $P^{\theta+1}$ que contém $G[v_1, \dots, v_l]$ como subgrafo induzido.

1. $\theta := \theta + 1$.

2. $P^\theta := (w_1, w_2, \dots, w_{\theta(l-1)+1})$ vetor nulo.

3. $k := \max\{\text{order}_{P^{\theta-1}}(v) : \text{order}_{P^{\theta-1}}(v) < \eta_{P^{\theta-1}}(u_{n_{\theta-1}}) - 1, v \in V(G)\}$
 $s := \min\{t \geq 1 : t \equiv k \pmod{\theta}\}$.

4. Para $j := 1$ até s faça

$$w_j := u_j.$$

5. Para $j := s + 1$ até $k + 1$ faça

$$\text{Se } j \equiv (s + 1) \pmod{\theta}$$

$$\text{então } w_{\text{order}_{P^\theta}(u_{j-1})+2} := u_j;$$

$$\text{senão } w_{\text{order}_{P^\theta}(u_{j-1})+1} := u_j.$$

6. Para $j := k + 2$ até $n_{\theta-1}$ faça

$$w_{\text{order}_{P^\theta}(u_{j-1})+1} := u_j.$$

7. Retorne P^θ .

□

3.2 Demonstrações

Nesta seção mostraremos que, dado um grafo de intervalo unitário G cujo conjunto de vértices está ordenado segundo [3] o algoritmo *CPP* constrói corretamente a menor potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ com relação a θ e ao número de vértices n_θ , que contém G como subgrafo induzido.

Lema 1. *Seja G um grafo de intervalo unitário conexo e seja P^θ a menor potência de caminho que contém $G_{l-1} = G[v_1, \dots, v_{l-1}]$ como subgrafo induzido em relação a ordenação $v_1 < \dots < v_{l-1}$. Seja $v_l \in V(G)$ o último vértice inserido em P^θ tal que $v_{l-t-1}v_l \notin E(G)$, $v_{l-t}v_l \in E(G)$ e $d_{P_{n_\theta}^\theta}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$. Então, após a execução do procedimento *SHIFT*, $P^{\theta+1}$ é a menor potência de caminho que contém $G_l = G[v_1, \dots, v_{l-1}, v_l]$ como subgrafo induzido em relação a ordenação $v_1 < \dots < v_{l-1} < v_l$.*

Demonstração. Como $v_{l-t-1}v_l \notin E(G)$, $v_{l-t}v_l \in E(G)$ e $d_{P_{n_\theta}^\theta}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$, o procedimento *SHIFT* tem que aumentar a potência θ em uma unidade (Passo 1).

Por outro lado, aumentando θ para $\theta + 1$ o procedimento *SHIFT* cria em P^θ várias adjacências entre pares de vértices do conjunto $\{v_1, \dots, v_l\}$ que não são adjacências em G .

Descrevemos a seguir a ideia do procedimento. Para preservar as adjacências e não-adjacências de G em P^θ o procedimento *SHIFT* insere um vértice entre o vértice que recebeu v_{l-t-1} em P^θ e o vértice consecutivo a ele em P^θ . Em seguida, o procedimento insere um vértice a cada $\theta + 1$ vértices contados em ordem decrescente a partir do vértice que recebeu v_{l-t-1} em P^θ . Observamos que o conjunto formado pelos primeiros vértices de $V(P^\theta)$ tem cardinalidade menor ou igual a $\theta + 1$, pois o resto da divisão de $\text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1})$ por $\theta + 1$ é maior ou igual a 1 e menor ou igual a $\theta + 1$.

Mostraremos que o procedimento, argumentado anteriormente, insere o menor número de vértices necessários para que a potência de caminho $P^{\theta+1}$ gerada pelo

procedimento *SHIFT* contenha G_l como subgrafo induzido.

Antes faremos a correspondência entre os rótulos dos vértices de $V(G)$ e $V(P^\theta)$ utilizados no procedimento e os rótulos dos vértices desta demonstração. Nos referimos às Figuras 3.6 e 3.7.

O vértice $u_{n_\theta-1-\theta} = v_{l-t}$, pois $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$ e $\text{order}_{P^\theta}(v_l) = n_\theta$, portanto, $\text{order}_{P^\theta}(v_{l-t}) = \text{order}_{P^\theta}(v_l) - 1 - \theta = n_\theta - 1 - \theta$.

No Passo 3 do procedimento *SHIFT*, o vértice $u_k = v_{l-t-1}$, onde $k = \max\{\text{order}_{P^\theta}(v) : \text{order}_{P^\theta}(v) < \eta_{P^\theta}(u_{n_\theta}) - 1, v \in V(G)\}$. De fato, temos que $\eta_{P^\theta}(u_{n_\theta}) - 1 = \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t})$, pois $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$. Então, para todo $v \in V(G)$ com $\text{order}_{P^\theta}(v) < \eta_{P^\theta}(u_{n_\theta}) - 1$, tem-se $\text{order}_{P^\theta}(v) \leq \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1})$. Portanto, $k = \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1})$. Por esse dois fatos, temos que $k + 1 \leq n_\theta - 1 - \theta$, pois $k + 1 = \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1}) + 1 \leq \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t}) = n_\theta - 1 - \theta$.

Pela argumentação anterior e pela hipótese, temos que $P^\theta[u_1, \dots, u_{k+\theta}]$ é a menor potência de caminho com relação a θ e ao número de vértices de P^θ , a saber $k + \theta$, que contém $G_l[v_1, \dots, v_{\xi_{G_l}(v_{l-t-1})}]$ como subgrafo induzido.

Primeiramente, mostraremos que $P^\theta[u_1, \dots, u_{k+\theta}]$ é subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$. Desta forma, como $G_l[v_1, \dots, v_{\xi_{G_l}(v_{l-t-1})}]$ é subgrafo induzido de $P^\theta[u_1, \dots, u_{k+\theta}]$, então, por transitividade, teremos que $G_l[v_1, \dots, v_{\xi_{G_l}(v_{l-t-1})}]$ é subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$.

No Passo 5, o procedimento *SHIFT* insere um vértice entre u_s e u_{s+1} . Para todo $1 \leq i \leq s$, pelo fato de $s \leq \theta + 1$ e $\xi_{P^\theta}(u_i) + 1 = \text{order}_{P^\theta}(u_i) + \theta + 1$, temos que $\xi_{P^\theta}(u_i) + 1 \geq \text{order}_{P^\theta}(u_i) + s \geq s + 1$. Por hipótese $\xi_{P^\theta}(u_i) + 1 - \text{order}_{P^\theta}(u_i) = \theta + 1$, para todo $1 \leq i \leq \eta_{P^\theta}(u_{n_\theta}) - 1$ e, pelo argumento anterior, temos que $\xi_{P^{\theta+1}}(u_i) + 1 - \text{order}_{P^{\theta+1}}(u_i) = \theta + 2$, para todo $1 \leq i \leq s$. Ou seja, as adjacências e não-adjacências dos vértices de P^θ que estão no conjunto $\{u_1, \dots, u_s\}$ são preservadas em $P^{\theta+1}$.

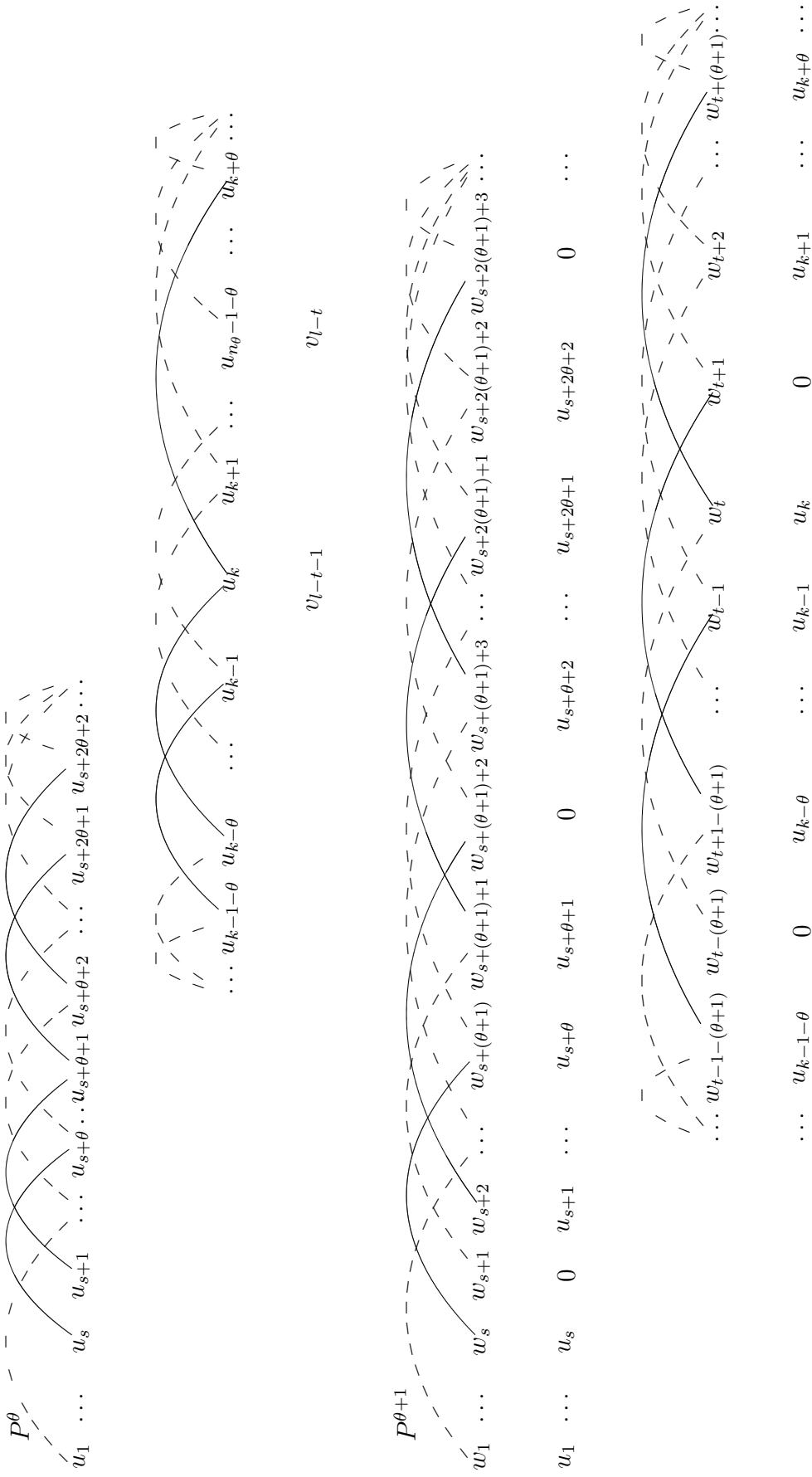


Figura 3.6: Inserção dos primeiros vértices de P^θ em $P^{\theta+1}$.

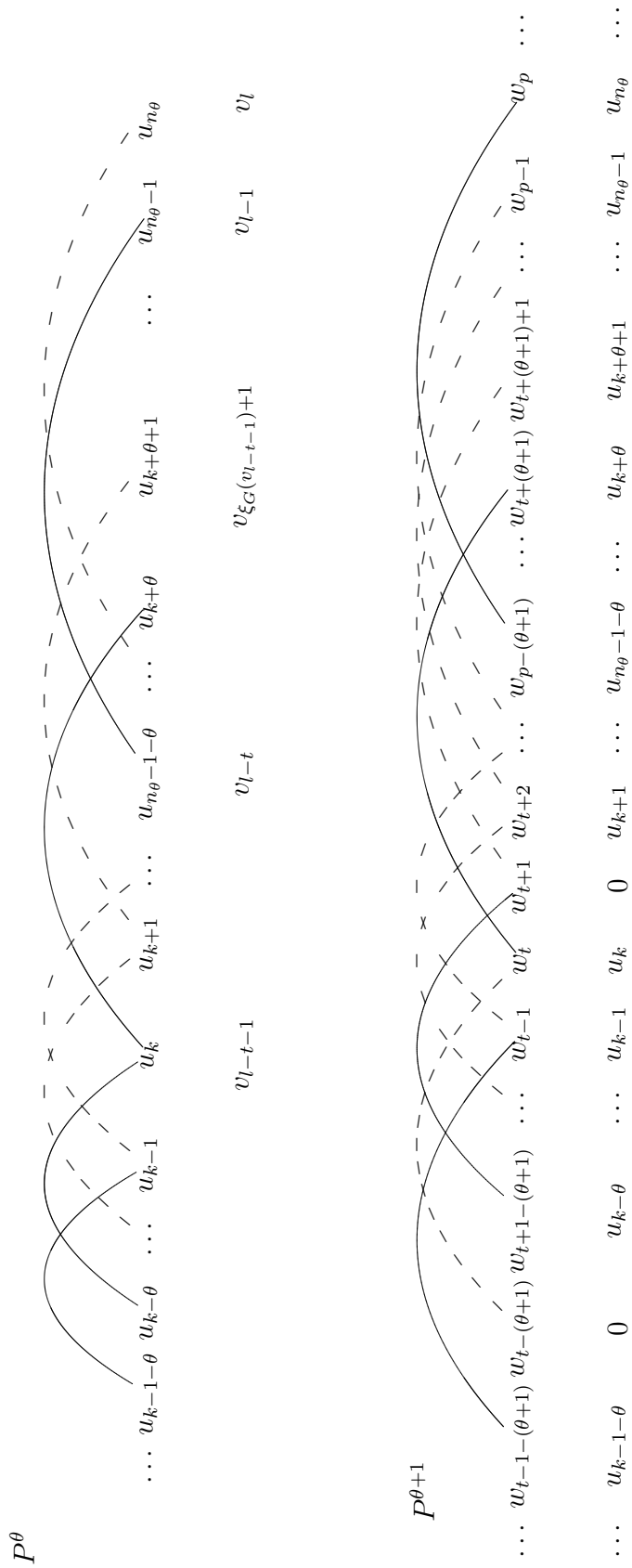


Figura 3.7: Inserção dos últimos vértices de P^θ em $P^{\theta+1}$ pelo procedimento *SHIFT*.

Também no Passo 5, o procedimento insere um vértice a cada $\theta + 1$ vértices contados a partir de u_{s+1} até a última posição de inserção entre o par de vértices u_k e u_{k+1} . Analogamente a argumentação anterior, prova que as adjacências e não-adjacências dos vértices de P^θ de cada “bloco” com θ vértices (entre dois vértices inseridos pelo procedimento *SHIFT*) são preservadas em $P^{\theta+1}$. O último “bloco” é o conjunto de vértices $\{u_{k-\theta}, \dots, u_k\}$. Como $\xi_{P^\theta}(u_{k-\theta}) + 1 = u_{k+1}$, pois $\xi_{P^\theta}(u_{k-\theta}) = u_k$; temos que $k < \xi_{P^\theta}(u_{k-\theta}) + 1 \leq \xi_{P^\theta}(u_i) + 1$, para todo $k - \theta \leq i \leq k$. Por hipótese, $\xi_{P^\theta}(u_i) + 1 - \text{order}_{P^\theta}(u_i) = \theta + 1$ e, pelo argumento anterior, temos que $\xi_{P^{\theta+1}}(u_i) + 1 - \text{order}_{P^{\theta+1}}(u_i) = \theta + 2$, para todo $k - \theta \leq i \leq k$.

Pelos argumentos dos dois parágrafos anteriores, temos que as adjacências e não-adjacências de P^θ nos vértices do conjunto $\{u_1, \dots, u_{k+\theta}\}$ são preservadas em $P^{\theta+1}$. Logo, $G_l[v_1, \dots, v_{\xi_{G_l}(v_{l-t-1})}]$ é subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$.

Finalmente, para completarmos a prova precisamos provar que $G_l[v_{l-t-1}, \dots, v_l]$ é subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$.

Pelo fato de $\text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1}) = k < k + 1 \leq n_\theta - 1 - \theta = \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t})$, temos que o conjunto de vértices $\{u_{k+1}, \dots, u_{n_\theta-2-\theta}\} \subset V(P^\theta) \setminus V(G_l)$, logo, as adjacências e não-adjacências de G_l deste conjunto de vértices em $P^{\theta+1}$ são preservadas.

Para o conjunto $\{u_{n_\theta-1-\theta}, \dots, u_{n_\theta}\}$, sabemos que $\text{order}_{P^\theta}(v_l) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t}) = \theta + 1$, isto é, $\text{order}_{P^\theta}(u_{n_\theta}) - \text{order}_{P^\theta}(u_{n_\theta-1-\theta}) = \theta + 1$; como o procedimento *SHIFT* não insere vértices entre qualquer par de vértices deste conjunto, temos que $\text{order}_{P^{\theta+1}}(u_{n_\theta}) - \text{order}_{P^{\theta+1}}(u_{n_\theta-1-\theta}) = \theta + 1$, e portanto, v_l e v_{l-t} são adjacentes em $P^{\theta+1}$. Para os outros vértices, temos que $\text{order}_{P^\theta}(u_j) - \text{order}_{P^\theta}(u_i) \leq \theta$, para todo $n_\theta - 1 - \theta \leq i < j \leq n_\theta$, e portanto, $\text{order}_{P^{\theta+1}}(u_j) - \text{order}_{P^{\theta+1}}(u_i) \leq \theta$.

Logo, G é subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$.

O procedimento foi obrigado a aumentar θ para $\theta + 1$, por causa da aresta $v_{l-t}v_l \in E(G)$. Este aumento obrigou o procedimento a inserir vértices de $\theta + 1$ em

$\theta + 1$ vértices no conjunto $\{u_s, u_{s+1}, \dots, u_k, u_{k+1}\}$ para que G_l seja subgrafo induzido de $P^{\theta+1}$. Logo, a potência $\theta + 1$ e número de vértices inseridos são mínimos e consequentemente $P^{\theta+1}$ é a menor potência de caminho que contém G_l como subgrafo induzido. ■

Lema 2. *Seja G um grafo de intervalo unitário conexo. O algoritmo CPP gera a menor potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ com relação a θ e a n_θ que contém G como subgrafo induzido segundo a ordem da entrada.*

Demonstração. Seja $v_1 < \dots < v_n$ a ordem de $V(G)$ fornecida na entrada. O algoritmo constrói um sequência de potências de caminhos $P^{\theta_0} \subseteq P^{\theta_1} \subseteq \dots \subseteq P^\theta \subseteq \dots$, onde $\theta_i = \theta_{i-1} + 1$ adicionando sucessivamente os vértices de G em cada P^{θ_i} de forma a preservar as adjacências e não adjacências dos vértices de G e minimizar o θ e o n_θ . Inicialmente, P^{θ_0} recebe a clique maximal que contém v_1 , ou seja, $V(P^{\theta_0}) = \{u_1, \dots, u_{\xi_{P^{\theta_0}}(v_1)}\}$ e $\theta_0 = \xi_G(v_1) - 1$. Está é a menor potência de caminho que contém $G[v_1, \dots, v_{\xi_G(v_1)}]$ como subgrafo induzido.

Considere que os $l - 1$ primeiros vértices em relação a ordenação, isto é $\{v_1, \dots, v_{l-1}\}$, já foram inseridos pelo algoritmo na potência de caminho P^θ , ou seja, P^θ é a menor potência de caminho com relação a θ e a n_θ que contém $G[v_1, \dots, v_{l-1}]$ como subgrafo induzido.

Seja $v_l \in V(G)$ o próximo vértice que o algoritmo vai inserir na potência P^θ . Suponha que v_l é adjacente em P^θ aos t vértices anteriores do conjunto $\{v_1, \dots, v_{l-1}\}$ em G .

Para que v_l seja inserido em P^θ e $G[v_1, \dots, v_l]$ seja subgrafo induzido de P^θ , o vértice v_l tem que ser inserido entre as posições $\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) + 1$ e $\xi_{P^\theta}(v_{l-t})$ em P^θ incluindo-as, ou seja, $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) \geq \theta + 1$ e $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) \leq \theta$.

Consideramos dois casos sobre as adjacências de v_l em G .

Caso 1: Se $t = \theta$, então após a inserção de v_l , $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) \geq \theta + 1$. Para minimizar o θ e o n_θ o algoritmo tem que inserir v_l no vértice consecutivo ao v_{l-1} na potência de caminho P^θ e como consequências $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) \leq \theta + 1$.

Com efeito, se $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) > \theta$, como v_{l-1} é adjacente a v_{l-t} em P^θ (Teorema 2), por hipótese, v_{l-1} foi inserido em P^θ de forma que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_{l-1}) \leq \theta$ e v_l foi inserido no vértice consecutivo a v_{l-1} em P^θ , logo, a afirmação é verdadeira.

Se $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) \leq \theta$, o algoritmo inseriu v_l e não alterou o θ e o número de vértices em P^θ passa a ser $n_\theta + 1$, portanto, esta inserção foi mínima. Se $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$, o algoritmo executa o procedimento *SHIFT* e pelo Lema 1 concluímos a prova.

Caso 2: Se $1 < t < \theta$, o algoritmo tem que inserir v_l em P^θ de modo que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) \geq \theta + 1$ para que estes não sejam adjacentes. Observamos a posição de v_{l-1} em P^θ .

Se v_{l-1} é não-adjacente a v_{l-t-1} em P^θ , para minimizar o número de vértices em P^θ inserimos v_l no vértice consecutivo a v_{l-1} . Por hipótese, o vértice v_{l-1} foi inserido em P^θ de forma que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_{l-1}) \leq \theta$. Então, se $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_{l-1}) < \theta$, temos que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) \leq \theta$, e portanto, v_l foi inserido em P^θ sem alterar o θ e o número de vértices em P^θ passa a ser $n_\theta + 1$, portanto, esta inserção foi mínima; se $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_{l-1}) = \theta$, temos que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) = \theta + 1$. O procedimento *SHIFT* é executado e pelo Lema 1 concluímos a prova.

Se v_{l-1} é adjacente a v_{l-t-1} em P^θ , temos que a posição de v_{l-1} em P^θ está entre $l - t + 1$ e $\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1})$ incluindo-as. Então para minimizar o número de vértices de P^θ inserimos v_l depois de $\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-1})$ vértices além do vértice v_{l-1} em P^θ . Com isso, temos

$$\begin{aligned} d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) &= d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_{l-1}) + (\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-1})) + 1 = \\ &= (\text{order}_{P^\theta}(v_{l-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1})) + (\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-1})) + 1 = \\ &= (\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-t-1})) + 1 = \theta + 1. \end{aligned}$$

Como $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) < d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) = \theta + 1$, temos que $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t}, v_l) \leq \theta$, e portanto, v_l foi inserido em P^θ sem alterar θ e o número de vértices em P^θ passa a ser $n_\theta + (\xi_{P^\theta}(v_{l-t-1}) - \text{order}_{P^\theta}(v_{l-1})) + 1$. Esta inserção foi mínima, pois $d_{P_{n_\theta}}(v_{l-t-1}, v_l) = \theta + 1$. Logo, concluímos a prova do Lema 2. ■

Para mostrarmos que o algoritmo retorna a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido, apresentamos dois resultados sobre uma potência de caminho P^σ qualquer que contém G como subgrafo induzido. Neles mostraremos propriedades sobre a ordenação de $V(G)$ induzida pela *ordenação natural*, onde esta ordenação é gerada pelos índices de uma rotulação natural da potência de caminho.

As provas desses resultados baseiam-se nas demonstrações da Proposição 2.1, e dos Teoremas 2.2 e 3.1. do artigo [3].

Lema 3. *Seja $P_{n_\sigma}^\sigma$ uma potência de caminho que contém G como subgrafo induzido. A ordenação dos vértices de $V(G)$ induzida pela ordenação natural dos vértices de $V(P^\sigma)$ satisfaz a propriedade de ordenação do Teorema 2.*

Demonstração. Argumentação por contra-positiva. Suponha que esta ordenação de $V(G)$ não satisfaz a propriedade de ordenação do Teorema 2. Então, existem três vértices $v_r, v_s, v_t \in V(G)$ tais que $v_r < v_s < v_t$ com $v_r v_s \notin E(G)$ e $v_r v_t \in E(G)$. Segue que $v_r v_t \in E(G) \subset E(P^\sigma)$, portanto, $1 \leq |\text{order}_{P^\sigma}(v_r) - \text{order}_{P^\sigma}(v_t)| \leq \sigma$. Como $v_r < v_s < v_t$ em $V(P^\sigma)$, temos que $|\text{order}_{P^\sigma}(v_r) - \text{order}_{P^\sigma}(v_s)| \leq |\text{order}_P(v_r) - \text{order}_P(v_t)|$, e portanto, $1 \leq |\text{order}_{P^\sigma}(v_r) - \text{order}_{P^\sigma}(v_s)| \leq \sigma$. Logo, por definição, $v_r v_s \in E(P^\sigma)$. Consequentemente, $v_r v_s \notin E(G)$ e $v_r v_s \in E(P^\sigma)$, ou seja, $P_{n_\sigma}^\sigma$ não contém G como subgrafo induzido. ■

O próximo resultado estabelece que podemos trocar as posições de pares de vértices indistinguíveis de $V(G)$ na ordenação natural de $V(P^\sigma)$.

Lema 4. *Sejam $v, \bar{v} \in V(G)$ tais que $N_G[v] = N_G[\bar{v}]$ com $v = u_i$ e $\bar{v} = u_j$ em $V(P^\sigma)$. Se trocarmos as posições de v e \bar{v} em P^σ , isto é, $\bar{v} = u_i$ e $v = u_j$, o grafo G continua sendo subgrafo induzido de P^σ .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponha $i < j$. Pelo Lema 3, temos que a ordenação de $V(G)$ induzida pela ordenação natural de $V(P^\sigma)$ satisfaz a propriedade de ordenação do Teorema 2. Logo, pela propriedade de ordenação dada no Teorema 2, $N_G[v] = \{v_{\eta_G(v)}, \dots, v_{\xi_G(v)}\}$ e $N_G[\bar{v}] = \{v_{\eta_G(\bar{v})}, \dots, v_{\xi_G(\bar{v})}\}$. Portanto, como $N[v] = N[\bar{v}]$, temos que $\xi_G(\bar{v}) = \xi_G(v)$ e $\eta_G(\bar{v}) = \eta_G(v)$.

Logo, temos que $v_{\xi_G(v)} = v_{\xi_G(\bar{v})}$, $v_{\eta_G(v)} = v_{\eta_G(\bar{v})}$, $v_{\xi_G(v)+1} = v_{\xi_G(\bar{v})+1}$ e $v_{\eta_G(v)-1} = v_{\eta_G(\bar{v})-1}$.

Então, trocando as posições dos vértices em P^σ , isto é, $v = u_j$ e $\bar{v} = u_i$, temos $\text{order}_{P^\sigma}(\bar{v}) - \text{order}_{P^\sigma}(v_{\eta_G(\bar{v})-1}) \geq \sigma + 1$, ou seja, a aresta $\bar{v}v_{\eta_G(\bar{v})-1} \notin E(P^\sigma)$ e também para qualquer $v' \in V(G)$ com $\text{order}_G(v') < \text{order}_G(v_{\eta_G(\bar{v})-1})$, a aresta $\bar{v}v' \notin E(P^\sigma)$. Analogamente, temos $\text{order}_{P^\sigma}(v_{\xi_G(v)+1}) - \text{order}_{P^\sigma}(v) \geq \sigma + 1$, ou seja, $vv_{\xi_G(v)+1} \notin E(P^\sigma)$ e também para qualquer $v' \in V(G)$ com $\text{order}_G(v_{\xi_G(v)+1}) < \text{order}_G(v')$, a aresta $vv' \notin E(P^\sigma)$.

De forma semelhante, temos $\sigma \geq \text{order}_{P^\sigma}(\bar{v}) - \text{order}_{P^\sigma}(v_{\eta_G(v)})$, ou seja, a aresta $\bar{v}v_{\eta_G(v)} \in E(P^\sigma)$ e para qualquer $v' \in V(G)$ com $\text{order}_G(v_{\eta_G(v)}) < \text{order}_G(v') < \text{order}_G(\bar{v})$, a aresta $\bar{v}v' \in E(P^\sigma)$; e $\sigma \geq \text{order}_{P^\sigma}(v_{\xi_G(\bar{v})}) - \text{order}_{P^\sigma}(v)$, ou seja, a aresta $vv_{\xi_G(\bar{v})} \in E(P^\sigma)$ e para qualquer $v' \in V(G)$ com $\text{order}_G(v) < \text{order}_G(v') < \text{order}_G(v_{\xi_G(\bar{v})})$, a aresta $vv' \in E(P^\sigma)$. ■

Neste momento possuímos todos os resultados necessários para a demonstração do Teorema 4 que estabelece que a saída do algoritmo *CPP* é a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido.

Teorema 4. *Sejam G grafo de intervalo unitário e P^σ a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido. Se P^θ é a saída do algoritmo *CPP* para uma*

ordenação dos vértices de $V(G)$ dada por [3], então $\theta = \sigma$ e $n_\theta = n_\sigma$.

Demonstração. Sejam $\bar{u}_1 < \dots < \bar{u}_{n_\sigma}$ ordenação natural de $V(P^\sigma)$ e $\bar{v}_1 < \dots < \bar{v}_n$ a ordenação de $V(G)$ induzida pela ordenação natural de $V(P^\sigma)$.

Claramente, $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ é uma rotulação natural de $V(G)$. Portanto, seja I uma família de intervalos para a rotulação natural $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ de $V(G)$, tal que cada $v \in V(G)$ está associado a $(a_v, b_v) \in I$.

Seja z o vértice âncora esquerda com a ordenação de $V(G)$ $z = v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$ dada pelo algoritmo *Recognize* [3]. Se provarmos que $\bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \dots < \bar{v}_n$ é igual a $v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$ a menos de vértices indistinguíveis, teremos que $\theta = \sigma$ e $n_\theta = n_\sigma$.

De fato, como P^σ é a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido, temos que $\sigma \leq \theta$ e $n_\sigma \leq n_\theta$. Por outro lado, já provamos que P^θ a potência de caminho retornada pelo algoritmo *CPP* é a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido segundo a ordem $v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$, portanto, se esta ordenação é igual a $\bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \dots < \bar{v}_n$ a menos de vértices indistinguíveis, temos, pelo Lema 4, P^σ contém G como subgrafo induzido segundo a ordenação $v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$. Então, pela minimalidade de θ e de n_θ segundo a ordenação $v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$, temos que $\sigma \geq \theta$ e $n_\sigma \geq n_\theta$.

Primeiramente, suponha que o vértice âncora esquerda z é igual a \bar{v}_1 . Para esta argumentação considere o símbolo $<$ para ordenação $\bar{v}_1 < \bar{v}_2 < \dots < \bar{v}_n$ e o símbolo $<_B$ para ordenação $v'_1 < v'_2 < \dots < v'_n$.

Suponha, por absurdo, que existam $v, \tilde{v} \in V(G)$, tais que $v < \tilde{v}$, $\tilde{v} <_B v$ e $N_G[v] \neq N_G[\tilde{v}]$. Como $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ é a rotulação natural de $V(G)$ induzido pela rotulação natural de $V(P^\sigma)$ e $v < \tilde{v}$, temos que $a_v \leq a_{\tilde{v}}$. Se $a_v = a_{\tilde{v}}$, como todos os intervalos de I tem o mesmo tamanho, temos $b_v = b_{\tilde{v}}$, e conseqüentemente $N_G[v] = N_G[\tilde{v}]$, contradizendo a hipótese. Se $a_v < a_{\tilde{v}}$, como $\tilde{v} <_B v$, então, pelo Teorema 3, $N_G[v] = N_G[\tilde{v}]$, contradizendo a hipótese. Logo, para todo par de vértices $v, \tilde{v} \in V(G)$, tais que $v < \tilde{v}$, $\tilde{v} <_B v$, então $N_G[v] = N_G[\tilde{v}]$. Conseqüentemente,

temos que $\sigma = \theta$ e $n_\sigma = n_\theta$.

Agora, suponha que o vértice âncora esquerda z é diferente de \bar{v}_1 . Temos que \bar{v}_1 é uma âncora esquerda como z também é, pela Observação 1, $N_G[z] = N_G[\bar{v}_1]$, portanto, pelo Lema 4, podemos trocar as posições destes vértices em $V(P^\sigma)$, ou seja, $\bar{u}_{\text{order}_{P^\sigma}(\bar{v}_1)} = z$ e $\bar{u}_{\text{order}_{P^\sigma}(z)} = \bar{v}_1$, e continuaremos tendo G subgrafo induzido de P^σ . Depois desta troca $z < \bar{v}_2 < \dots < \bar{v}_1 < \dots < \bar{v}_n$ passará a ser a ordenação de $V(G)$ induzida pela ordenação de $V(P^\sigma)$. Então, repetindo o mesmo argumento para o caso em que z é igual a \bar{v}_1 , concluímos a prova. ■

Finalmente, o teorema a seguir apresenta a complexidade do algoritmo *CPP*.

Teorema 5. *Dado um grafo de intervalo unitário G , o Algoritmo CPP constrói a menor potência de caminho que contém G como subgrafo induzido em tempo $O(n^2)$.*

Demonstração. De fato, o algoritmo percorre o conjunto de vértices na ordem $v_1 < \dots < v_n$. No pior caso, o algoritmo executa o procedimento *SHIFT* para cada vértice v_i uma única vez. Como o procedimento *SHIFT* percorre o conjunto de vértices de $V(G)$ uma única vez, concluímos que a complexidade do algoritmo *CPP* é $O(n^2)$. ■

Capítulo 4

Exemplos

Este capítulo apresenta dois exemplos da execução do Algoritmo *CPP*. Ressaltamos que no segundo exemplo o tamanho da maior clique é quatro, (clique $\{v_3, v_4, v_5, v_6\}$), porém o Algoritmo *CPP* retorna uma potência de caminho com $\theta = 5$.

Primeiro exemplo:

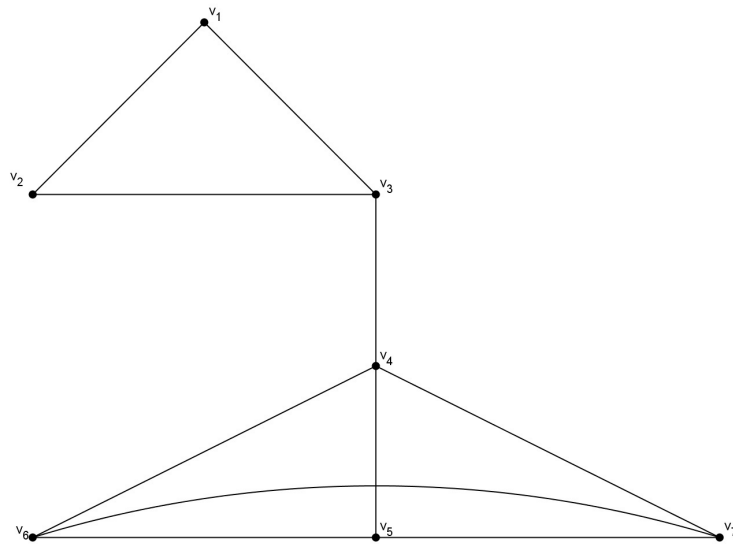


Figura 4.1: Exemplo 1 onde $V(G)$ tem ordenação dada por $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < v_5 < v_6 < v_7$.

Algoritmo:

Step 1: $\theta \leftarrow 3 - 1 = 2$.

Step 2: $P^2 = (u_1, \dots, u_{2(7-1)+1}) = (u_1, \dots, u_{13})$.

Step 3: $u_1 \leftarrow v_1, u_2 \leftarrow v_2, u_3 \leftarrow v_3$.

Step 4: $i \leq 4 - 1 = 3$.

For $i = 1$: $1 \leq j \leq 3 - 3 = 0$. Done.

For $i = 2$: $1 \leq j \leq 4 - 3 = 1$.

For $j = 1$: $u_{2+2+1} = u_5 \leftarrow v_{3+1} = v_4$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{3+1}) - \text{order}_{P^2}(v_{2+1})| = |5 - 3| \not\geq 2.$$

For $i = 3$: $1 \leq j \leq 7 - 4 = 3$.

For $j = 1$: $u_{3+2+1} = u_6 \leftarrow v_{4+1} = v_5$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{4+1}) - \text{order}_{P^2}(v_{3+1})| = |6 - 5| \not\geq 2.$$

For $j = 2$: $u_{3+2+2} = u_7 \leftarrow v_{4+2} = v_6$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{4+2}) - \text{order}_{P^2}(v_{3+1})| = |7 - 5| \not\geq 2.$$

For $j = 3$: $u_{3+2+3} = u_8 \leftarrow v_{4+3} = v_7$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{4+3}) - \text{order}_{P^2}(v_{3+1})| = |8 - 5| > 2.$$

$SHIFT(P^2 [u_1, u_2, \dots, u_{3+2+3}])$.

$$P^2 [u_1, u_2, \dots, u_8] = \begin{cases} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{cases}.$$

Begin[$SHIFT(P^2 [u_1, u_2, \dots, u_8])$]

Step 1: $\theta \leftarrow 2 + 1$.

Step 2: $P^3 = (w_1, \dots, w_{3(7-1)+1}) = (w_1, \dots, w_{19})$.

Step 3: $k = 3, \{t \geq 1 : t \equiv 3 \pmod{3}\}, s = 3$.

Step 4: $1 \leq j \leq 3$.

$$w_1 \leftarrow u_1, w_2 \leftarrow u_2, w_3 \leftarrow u_3.$$

Step 5: $3 + 1 \leq j \leq 3 + 1$.

If $j \equiv (3 + 1) \pmod{3}$

Then $\{4\}$

$$w_{3+2} = w_5 \leftarrow u_4.$$

Else \emptyset

Step 6: $3 + 2 \leq j \leq 8$

$$w_{5+1} = w_6 \leftarrow u_5, w_{6+1} = w_7 \leftarrow u_6, w_{7+1} = w_8 \leftarrow u_7, w_{8+1} = w_9 \leftarrow u_8.$$

Step 7: Return P^3 .

$$P^3 = \begin{Bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} & \dots & w_{22} \\ v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 & 0 & \dots & 0 \end{Bmatrix}.$$

End[SHIFT($P^2[u_1, u_2, \dots, u_8]$)].

Step 5: Return $P^3 = (u_1, \dots, u_9)$.

$$P^3 = \begin{Bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & 0 & 0 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \end{Bmatrix}.$$

Segundo exemplo:

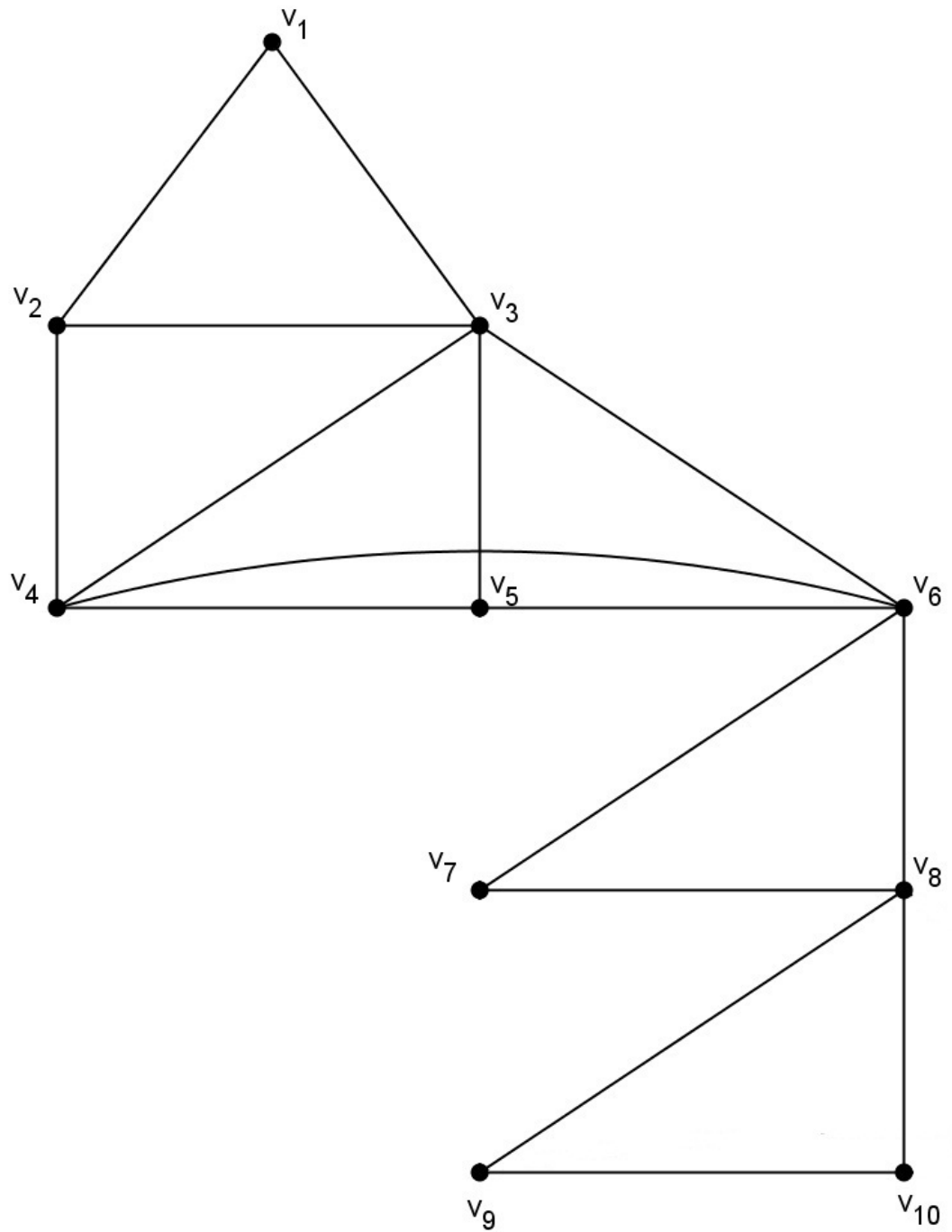


Figura 4.2: Exemplo 2 onde $V(G)$ tem ordenação dada por $v_1 < v_2 < v_3 < v_4 < \dots < v_{10}$.

Algoritmo:

Step 1: $\theta \leftarrow 3 - 1 = 2$.

Step 2: $P^2 = (u_1, \dots, u_{2(10-1)+1}) = (u_1, \dots, u_{19})$.

Step 3: $u_1 \leftarrow v_1, u_2 \leftarrow v_2, u_3 \leftarrow v_3$.

Step 4: $i \leq 8 - 1 = 7$.

For $i = 1$: $1 \leq j \leq 4 - 3 = 1$

For $j = 1$: $u_{1+2+1} = u_4 \leftarrow v_{3+1} = v_4$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{3+1}) - \text{order}_{P^2}(v_{1+1})| = |4 - 2| \not\geq 2.$$

For $i = 2$: $1 \leq j \leq 6 - 4 = 2$

For $j = 1$: $u_{2+2+1} = u_5 \leftarrow v_{4+1} = v_5$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{4+1}) - \text{order}_{P^2}(v_{2+1})| = |5 - 3| \not\geq 2.$$

For $j = 2$: $u_{2+2+2} = u_6 \leftarrow v_{4+2} = v_6$.

$$|\text{order}_{P^2}(v_{4+2}) - \text{order}_{P^2}(v_{2+1})| = |6 - 3| > 2.$$

$SHIFT(P^2 [u_1, u_2, \dots, u_{2+2+2}])$.

Begin[$SHIFT(P^2 [u_1, u_2, \dots, u_6])$]

Step 1: $\theta \leftarrow 2 + 1$.

Step 2: $P^3 = (w_1, \dots, w_{3(10-1)+1}) = (w_1, \dots, w_{28})$.

Step 3: $k = 2, \min\{t \geq 1 : t \equiv 2 \pmod{3}\} = s = 2$.

Step 4: $1 \leq j \leq 2$.

$$w_1 \leftarrow u_1, w_2 \leftarrow u_2.$$

Step 5: $2 + 1 \leq j \leq 2 + 1$.

If $j \equiv (2 + 1) \pmod{3}$

Then $\{3\}$

$$w_{2+2} = w_4 \leftarrow u_3$$

Else \emptyset

Step 6: $2 + 2 \leq j \leq 6$

$$w_{4+1} = w_5 \leftarrow u_4, w_{5+1} = w_6 \leftarrow u_5, w_{6+1} = w_7 \leftarrow u_6.$$

Step 7: Return P^3 .

$$P^3 = \begin{cases} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & \dots & w_{28} \\ v_1 & v_2 & 0 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & 0 & \dots & 0 \end{cases}.$$

End[*SHIFT*($P^2[u_1, u_2, \dots, u_6]$)].

For $i = 3$: $1 \leq j \leq 6 - 6 = 0$. Done.

For $i = 4$: $1 \leq j \leq 6 - 6 = 1$. Done.

For $i = 5$: $1 \leq j \leq 8 - 6 = 1$.

For $j = 1$: $u_{6+3+1} = u_{10} \leftarrow v_{6+1} = v_7$.

$$|\text{order}_{P^3}(v_{6+1}) - \text{order}_{P^3}(v_{5+1})| = |10 - 7| \not\geq 3.$$

For $j = 2$: $u_{6+3+2} = u_{11} \leftarrow v_{6+2} = v_8$.

$$|\text{order}_{P^3}(v_{6+2}) - \text{order}_{P^3}(v_{6+1})| = |11 - 7| > 3.$$

SHIFT($P^3[u_1, u_2, \dots, u_{6+3+2}]$).

$$P^3[u_1, u_2, \dots, u_{14}] = \begin{cases} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} \\ v_1 & v_2 & 0 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & 0 & 0 & v_7 & v_8 \end{cases}.$$

Begin[*SHIFT*($P^3[u_1, u_2, \dots, u_{11}]$)].

Step 1: $\theta \leftarrow 3 + 1$.

Step 2: $P^4 = (w_1, \dots, w_{4(10-1)+1}) = (w_1, \dots, w_{37})$.

Step 3: $k = 6$, $\min\{t \geq 1 : t \equiv 6 \pmod{4}\} = s = 2$.

Step 4: $1 \leq j \leq 2$.

$$w_1 \leftarrow u_1, w_2 \leftarrow u_2.$$

Step 5: $2 + 1 \leq j \leq 6 + 1$.

If $j \equiv (2 + 1) \pmod{4}$

Then $\{3, 7\}$

$$w_{2+2} = w_4 \leftarrow u_3$$

$$w_{7+2} = w_9 \leftarrow u_7$$

Else $\{4, 5, 6\}$

$$w_{4+1} = w_5 \leftarrow u_4$$

$$w_{5+1} = w_6 \leftarrow u_5$$

$$w_{6+1} = w_7 \leftarrow u_6.$$

Step 6: $6 + 2 \leq j \leq 11$

$$w_{9+1} = w_{10} \leftarrow u_8, w_{10+1} = w_{11} \leftarrow u_9, w_{11+1} = w_{12} \leftarrow u_{10},$$

$$w_{12+1} = w_{13} \leftarrow u_{11}.$$

Step 7: Return P^4 .

$$P^4 = \begin{cases} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & \dots & w_{37} \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & v_6 & 0 & 0 & v_7 & v_8 & 0 & \dots & 0 \end{cases}.$$

End[*SHIFT*($P^3[u_1, u_2, \dots, u_6]$)].

For $i = 6$: $1 \leq j \leq 8 - 8 = 1$. Done.

For $i = 7$: $1 \leq j \leq 10 - 8 = 2$.

For $j = 1$: $u_{12+4+1} = u_{17} \leftarrow v_{8+1} = v_9$.

$$|\text{order}_{P^4}(v_{8+1}) - \text{order}_{P^4}(v_{7+1})| = |17 - 13| \not\geq 4.$$

For $j = 2$: $u_{12+4+2} = u_{18} \leftarrow v_{8+2} = v_{10}$.

$$|\text{order}_{P^4}(v_{8+2}) - \text{order}_{P^4}(v_{7+1})| = |18 - 13| > 4.$$

$$\text{SHIFT}(P^4[u_1, u_2, \dots, u_{12+4+2}]).$$

$$P^4 [u_1, u_2, \dots, u_{18}] = \begin{cases} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 & u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18} \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & v_6 & 0 & 0 & v_7 & v_8 & 0 & 0 & 0 & v_9 & v_{10} \end{cases}.$$

Begin[*SHIFT*($P^4 [u_1, u_2, \dots, u_{18}]$)]

Step 1: $\theta \leftarrow 4 + 1$.

Step 2: $P^5 = (w_1, \dots, w_{5(10-1)+1}) = (w_1, \dots, w_{46})$.

Step 3: $k = 12$, $\min\{t \geq 1 : t \equiv 12 \pmod{5}\} = s = 2$.

Step 4: $1 \leq j \leq 1$.

$$w_1 \leftarrow u_1, w_2 \leftarrow u_2.$$

Step 5: $1 + 1 \leq j \leq 9 + 1$.

If $j \equiv (2 + 1) \pmod{5}$

Then $\{3, 8, 13\}$

$$w_{2+2} = w_4 \leftarrow u_3$$

$$w_{8+2} = w_{10} \leftarrow u_8$$

$$w_{14+2} = w_{16} \leftarrow u_{13}.$$

Else $\{4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12\}$

$$w_{4+1} = w_5 \leftarrow u_4$$

$$w_{5+1} = w_6 \leftarrow u_5$$

$$w_{6+1} = w_7 \leftarrow u_6$$

$$w_{7+1} = w_8 \leftarrow u_7$$

$$w_{10+1} = w_{11} \leftarrow u_9$$

$$w_{11+1} = w_{12} \leftarrow u_{10}$$

$$w_{12+1} = w_{13} \leftarrow u_{11}$$

$$w_{13+1} = w_{14} \leftarrow u_{12}.$$

Step 6: $9 + 2 \leq j \leq 14$

$$w_{16+1} = w_{17} \leftarrow u_{14}, w_{17+1} = w_{18} \leftarrow u_{15}, w_{18+1} = w_{19} \leftarrow u_{16},$$

$$w_{19+1} = w_{20} \leftarrow u_{17}, w_{20+1} = w_{21} \leftarrow u_{18}.$$

Step 7: Return P^5 .

$$P^5 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 & w_4 & w_5 & w_6 & w_7 & w_8 & w_9 & w_{10} & w_{11} & w_{12} & w_{13} & w_{14} & w_{15} & w_{16} & w_{17} & w_{18} & w_{19} & w_{20} & w_{21} & \dots & w_{46} \\ v_1 & v_2 & 0 & 0 & 0 & v_3 & v_4 & v_5 & 0 & 0 & v_6 & 0 & 0 & v_7 & 0 & v_8 & 0 & 0 & 0 & v_9 & v_{10} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

End[*SHIFT*($P^4[u_1, u_2, \dots, u_{18}]$)].

Step 5: Return $P^5 = (u_1, u_2, \dots, u_{21})$.

$$P^5 = \{ v_1 \ v_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ 0 \ 0 \ v_6 \ 0 \ 0 \ v_7 \ 0 \ v_8 \ 0 \ 0 \ 0 \ v_9 \ v_{10} \ .$$

Capítulo 5

Conclusões

Nesta tese desenvolvemos um algoritmo que gera, a partir de um grafo de intervalo unitário G e uma ordenação de $V(G)$ dada por [3], a menor potência de caminho $P_{n_\theta}^\theta$ em relação a θ e n_θ , que contém G como subgrafo induzido.

A complexidade deste algoritmo é $\mathcal{O}(n^2)$, onde n é o número de vértices do grafo de intervalo unitário da entrada.

Este algoritmo responde ao problema central (Questão 3) de forma positiva quando G é um grafo de intervalo unitário, ou seja, existem duas potências de caminhos cuja interseção contém G como subgrafo induzido.

Como proposta de trabalho futuro, pretendemos estudar outras classes de grafos pois, por exemplo, quando o grafo G é um C_4 , temos as duas potências de caminhos apresentadas na Figura 5.1.

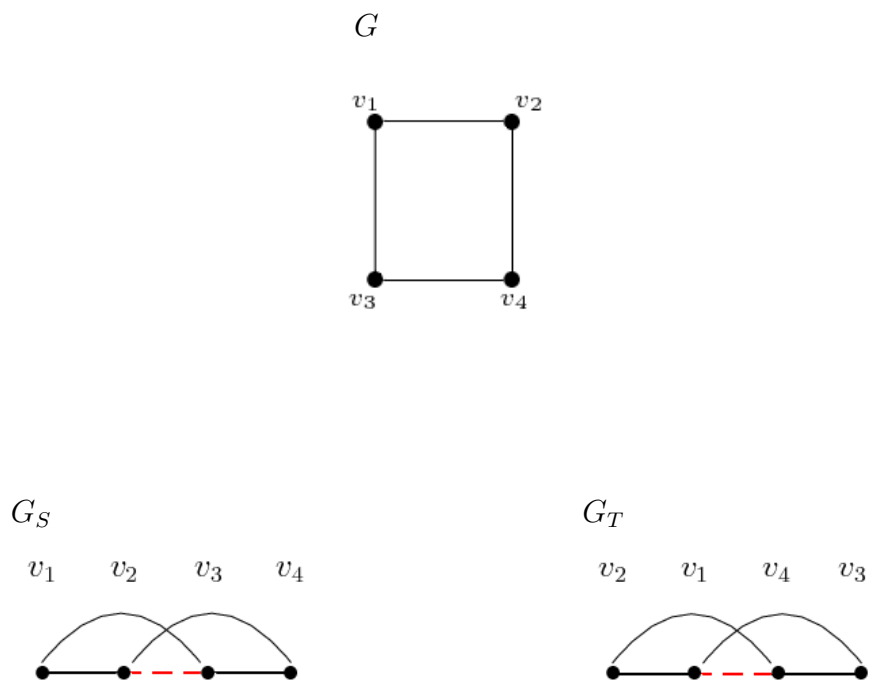


Figura 5.1: Grafo G igual a C_4 e suas respectivas potências de caminhos.

Referências Bibliográficas

- [1] SANKOFF, D., XU, X., “Tests for gene clusters satisfying the generalized criterion”. In: *Lecture Notes in Computer Science*, v. 5167, pp. 152–160, Springer, 2008.
- [2] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory*. v. 244. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2008.
- [3] CORNEIL, D. G., KIM, H., NATARAJAN, S., et al., “Simple linear time recognition of unit interval graphs”, *Information Processing Letters*, v. 55, pp. 99–104, 1995.
- [4] ROBERTS, F. S., “Representations of indifference relations”, 1968, Ph. D. Thesis.
- [5] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R., et al., *Introduction to Algorithms, 2nd edition*. MIT Press & McGraw-Hill, 2001.
- [6] LIN, M. C., RAUTENBACH, D., SZWARCFITER, J. L., et al., “Power of cycles, power of paths, distance graph”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 35, pp. 257–262, 2009, DOI: 10.1016/j.dam.2010.03.012.
- [7] DE FIGUEIREDO, C. M. H., MEIDANIS, J., MELLO, C. P., “A linear-time algorithm for proper interval graph recognition”, *Information Processing Letters*, v. 56, pp. 179–184, 1995.