Universidade Federal Fluminense

O Teorema de Torelli

Manoel da Silva Oliveira

Niterói

Outubro de 2020

O Teorema de Torelli

Manoel da Silva Oliveira

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^{a}. Juliana Coelho

Niterói

Outubro de 2020

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

O48t Oliveira, Manoel da Silva
O Teorema de Torelli / Manoel da Silva Oliveira ; Juliana Coelho, orientadora. Niterói, 2020.
28 f.

Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

DOI: http://dx.doi.org/10.22409/PPGMAT.2020.m.09519748741

1. Geometria Algébrica. 2. Produção intelectual.I. Coelho, Juliana, orientadora. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD -

Bibliotecário responsável: Sandra Lopes Coelho - CRB7/3389

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

Manoel da Silva Oliveira

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requesito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Título da tese: O Teorema de Torelli

Título da tese: O Teorema de Torelli

Defendida publicamente em 09 de Outubro de 2020.

Diante da banca examinadora composta por:

Juliana Coelho Chaves	UFF	Orientadora
Abramo Hefez	UFF	Examinador
Thiago Fassarella do Amaral	UFF	Examinador
Frederico Sercio Feitosa	UFJF	Examinador
Luca Scala	UFRJ	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DA ORIENTADORA

Autor da Dissertação: Manoel da Silva Oliveira
Data da defesa: 09/10/2020
Orientadora: Juliana Coelho

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, 08/01/2021.

Juliana Coelho Chaves

Agradecimentos

Sou muitíssimo grato pelo apoio que minha família pode me dar. Sou muitíssimo grato aos meus amigos André, Márcia, Alessandro, Otávio e Edgar.

Agradeço de coração a Professora *Juliana Coelho*, por ser uma orientadora tão Especial – eu sempre estava feliz sendo seu orientando.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

O Teorema de Torelli afirma que toda curva suave S de gênero g pode ser recuperada através da Jacobiana $J(S)$, juntamente com seu divisor Θ. A proposta dessa dissertação é estudar a demonstração desse Teorema, dada pelo matemático Aldo Andreotti, que baseia-se no estudo do lugar de branch do mapa de Gauss. A idéia principal é recuperar a curva como dual do lugar de branch do mapa de Gauss.

Palavras-chaves: Geometria Algébrica, Superfícies de Riemann, Jacobianas, divisor Theta, polarização, lugar de branch.

Abstract

Torelli's theorem states that every S smooth curve of genus g can be recovered through Jacobiana $J(S)$, together with its divisor $Theta$. The purpose of this dissertation is to study the proof of this Theorem, given by the mathematician Aldo Andreotti, which is based on the study of the locus of branch of the Gauss map. The main idea is to recover the curve as a dual from the branch location on the Gauss map.

Keywords: Algebraic Geometry, Riemann Surfaces, Jacobian, Theta divisor, polarization, branch locus.

Sumário

TEOREMA DE TORELLI

1. Introdução

Em 1957, André Weil[1] apresentou um seminário Boubarki −intitulado *Sur le théorème de Torelli*− sobre um resultado, devido a Torelli[2], no qual havia feito recentes progressos. O resultado dizia que era possível recuperar a superfície de Riemann da sua Jacobiana polarizada: Teorema de Torelli −assim ficaria conhecido.

O Teorema de Torelli diz que as características de uma superfície de Riemann compacta podem ser observadas a partir da sua Jacobiana. Sendo assim, um ponto que torna o teorema interessante é o fato de que a Jacobiana da superfície −embora seja uma variedade complexa de dimensão superior à dimensão da superfície de Riemann− é, em princípio, mais simples que a superfície, devido ao seu caráter linear. Como colocado por Weil, no seminário Bourbaki que proferiu em 1957 e publicado por ele num artigo, nesse mesmo ano (veja [39], páginas 307-327), o Teorema de Torelli assumiu a seguinte forma, moderna e abstrata:

Duas curvas suaves X e X' são birracionalmente equivalentes se (e somente se) existir um isomorfismo da variedade Jacobiana $J(X)$, de X, na variedade Jacobiana $J(X')$, de X', que transporta a polarização canônica de $J(X)$ na polarização canônica de $J(X')$.

No ano seguinte, no clássico artigo "On a Theorem of Torelli", Aldo Andreotti[3]

[1]André Weil, nascido em 6 de maio de 1906, Paris, França, matemático que foi uma das figuras mais influentes da matemática durante o século XX, particularmente em teoria dos números e geometria algébrica. A partir de meados da década de 1930, como um dos membros fundadores de um grupo de matemáticos franceses escrevendo sob o pseudônimo coletivo Nicolas Bourbaki, Weil trabalhou e inspirou outros no esforço de alcançar o programa de David Hilbert de unificar toda a matemática em uma base axiomática rigorosa e direcionado à solução de problemas significativos. Weil e Jean Dieudonné foram os principais responsáveis pelo interesse de Bourbaki na história da matemática.

[2]Ruggiero Torelli nasceu em Nápoles, Itália, em 7 de junho de 1884; filho de uma professora de cálculo infinitesimal. Torelli começou seus estudos universitários em Palermo, dando sequência em Pisa, na Escola Normal Superior de Pisa. Formado, foi logo atraído pelas difíceis pesquisas em geometria algébrica do alvorecer do século 20.

[3]Aldo Andreotti nasceu em 15 de março de 1924, em Florença, Itália. Após o ensino secundário, Andreotti ingressou na Scuola Normale Superiore em Pisa em outubro de 1942. No entanto, depois que as divisões do exército alemão entraram na Itália em 1943, Andreotti fugiu para a Suíça, pois todos os homens italianos com mais de 18 anos arriscavam ser deportados pelos alemães para campos de trabalho, dos quais muitos não retornavam. Ele foi para Lausanne, às margens do lago Genebra, e frequentou cursos na universidade de lá, em particular participando das palestras de Georges de Rham e de Breno Eckmann. Andreotti conseguiu retornar à Itália após o final da Segunda Guerra Mundial e concluiu seu doutorado em Pisa em 1947 com uma tese sobre representações conformes. Em 1950, Andreotti foi para Princeton, nos Estados Unidos, onde passou vários meses. Este foi um período importante para Andreotti, que entrou em contato com matemáticos importantes, como Kunihiko Kodaira, Solomon Lefschetz, Carl Ludwig Siegel, Donald Spencer, André Weil e Oscar Zariski. Em Princeton, Andreotti ampliou bastante seu conhecimento matemático, pois aprendeu sobre os últimos desenvolvimentos em álgebra, topologia geral, topologia algébrica e outras áreas que na época não estavam sendo estudadas na Itália. Ele retornou à Itália, participou do concurso nacional para a seleção de um professor de geometria na Universidade de Turim e foi entrevistado em novembro de 1951. Beniamino Segre foi um dos

apresenta uma prova para o Teorema de Torelli. Nesse artigo encontra-se parte da visão de Andreotti, naquela altura, sobre a geometria de curvas algébricas. Visão esta que ajudou a definir, para os anos seguintes, o tom sobre o estudo da teoria das curvas algébricas. Esta prova clássica do Teorema de Torelli, dada por Andreotti em [1], baseia-se no estudo do lugar de branch do mapa de Gauss. A idéia principal é recuperar a curva como dual do lugar de branch do mapa de Gauss − mapa este que, como veremos, comporá um recobrimento ramificado de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$, cujo número de folhas dependerá de como se caracteriza a superfície Riemann enquanto curva em $\mathbb{P}^{g-1}$.

O Teorema de Torelli e sua prova são importantes por várias razões, dentre as quais gostaríamos de citar três. Em primeiro lugar, este é um teorema de rigidez: diz que um isomorfismo entre variedades Jacobianas, associadas a curvas algébricas, é sempre induzido por um isomorfismo entre as curvas. Em segundo, foi o primeiro teorema importante da teoria de moduli de curvas algébricas; revela a idéia básica da teoria de moduli. Um terceiro ponto é que este teorema está na linhagem direta de vários trabalhos de Riemann. Que vão desde fatos, digamos, mais comumente conhecidos: por exemplo o fato de que qualquer superfície de Riemann compacta é isomorfa a uma curva algébrica projetiva suave. Passa por assuntos já um pouco mais técnicos, como é o caso do Teorema de Abel e o Teorema de Riemann-Roch −que se origina num artigo de Riemann sobre as funções abelianas. E chega em assuntos já bem mais específicos, como o Teorema de Riemann.

2. Recobrimentos Ramificados e Lugar de Branch

Um morfismo étale é, na geometria algébrica, o análogo a um isomorfismo local na geometria de variedades diferenciáveis. Já em análise complexa, o morfismo étale está em analogia com o recobrimento não-ramificado de uma superfície de Riemann. E, por último, poderíamos dizer, põe-se em analogia na teoria algébrica dos números com as extensões não-ramificadas. Na categoria das variedades algébricas, sob certas condições, é possível caracterizar os morfismos étale exatamente como na categoria das variedades diferenciáveis. Para esquemas arbitrários, no entanto, apenas a álgebra comutativa estrutura a definição de morfismo étale. Contudo, mesmo na categoria dos esquemas há maneiras pouco intrínsecas de se definir morfismo étale. Aqui, tão tanto quanto possível, trabalharemos com a definição que envolve apenas os anéis locais de uma variedade. Acreditamos ser esse o caminho que mais viabilizará nosso objetivo de definir o lugar de branch de um morfismo de variedades.

Convém poder falar de subconjuntos abertos de variedades projetivas, como variedades em si. Assim, aumentamos um pouco nossa categoria.

Definição 2.1. *Um conjunto algébrico quase projetivo é um subconjunto aberto de um conjunto algébrico projetivo. Uma variedade quase projetiva é um conjunto algébrico quase projetivo irredutível.*

Assim, as variedades afins e projetivas são quase projetivas. E entenderemos por uma variedade X como sendo uma variedade quase projetiva. Para um ponto $x \in X$, $\mathcal{O}_{X,x}$ denotará o anel local de X em x, $\mathfrak{m}_x$ denotará seu ideal maximal e $k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$ seu corpo residual.

---

juízes no comitê de seleção que escolheu Andreotti que, dentro de algumas semanas, mudou-se para Turim. Ele rapidamente causou um impacto substancial no ensino de matemática.

Também é importante esclarecer que $\mathbb{C}$ é o corpo de base com o qual aqui trabalharemos.

Da álgebra comutativa, a partir de uma A-álgebra B $-$um anel B e um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B-$, dado um A-módulo M, o produto tensorial $B \otimes_A M$ pode ser visto como um B-módulo (veja [3], página 28). Com isso temos um funtor F da categoria dos A-módulos para a categoria dos B-módulos.

$$\begin{array}{ccc} \{\text{categoria de } A\text{–módulos}\} = \mathcal{C} & & M \\ {\scriptstyle F}\Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ \{\text{categoria de } B\text{–módulos}\} = \mathcal{D} & & B \otimes_A M \end{array}$$

E diz-se que um homomorfismo de anéis $f : A \longrightarrow B$ é plano se o funtor F é exato. O que significa que se $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ é uma sequência exata de A-módulos, então também é exata a sequência de B-módulos $0 \longrightarrow B \otimes_A M' \longrightarrow B \otimes_A M \longrightarrow B \otimes_A M'' \longrightarrow 0$.

Definição 2.2. *Um morfismo de variedades $\varphi : X \longrightarrow Y$ será dito plano em um ponto $x \in X$ se o homomorfismo de anéis locais $\varphi^* : \mathcal{O}_{Y,\varphi(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ for plano.*

Definição 2.3. *Um morfismo de variedades $\varphi : X \longrightarrow Y$ será dito não ramificado em um ponto $x \in X$ se $\mathfrak{m}_{\varphi(x)}\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ e $k(x)/k(\varphi(x))$ é uma extensão finita e separável.*

Definição 2.4. *Um morfismo de variedades $\varphi : X \longrightarrow Y$ será dito étale em um ponto $x \in X$ se for plano e não ramificado em x.*

Diremos que um morfismo de variedades $f : X \longrightarrow Y$ é plano (resp. não ramificado, étale) se é plano (resp. não ramificado, étale) em cada ponto $x \in X$.

Pode acontecer que um morfismo quase finito $f : X \longrightarrow Y$ seja étale sobre um subconjunto aberto $f^{-1}(U) \subset X$, para U um conjunto aberto e denso de Y, mas não necessariamente em todo X $-$e neste caso dizemos que f é genericamente étale. Esta propriedade está presente no morfismo de Gauss, que aqui estudaremos. Pelo "Criterion for Flatness", (veja [33], página 245), deduz-se que em todo morfismo f quase finito e dominante de variedades regulares, os pontos em que f não é étale são exatamente os pontos onde f se ramifica. Em particular, morfismos dominantes não ramificados entre variedades regulares da mesma dimensão são étales.

Proposição 2.5. *Se $f : X \longrightarrow Y$ é um morfismo de variedades, então o conjunto de pontos $x \in X$ para os quais f é étale é um aberto em X. Portanto, existe um maior conjunto aberto U em X no qual f é étale.*

Proof. Veja [26], Proposição 3.8, página 24. □

Definição 2.6. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo dominante e quase finito de variedades regulares. Considere a maior subvariedade aberta U de X tal que $f|_U : U \longrightarrow Y$ é étale. O conjunto $X \setminus U$, que é portanto um fechado em X, será chamado lugar de ramificação do morfismo f. E, ao subconjunto $B_f := f(X \setminus U)$ de Y chamaremos lugar de branch do morfismo f.*

Proposição 2.7. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um mapa racional dominante. Então existe um aberto $U \subset Y$, tal que*

$$\#f^{-1}(y) = [\mathbb{C}(X) : f^*(\mathbb{C}(Y))], \forall y \in U.$$

Esse número é chamado grau do mapa f, escrevemos deg$(f) = [\mathbb{C}(X) : f^*(\mathbb{C}(Y))]$.

Proof. Veja [30], Proposição 3.17, página 46. □

Definição 2.8. *Um morfismo $f : X \longrightarrow Y$ será dito um revestimento étale de Y se f for finito e étale.*

Proposição 2.9. *Seja $f : X \longrightarrow Y$ um morfismo quase finito e separável. Suponha que Y é normal e irredutível e que toda componente de X domina Y. Então o número de pré-imagens de y em X é menor ou igual a deg(f) para todo ponto $y \in Y$. Ademais, a igualdade ocorre se, e somente se, existe uma vizinhança aberta U de y de modo que $f|_{f^{-1}(U)} : f^{-1}(U) \longrightarrow U$ seja um revestimento étale de U.*

Proof. Veja [12], Teorema 10.11, página 20. □

3. Divisores e Sistemas Lineares

Seja X uma variedade quase projetiva normal. Um divisor primo em X é uma subvariedade irredutível $E \subset X$ de codimensão 1. O conjunto dos divisores primos em X será indicado por $\mathrm{PD}(X)$. Um divisor de Weil em X (que aqui chamaremos apenas de divisor em X) é uma combinação linear formal

$$D = \sum_{E \in \mathrm{PD}(X)} n_E \cdot E$$

com coeficientes $n_E \in \mathbb{Z}$, onde a soma deve ser localmente finita no seguinte sentido: cada $x \in X$ possui uma vizinhança aberta $U \subset X$ tal que $n_E = 0$ para quase todo $E \in \mathrm{PD}(X)$ satisfazendo $E \cap U \neq \emptyset$. Então,

$$\mathrm{Supp} D := \bigcup_{E \in \mathrm{PD}(X), n_E \neq 0} E$$

é um subconjunto fechado em X, chamado suporte do divisor D. O conjunto dos divisores em X é naturalmente um grupo aditivo, denotado por $\mathrm{Div}(X)$. Para um divisor $D = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i$ numa curva projetiva suave X, define-se o grau do divisor D por

$$deg(D) = \sum_{i=1}^{r} a_i.$$

Suponha que D_1, D_2 são divisores em X. Diremos que $D_1 \geq D_2$ se $D_1 - D_2 = \sum a_i \cdot E_i$, onde todos os a_i são não negativos. Um divisor D tal que $D \geq 0$ será chamado divisor efetivo.

Suponhamos agora que E seja um divisor primo de X. Associamos a E o anel local $\mathcal{O}_{X,E}$; anel local das funções regulares numa vizinhança de algum ponto de E. Se a variedade X é normal, mostra-se (veja [8], Sessão 13.1, página 240) que $\mathcal{O}_{X,E}$ é um anel de valorização discreta. Então, se $0 \neq f \in \mathcal{O}_{X,E}$, podemos escrever de modo único $f = t^n u$, onde $u \in \mathcal{O}_{X,E}$ é uma unidade, $n \in \mathbb{Z}$ e t é o gerador do ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,E}$. Isso segue valendo para $0 \neq f \in k(X)$, pois todo elemento de $k(X)$ é um quociente de elementos de $\mathcal{O}_{X,E}$. Desse modo fica bem definido o mapa

$$\nu_E : k(X) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dado por $\nu_E(f) = n$ se $f = t^n u$, onde u é uma unidade em $\mathcal{O}_{X,E}$. Convencionando que $\nu_E(0) = \infty$, temos que ν_E é uma função ordem[4] no corpo $k(X)$.

Lema 3.1. *Suponha que X é uma variedade quase projetiva e normal e seja $0 \neq f \in k(X)$. Então há no máximo um número finito de divisores primos E em X tal que $\nu_E(f) \neq 0$.*

Proof. Veja [8], Lema 13.1, página 241. □

Podemos assim definir o divisor de uma função $0 \neq f \in k(X)$ −para X uma variedade quase projetiva e normal− por

$$(f) = \sum_{E \in \mathrm{PD}(X)} \nu_E(f) \cdot E \quad \in Div(X).$$

Com essa definição se estabelece em $\mathrm{Div}(X)$ uma prolífera relação de equivalência $\sim$, chamada equivalência linear: $D_1 \sim D_2$ se existe $0 \neq f \in k(X)$ tal que $(f) = D_1 - D_2$.

Seja $D \in \mathrm{Div}(X)$. O conjunto das funções racionais

$$L(D) := \{f \in k(X) \mid f = 0 \text{ ou } (f) + D \geq 0\},$$

é um espaço vetorial. Com efeito, se $D = \sum_{E \in \mathrm{PD}(X)} n_E \cdot E$, então $f \in L(D)$ se, e somente se $\nu_E(f) \geq -n_E$. Além disso, para $f, g \in L(D)$ e $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, temos que

$$\nu_E(\lambda f) = \nu_E(f) \quad e \ \nu_E(f + g) \geq \min\{\nu_E(f), \nu_E(g)\} \geq -n_E,$$

o que mostra que $\lambda f, f + g \in L(D)$. A dimensão de $L(D)$ como $\mathbb{C}-$espaço vetorial é denotada por $\ell(D)$.

Teorema 3.2. *Se D é um divisor numa variedade projetiva, então $\ell(D) =$dim $L(D)$ é finita.*

Proof. Veja [16], Corolário A.3.2.7, página 55. □

Se $|D|$ é o conjunto de todos os divisores efetivos linearmente equivalentes a D;

$$|D| := \{\, E \in \mathrm{Div}(X) \mid E \geq 0,\, E \sim D \,\},$$

a proposição a seguir diz que $|D|$ tem a estrutura de um espaço projetivo sobre $\mathbb{C}$.

Proposição 3.3. $|D| \cong \mathbb{P}(L(D))$.

Proof. Seja $E \in |D|$. Como $E \sim D$, existe uma função racional f em X tal que $E = D + (f)$. Além disso, $D + (f) = E \geq 0$, então $f \in L(D)$. Defina daí o mapa $|D| \longrightarrow \mathbb{P}(L(D))$, por $E \longmapsto [f]$, onde $[f] = \{\lambda f \in \mathbb{P}(L(D)) \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. A inversa é dada naturalmente pela aplicação $[f] \longmapsto D + (f)$. Como $(\lambda f) = (f)$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, este último mapa é bem definido. □

Definição 3.4. *O conjunto $|D|$, junto com a estrutura de variedade projetiva, é chamado sistema linear completo de divisores em X.*

Um sistema linear em X é um subconjunto $\Lambda \subset |D|$ que é um subespaço linear projetivo de $|D|$ quando este é visto como uma variedade projetiva.

[4]Uma função ordem num corpo K é uma função $\varphi : K \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, satisfazendo:
1) $\varphi(a) = \infty$ se, e somente se, $a = 0$.
2) $\varphi(ab) = \varphi(a) + \varphi(b)$.
3) $\varphi(a + b) \geq \min\{\varphi(a), \varphi(b)\}$.

Definição 3.5. *Seja $D \in Div(X)$ um divisor com $\ell(D) \geq 1$. Considere $f_1, ..., f_{\ell(D)}$ uma base de $L(D)$ e defina o mapa racional*

$$\begin{array}{rccc} \phi_D : & X & \dashrightarrow & \mathbb{P}^{\ell(D)-1} \\ & p & \longmapsto & (f_1(p) : \cdots : f_{\ell(D)}(p)). \end{array}$$

Definição 3.6. *Um divisor $D \in Div(X)$ é muito amplo se o mapa $\phi_D : X \longrightarrow \mathbb{P}^{\ell(D)-1}$ é um mergulho. Um divisor $D \in Div(X)$ é amplo se algum múltiplo nD, com $n \geq 1$, é muito amplo.*

Definição 3.7. *Um ponto $p \in X$ é chamado de ponto base de um sistema linear Λ se $p \in Supp\ D$ para todo $D \in \Lambda$. O conjunto B_Λ de todos os pontos base de Λ é chamado lugar de base de Λ;*

$$B_\Lambda = \bigcap_{D \in \Lambda} Supp D.$$

Se $B_\Lambda = \emptyset$, será dito que o sistema linear Λ é livre de pontos de base.

Seja $\Lambda = \mathbb{P}^r$ um sistema linear de divisores em X. Diz-se que um *membro geral* de Λ satisfaz uma propriedade Q se existe um subconjunto aberto denso $U \subset \mathbb{P}^r$ de modo que todos os divisores correspondentes aos pontos de U satisfazem Q.

Teorema 3.8. (*Teorema de Bertini*) *Sejam X uma variedade suave quase projetiva e Λ um sistema linear em X. Então, um membro geral de Λ é suave fora do lugar de base B_Λ.*

Proof. Veja [13], Teorema 17.16, página 216. □

Exemplo 3.1. Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma curva projetiva suave. Suponha que X não está contida em nenhum hiperplano de $\mathbb{P}^n$. Seja H um hiperplano em $\mathbb{P}^n$, ou seja, H dado por uma equação linear homogênea $F = 0$, onde $F(x) = \sum_{i=0}^n a_i x_i = 0$. Queremos definir o chamado *divisor hiperplano* $\text{div}_X(H)$ em X, que registra os pontos onde F se anula em X, e que se caracterizará pelas multiplicidades com que H intersecta X nesses pontos. Sendo assim, define-se o divisor

$$\text{div}_X(H) := \sum_{p \in X \cap H} \nu_p(F/G) \cdot p,$$

onde $G(x) = x_i$ é uma coordenada que não é zero em p. Nesse caso, F/G é uma função meromorfa em X, que se anula em p. Esta definição não depende da escolha do polinômio homogêneo não nulo G. De fato, se usássemos outro polinômio G' de mesmo grau que F e, que assim como G, não se anula no ponto fixado $p \in X$, onde F se anula, então temos a função meromorfa

$$\frac{F}{G} = \frac{F}{G}\frac{G}{G'},$$

com $\frac{G}{G'}(p) \neq 0$. Com isso, $\nu_p(\frac{F}{G}) = \nu_p(\frac{F}{G}\frac{G}{G'}) = \nu_p(\frac{F}{G'})$. Portanto, $\text{div}_X(H)$ é determinado apenas por F, e o divisor $\text{div}_X(H)$ é, portanto, bem definido. Além disso, como $\frac{F}{G}(p) = 0$, então $\nu_p(\frac{F}{G}) > 0$. Logo, $\text{div}_X(H)$ é um divisor efetivo. Vale também observar que *Supp* $\text{div}_X(H) \subset X \cap H$. E considerando o conjunto

$$\Lambda = \{\text{div}_X(H) \mid H \subset \mathbb{P}^n \text{ hiperplano}\},$$

observa-se que trata-se de um sistema linear livre de pontos de base. Com efeito, sejam H_1 e H_2 dois hiperplanos em $\mathbb{P}^n$ dados pelas equações lineares homogêneas $F_1 = 0$ e $F_2 = 0$, respectivamente. Seja dado um ponto $p \in X$, onde F_1 e F_2 se anulam. Escolha um polinômio homogêneo $G(x) = x_i$ com mesmo grau de F_1 e F_2 e que não se anula em p. Como $f = (F_1/F_2) = (F_1/G)/(F_2/G)$, então $\nu_p(f) = \nu_p(F_1/G) - \nu_p(F_2/G)$. Portanto, $(f) = \mathrm{div}_X(H_1) - \mathrm{div}_X(H_2)$, onde $f \in k(X)$. Assim, além dos elementos de Λ serem divisores efetivos, são também linearmente equivalentes. Claramente Λ é livre de ponto base, pois para qualquer $q \in X$, existe um hiperplano $H \subset \mathbb{P}^n$ que não contém q.

De quando em vez é mais interessante olhar o divisor hiperplano como o conjunto de todos os zeros (contados com multiplicidade) da função meromorfa $\frac{F}{L}|_X$ em X, onde F, ainda como no início, é o polinômio homogêneo linear que define o hiperplano H e L é um polinômio homogêneo linear tal que

$$\{L = 0\} \cap X \cap \{F = 0\} = \emptyset.$$

De forma análoga ao que foi feito para mostrar que o divisor hiperplano está bem definido, faz-se para ver que a definição de seção de hiperplano não depende de L e é, portanto, bem definida. Nesse caso o divisor hiperplano recebe o nome de *seção de hiperplano* de X e é denotado por $H \cdot X$. Intuitivamente $H \cdot X = X \cap \{F = 0\}$. Esses dois objetos, divisor hiperplano e seção de hiperplano, são essencialmente o mesmo objeto, diferem apenas à maneira como são observados na conveniência do contexto.

4. Curvas Hiperelípticas e o Mapa Canônico

Começaremos identificando superfícies que são espaços de recobrimento, ramificados e de duas folhas, de $\mathbb{P}^1$. Essas superfícies possuem características que dividirão a prova do teorema de Torelli em dois casos, como veremos.

Definição 4.1. *Uma superfície de Riemann compacta S, de gênero $g \geq 2$, é dita ser hiperelíptica se existe uma aplicação (ramificada) de recobrimento $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ de duas folhas.*

Observe que neste caso $\deg(f) = 2$.

Sejam X e Y duas superfícies de Riemann compactas e seja f um mapa holomórfo não constante de X em Y. Neste caso, f é um recobrimento, ou seja, um morfismo finito e sobrejetivo (veja [27], Proposição 3.11, página 41). Para qualquer ponto $p \in X$, existe um único inteiro $m \geq 1$ que satisfaz a seguinte propriedade: para toda carta local $\varphi_2 : U_2 \longrightarrow V_2$ em Y, centrada em $f(p)$, existe uma carta local $\varphi_1 : U_1 \longrightarrow V_1$ em X, centrada em p, de modo que $\varphi_2(f(\varphi_1^{-1}(z))) = z^m$. O número inteiro $m-1$ é chamado índice de ramificação de f no ponto p e será denotado por $V_f(p)$. Note que, quando $V_f(p)$ é estritamente positivo, p é um ponto de ramificação de f. Uma condição necessária e suficiente para que p seja um ponto de ramificação de f é que o posto de f em p seja nulo. A imagem J dos pontos de ramificação de f, bem como sua imagem inversa $f^{-1}(J) = I$, são fechados e discretos. A restrição de f à $X \setminus I$ é um recobrimento étale de $Y \setminus J$, cujo número de folhas é o grau da aplicação f e temos que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (V_f(p) + 1),\ \forall q \in Y.$$

Teorema 4.2. (*Fórmula de Riemann-Hurwitz*) *Sejam X e Y duas superfícies de Riemann compactas de gênero $g(X)$ e $g(Y)$, respectivamente. Seja f uma aplicação* *holomorfa não constante de X em Y. Assim,*

$$g(X) = m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2},$$

onde m é o grau de f e V é a soma dos índices de ramificação de f nos diferentes pontos de X.

Proof. Veja [22], Teorema 2.7.1, página 73. □

Proposição 4.3. *Seja S uma superfície de Riemann hiperelíptica de gênero g. Então $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ tem $2g + 2$ pontos de ramificação.*

Proof. É uma aplicação direta da fórmula de Riemann-Hurwitz:

$$\begin{aligned} g &= 2(0-1) + 1 + \frac{V}{2} \\ &= -2 + 1 + \frac{V}{2}. \end{aligned}$$

Então, $2g+2 = V = \sum_{p \in S} V_f(p)$. Uma vez que $V_f(p)$ só é computado no somatório quando p é ponto de ramificação, o resultado está demonstrado. □

Como o grau de f é 2, cada ponto de branch tem como pré-imagem um único ponto de ramificação com multiplicidade 2.

Os pontos de ramificação da aplicação de recobrimento $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, vistos em $\mathbb{P}^1$, desempenham um papel importante no que diz respeito à identificação da superfície hiperelíptica S, uma vez que S é completamente determinada pelos $2g+2$ pontos de ramificação de f.

Proposição 4.4. *Sejam S uma superfície de Riemann hiperelíptica de gênero g e $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ um recobrimento ramificado de grau 2 com $z_1, ..., z_{2g+2}$ pontos de branch. Então, S é a superfície de Riemann associada à curva plana de equação*

$$y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2} (x - z_i);$$

($2g+1$ termos se algum z_i for ∞). Reciprocamente, a superfície de Riemann associada a uma curva de equação $y^2 = \prod_{i=1}^{n}(x - z_i)$, $z_i \in \mathbb{C}$ distintos, é hiperelíptica de gênero $E(\frac{n-1}{2})$; que é a parte inteira de $(\frac{n-1}{2})$. Em particular, existem curvas hiperelípticas de todos os gêneros.

Proof. Como f é uma função meromorfa não constante em S e tem grau 2 como recobrimento ramificado de $\mathbb{P}^1$, então

$$[\mathcal{M}(S) : \mathbb{C}(f)] = 2,$$

(veja [34], Teorema 5.5, página 60), onde $\mathcal{M}(S)$ é o corpo das funções meromorfas em S e $\mathbb{C}(f)$ é o corpo de todas as expressões racionais na função f, ou seja, $\mathbb{C}(f) \simeq \mathbb{C}(t)$, onde uma função racional $r(t)$ corresponde à expressão racional $r(f)$. Se $h \in \mathcal{M}(S) \setminus \mathbb{C}(f)$, então $\mathcal{M}(S) = \mathbb{C}(f, h)$ e temos $[\mathbb{C}(f, h) : \mathbb{C}(f)] = 2$. Donde h satisfaz uma equação quadrática

$$h^2 + b(f)h + c(f) = 0,$$

para $b(f), c(f) \in \mathbb{C}(f)$. Completando quadrados na equação acima, podemos supor $h^2 = \prod_{i=1}^{n}(f - t_i), t_i \in \mathbb{C}$ distintos. Os números t_i são os valores de f correspondentes a um único valor de h, i.e., existe um único ponto $Q \in S$ tal que $f(Q) = t_j$, uma vez que $\mathcal{M}(S)$ separa pontos de S. Portanto, os t_j são os pontos de ramificação de f.

Reciprocamente, considere a curva plana afim

$$V(F) = \{(w, z) \in \mathbb{C}^2 \mid F(w, z) = 0\},$$

onde $F(w, z) = w^2 - \prod_{i=1}^{n}(z - z_i)$. Porque há uma equivalência de Categorias entre as curvas planas (com suas aplicações racionais não constantes) e as superfícies de Riemann compactas (com suas funções meromórfas não constantes), podemos pensar em $V(F)$ como uma superfície de Riemann compacta S de gênero $g(S)$. Considere agora a aplicação f de S em $\mathbb{C}$ dada por

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (w, z) & \longmapsto & z \end{array}$$

Mas, se S é uma superfície de Riemann compacta e temos uma mapa holomorfo $h : S \longrightarrow Y$, então h é sobrejetiva e Y é compacta. Portanto, a aplicação f é, na verdade, dada pela aplicação sobrejetiva

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathbb{C} \cup \infty \\ (w, z) & \longmapsto & z \end{array}$$

Como todo número complexo não nulo possui exatamente duas raízes 2–ésimas complexas distintas, então f tem grau 2. E por isso, ramifica exatamente nos pontos z_i (com índice 1) e talvez em ∞; ramificará no ponto ∞ se, e somente se, n for ímpar. Assim, existe $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$, um recobrimento (ramificado) duplo de $\mathbb{P}^1$ e portanto S é uma superfície de Riemann hiperelíptica. Vamos ao gênero de S: aplicando a fórmula de Riemann-Hurwitz no morfismo f, obtém-se que

$$\begin{aligned} g(X) &= m(g(Y) - 1) + 1 + \frac{V}{2} \\ &= 2(0 - 1) + 1 + \frac{1}{2}\sum_{p \in X} V_f(p) \\ &= E(\frac{n-1}{2}). \end{aligned}$$

□

O mapa que será definido a seguir é, sem dúvida, o mapa mais importante para a teoria das curvas algébricas. Características que decorrem de sua definição nas superfícies de Riemann compactas serão observadas em decisivos pontos da prova do Teorema de Torelli que aqui estudaremos.

Observação: Como toda superfície de Riemann compacta é uma curva algébrica, vez por outra, num enunciado de um teorema, proposição ou lema ou numa definição −dependendo da inclinação; por vezes, mais algébrica do que analítica−, poderá ser visto o termo curva algébrica.

Definição 4.5. *Seja S uma superfície de Riemann compacta de gênero $g \geq 2$ e $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ uma base para o espaço das 1-formas holomorfas na superfície S. O mapa*

$$\begin{array}{cccc} \Phi_K : & S & \longrightarrow & \mathbb{P}^{g-1} \\ & p & \longmapsto & (\omega_1(p) : ... : \omega_g(p)) \end{array}$$

é chamado o mapa canônico de S e $C = \Phi_K(S) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ de curva canônica de S.

Proposição 4.6. *Seja S uma curva algébrica de gênero $g \geq 3$. Então o mapa canônico é um mergulho se, e somente se, S é não hiperelíptica. Além disso, se S é não hiperelíptica, o mapa canônico mergulha S em $\mathbb{P}^{g-1}$ como uma curva projetiva suave de grau $2g-2$.*

Proof. Veja [27], Proposição 2.1, página 203. □

Por conseguinte, observamos que o mapa canônico não tem pontos de ramificação quando S é uma curva não hiperelíptica.

Proposição 4.7. *Para uma curva hiperelítica S de gênero $g \geq 2$, o mapa canônico Φ_K é a composição da aplicação de recobrimento $f : S \longrightarrow \mathbb{P}^1$ e do mapa de Veronese $\nu_{g-1} : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Em particular, a imagem $\Phi_K(S) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ é uma curva normal racional de grau $g-1$ em $\mathbb{P}^{g-1}$, e o mapa $\Phi_K : S \longrightarrow \Phi_K(S)$ tem grau 2.*

Proof. Veja [27], Proposição 2.2, página 204. □

Seja $Z \subset \mathbb{P}^n$ um subconjunto qualquer. Define-se o *span* de Z, denotado por *span*(Z), como sendo a interseção de todos os subespaços lineares em $\mathbb{P}^n$ contendo Z. Assim, para um divisor $D = p_1 + ... + p_d$ numa curva S, $\overline{\Phi_K(D)}$ denotará o *span* da imagem de D pelo mapa canônico; $\overline{\Phi_K(D)} = span\{\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_d)\}$.

Teorema 4.8. (*Teorema de Riemann-Roch: Forma Geométrica*) *Seja S uma curva algébrica não hiperelíptica de gênero g. Fixado um divisor positivo D em X, então*

$$dim\,|D| = deg(D) - 1 - dim\,\overline{\Phi_K(D)}$$

Proof. Veja [27], versão geométrica do Teorema de Riemann-Roch, pág. 208. □

Teorema 4.9. (*Teorema de Clifford*) *Seja D um divisor efetivo em S. Suponha que $D \neq 0$, D não é linearmente equivalente a K_S, onde K_S é o divisor canônico em S, e que D é um divisor especial* (*o que significa dizer que D e $K_S - D$, são ambos linearmente equivalentes a divisores efetivos*). *Então*

$$dim\,|D| \leq \frac{deg(D)}{2}.$$

E vale a igualdade se S é hiperelíptica.

Proof. Veja [10], Teorema de Clifford, pág. 251. □

5. A Variedade Jacobiana e sua Polarização

Seja V um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão g.

Definição 5.1. *Um reticulado Λ, em V, é um $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por uma $\mathbb{R}$-base $\{\lambda_1, ..., \lambda_{2g}\}$ de V.*

Sejam $\omega_1, ..., \omega_{2g} \in \mathbb{C}^g$ vetores linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$ (i.e., não existem números reais $\alpha_1, ..., \alpha_{2g}$ tais que $|\alpha_1| + ... + |\alpha_{2g}| \neq 0$ e $\alpha_1\omega_1 + ... + \alpha_{2g}\omega_{2g} = 0$). Esses vetores definem um reticulado em $\mathbb{C}^g$:

$$\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + ... + \mathbb{Z}\omega_{2g}.$$

Note que Λ é um subgrupo discreto de $\mathbb{C}^g$ gerado por $\omega_1, ..., \omega_{2g}$. Considere a relação de equivalência " $\sim$ " em $\mathbb{C}^g$ dada por

$$z \sim z' \Longleftrightarrow z - z' \in \Lambda.$$

O espaço quociente $\mathbb{C}^g/\Lambda$ dessa relação de equivalência é chamado de toro complexo de dimensão g. Observamos que $\mathbb{C}^g/\Lambda$ é uma variedade analítica complexa compacta de dimensão g; sua estrutura complexa é determinada exclusivamente pelo fato de que a projeção canônica

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{C}^g & \longrightarrow & \mathbb{C}^g/\Lambda \\ & z & \longmapsto & [z] \end{array}$$

é holomorfa. Como uma variedade real de dimensão 2g, $\mathbb{C}^g/\Lambda$ é topologicamente equivalente ao produto de $2g$ cópias do círculo $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid < x, x >= 1\}$. Logo, $\mathbb{C}^g/\Lambda$ é uma variedade complexa compacta. Além disso, possui uma estrutura de grupo comutativo (veja [31], (1), página 1). Uma curva elíptica E é um toro complexo de dimensão $g = 1$. Nesse caso, temos então que $V \cong \mathbb{C}$ e um reticulado Λ em $\mathbb{C}$ é gerado por dois números complexos ω_1 e ω_2 que são linearmente independentes sobre $\mathbb{R}$: $E = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2)$.

Sejam X e Y toros complexos de dimensões g_X e g_Y. Um homomorfismo de X em Y é um mapa holomorfo $f : X \longrightarrow Y$ que é compatível com as estruturas de grupo de X e Y.

Já aqui, poderíamos definir variedade abeliana dizendo que: um toro complexo de dimensão g é uma variedade abeliana se pode ser mergulhado num espaço projetivo $\mathbb{P}^n$. Assim, variedades abelianas são toros complexos que também são variedades algébricas. Aqui, estamos falando diante da categoria das variedades diferenciáveis complexas. Nesse caso, este mergulho que mencionamos, $\mathbb{C}^g/\Lambda \hookrightarrow \mathbb{P}^n$, para algum n, é um mapa holomorfo entre variedades complexas (compactas) que é um isomorfismo sobre sua imagem. E o Teorema de Chow (veja [10], Teorema de Chow, página 167) se encarrega de tornar $\mathbb{C}^g/\Lambda$ um conjunto algébrico projetivo.

Vamos agora definir, de maneira analítica, a variedade Jacobiana.

Seja S uma superfície de Riemann compacta de gênero g. Sejam $H^0(\omega_S)$ o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão g das 1-formas holomorfas em S e $H_1(S, \mathbb{Z})$ o primeiro grupo de homologia de S; que para uma superfície de Riemann compacta S de gênero g, é um grupo abeliano livre de posto $2g$.

Do Teorema de Stokes, integrais de 1-formas holomorfas sobre classes de homologia em $H_1(S, \mathbb{Z})$ estão bem definidas:

Proposição 5.2. *Se ω é uma 1-forma holomorfa em S, então o mapa*

$$\begin{array}{rccc} \eta_\omega : & H_1(S, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & [\gamma] & \longmapsto & \int_\gamma \omega \end{array}$$

onde γ é uma curva fechada em S, está bem definido.

Proof. Se $\gamma' \in [\gamma]$, então $\gamma - \gamma' = \partial\Omega$, onde Ω é um aberto simplesmente conexo em S. Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\eta_\omega(\gamma) - \eta_\omega(\gamma') = \int_{\gamma-\gamma'} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega = \iint_\Omega d\omega = \iint_\Omega 0 = 0.$$

□

Assim, para cada classe de homologia $[\gamma]$, obtemos um funcional linear bem definido no espaço $H^0(\omega_S)^*$, dado pela integração sobre γ:

$$H^0(\omega_S) \longrightarrow \mathbb{C}, \ \omega \longmapsto \int_\gamma \omega.$$

Com isso, fica bem definido o seguinte mapa

$$\begin{array}{rccc} \iota: & H_1(S,\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^0(\omega_S)^* \\ & [\gamma] & \longmapsto & (\omega \longmapsto \int_\gamma \omega). \end{array}$$

Como o mapa acima é injetivo (veja [5], Lema 11.1.1, pág. 316), então $H_1(S,\mathbb{Z})$ é mergulhado em $H^0(\omega_S)^*$ e, portanto $\iota(H_1(S,\mathbb{Z}))$ é um reticulado em $H^0(\omega_S)^* \cong \mathbb{C}^g$, e o quociente de grupos

$$J(S) := \frac{H^0(\omega_S)^*}{\iota(H_1(S,\mathbb{Z}))}$$

é um toro complexo de dimensão g, chamado variedade Jacobiana ou simplesmente a Jacobiana de S.

Definição 5.3. *Uma polarização no toro complexo $\mathbb{C}^g/\Lambda$ é um divisor amplo D em $\mathbb{C}^g/\Lambda$. Será dito que o divisor amplo D é uma polarização principal, se $\ell(D) = 1$.*

Observe que isto é apenas uma definição e nada garante a existência de uma polarização num dado toro complexo.

Uma variedade abeliana é, por definição, um toro complexo $\mathbb{C}^g/\Lambda$ que admite um divisor amplo. Como se é de esperar, esta definição, para variedade abeliana, é equivalente a que foi apresentada no fim do primeiro parágrafo desta seção. Com efeito, se D é um divisor amplo em $\mathbb{C}^g/\Lambda$, então $\mathbb{C}^g/\Lambda$ pode ser analiticamente mergulhada num espaço projetivo. Mas pelo Teorema de Chow (veja [10], Teorema de Chow, página 167), toda subvariedade analítica de um espaço projetivo é algébrica. Para a recíproca, de acordo com [35] e [5, Proposição 4.5.2, página 85], o Teorema do Mergulho de Kodaira pode ser enunciado da seguinte maneira:
Uma variedade analítica complexa compacta X é uma variedade projetiva se, e somente se, existir um line bundle amplo em X.
Assim, se $\mathbb{C}^g/\Lambda \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é um mergulho analítico $-$e, portanto, do Teorema de Chow, uma variedade projetiva$-$, então existirá um line bundle amplo em X. Da sobrejetividade da aplicação definida em [17, Corolário 5.3.7, página 252], existe um divisor amplo em $\mathbb{C}^g/\Lambda$.

Ao par $(\mathbb{C}^g/\Lambda, D)$ chamaremos de variedade abeliana polarizada. Caso $\ell(D) = 1$, chamaremos então de variedade abeliana principalmente polarizada.

De [27, Proposição 4.9, página 158] e [27, Proposição 4.20, página 163], temos que todo ponto de uma curva elíptica é um divisor amplo e, portanto qualquer curva elíptica é uma variedade abeliana.

Sejam X e Y dois toros complexos e D e E dois divisores amplos e efetivos induzindo polarizações em X e Y, respectivamente. Um homomorfismo de variedades abelianas polarizadas $f : (X,D) \longrightarrow (Y,E)$ é um homomorfismo de toros complexos $f : X \longrightarrow Y$ tal que f^*E e D induzem a mesma polarização em X, isto é, $f^*E = D + x$, para um único ponto $x \in X$.

O toro complexo $J(S)$ carrega uma estrutura de variedade abeliana principalmente polarizada. De fato, há uma polarização principal canônica em $J(S)$, como alinhavaremos a seguir.

6. Divisores associados à variedade Jacobiana

Dada uma superfície de Riemann S, à sua Jacobiana $J(S)$ estão associados intrinsecamente dois divisores. Embora esses divisores venham a coincidir, a menos de uma translação por um elemento de $J(S)$, eles se relacionam à características de naturezas distintas de S e de $J(S)$. Um está diretamente ligado a polarização da variedade Jacobiana $J(S)$, e o outro, diretamente ligado à geometria de S.

Vamos definir o primeiro desses divisores de modo explicitamente analítico.

Definição 6.1. *O semi-espaço superior de Siegel de grau $g > 0$, denotado por $\mathbb{H}_g$, é o espaço das matrizes complexas $g \times g$ simétricas com parte imaginária positiva definida,*

$$\mathbb{H}_g = \{\tau \in M_g(\mathbb{C}) \mid {}^t\tau = \tau, Im\,\tau > 0\}.$$

Note que para $g = 1$, $\mathbb{H}_g$ é apenas o semiplano superior de $\mathbb{C}$.

Definição 6.2. *A função Theta de Riemann de dimensão g é o mapa $\theta : \mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g \longrightarrow \mathbb{C}$, dado por*

$$(\tau, z) \longmapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} e^{\pi i({}^t m \tau m + 2 {}^t m z)}.$$

Fixado $\tau \in \mathbb{H}_g$, para qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{C}^g$, $\theta(\tau, z)$ converge uniformemente e absolutamente, portanto define uma função holomorfa em $\mathbb{C}^g$. Considerando τ também como uma variável, então $\theta(\tau, z)$ é holomorfa em $\mathbb{H}_g \times \mathbb{C}^g$. Para detalhes sobre a função Theta, veja [18]. Embora a função Theta não seja considerada como uma função em $J(S)$, o seu "conjunto de zeros" em $J(S)$ é um divisor bem definido em $J(S)$, chamado de divisor Theta;

$$\Theta := \{[z] \in J(S) \mid \theta(\tau, z) = 0\}.$$

Entre as propriedades do divisor Theta, duas particularmente importantes para o Teorema de Torelli são:
1) O divisor Θ definido na Jacobiana $J(S)$ é amplo.
2) $\ell(\Theta) = 1$.
Uma prova para essas duas propriedades pode ser encontrada em [16, Corolário A.8.2.3, página 141].

Assim, pela definição de polarização de um toro complexo, dada na Seção 5, o divisor Theta fornece uma polarização principal para a variedade Jacobiana $J(S)$.

Definição 6.3. *Sejam $p_0 \in S$ um ponto fixado e $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ uma base para o espaço das 1-formas holomorfas em S. Para cada ponto $p \in S$, escolha uma curva c, em S, ligando p_0 a p, o mapa de Abel-Jacobi é definido da seguinte maneira:*

$$\begin{array}{cccc} \mu : & S & \longrightarrow & J(S) \\ & p & \longmapsto & \left(\int_{p_0}^{p} \omega_1, ..., \int_{p_0}^{p} \omega_g\right) \end{array}$$

Não é difícil checar que $\mu(p)$ está bem definido como elemento de $J(S)$, i.e., que a escolha da curva c não afeta $\mu(p)$, e que μ é um mapa holomorfo.

Seja $S^{(d)}$ o produto simétrico de grau d de S, isto é, o quociente de S^d pelo grupo de permutações de d elementos. Identificamos os pontos de $S^{(d)}$ com os divisores efetivos de grau d em S. Daí, uma vez definido o mapa de Abel-Jacobi nos pontos de S, por linearidade, ele se estende aos divisores efetivos de grau d em S da seguinte maneira

$$\begin{array}{cccc} \mu : & S^{(d)} & \longrightarrow & J(S) \\ & p_1 + ... + p_d & \longmapsto & \mu(p_1) + ... + \mu(p_d) \end{array}$$

Para $d \leq g - 1$ denotamos $W^d := \mu(S^{(d)})$. Como μ é um mapa holomorfo próprio, W^{g-1} é uma subvariedade fechada de $J(S)$. Esta subvariedade é, como mencionamos, o divisor ligado à geometria de S.

O teorema que é verdadeiramente central no estudo da relação entre S e $J(S)$ é geralmente conhecido como Teorema de Abel. Inclusive, os argumentos de Henrik H. Martens dados em [24], mostram que o Teorema de Torelli pode ser obtido de combinações do Teorema de Riemann-Roch e do Teorema de Abel.

Teorema 6.4. (*Teorema de Abel*). *Sejam D, $E \in S^{(d)}$. Então,*

$$\mu(D) = \mu(E) \Longleftrightarrow D \sim E \quad (D \text{ e } E \text{ são linearmente equivalentes}).$$

Proof. Ver [10], Teorema de Abel, página 235. □

Observe que, pelo Teorema de Abel, ficam parametrizados por W^d os sistemas lineares completos de grau d em S.

O teorema seguinte, conhecido como Teorema de Riemann, estabelece uma relação entre os divisores Θ e W^{g-1}. Dada tal relação entre esses divisores, a partir dela, se relacionam também diferentes características que se desdobram dessas subvariedades de $J(S)$.

Teorema 6.5. (*Teorema de Riemann*). *Existe uma constante $k \in J(S)$ tal que*

$$\Theta = W^{g-1} + k.$$

Proof. Ver [10], Teorema de Riemann, página 338. □

Cabe aqui dizer que o pulo do gato na prova do Teorema de Torelli −alinhada com o enunciado que aqui provaremos− está no Teorema de Riemann.

Exemplo 6.1. Seja S uma superfície de Riemann compacta de gênero $g = 2$. Como o mapa de Abel $\mu : S \longrightarrow J(S)$ é um mergulho (veja [32], Teorema 4, página 90), então

$$J(S) \supset W^1 = \mu(S) \simeq S.$$

Pelo Teorema de Riemann, o divisor Θ é, neste caso, também uma superfície de Riemann compacta de gênero 2. Assim, a variedade Jacobiana $J(S)$ contém uma superfície compacta Θ de gênero 2 e $(J(S), \Theta)$ é uma variedade abeliana principalmente polarizada. Nesse caso, a polarização de $J(S)$ é dada diretamente por S. Por conseguinte, o divisor Theta não possui pontos singulares.

De acordo com o Teorema da singularidade de Riemann (veja [38], Teorema 2.29, página 71) podemos descrever geometricamente o conjunto dos pontos não singulares do divisor W^{g-1} da seguinte maneira:

Teorema 6.6. *Sejam $\Phi_K : S \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$ o morfismo canônico e $D \in S^{(g-1)}$. Então $\mu(D) \in W^{g-1}_{reg}$ se, e somente se, $dim|D| = 0$. E nesse caso,*

$$\overline{\Phi_K(D)} = \mathbb{P}(T_{\mu(D)} W^{g-1}).$$

Proof. Este resultado encontra-se provado no meio da demonstração do Teorema da singularidade de Riemann, mencionado acima. □

Logo adiante veremos que esse resultado conecta numa única equação os três morfismos presentes na prova do Teorema de Torelli.

7. O Teorema de Torelli

Cronologicamente, a formulação clássica do Teorema de Torelli envolve *matrizes período* e o *espaço de moduli das variedades Abelianas principalmente polarizadas*. Vamos ver: seja S uma superfície de Riemann compacta de gênero g. Uma base $\{\alpha_1, ..., \alpha_g, \beta_1, ..., \beta_g\}$ do primeiro grupo de homologia $H_1(S, \mathbb{Z})$ será dita base simplética se:

$$\begin{cases} \alpha_i \cdot \alpha_j = 0 \\ \alpha_i \cdot \beta_i = \delta_{ij}, \\ \beta_i \cdot \beta_j = 0 \end{cases}$$

onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$, caso contrário. Assim sendo, para $\{\alpha_1, ..., \alpha_g, \beta_1, ..., \beta_g\}$ uma base simplética de $H_1(S, \mathbb{Z})$ e $\{\omega_1, ..., \omega_g\}$ uma base do espaço $H^0(S, \Omega^1)$ das 1-formas holomorfas em S, a *matriz período* de S é a matriz $g \times 2g$ dada por:

$$\Omega_S = \begin{bmatrix} \int_{\alpha_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\alpha_g} \omega_1 & \int_{\beta_1} \omega_1 & \cdots & \int_{\beta_g} \omega_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\alpha_1} \omega_g & \cdots & \int_{\alpha_g} \omega_g & \int_{\beta_1} \omega_g & \cdots & \int_{\beta_g} \omega_g \end{bmatrix}.$$

De acordo com a primeira e segunda *relação bilinear de Riemann* (veja [10], páginas 231 e 232), para uma base específica de $H^0(S, \Omega^1)$ $-$e a essa base chamaremos base normalizada de $H^0(S, \mathbb{Z})-$, a matriz período Ω_S de S tem a forma

$$\Omega_S = \begin{bmatrix} I_g & Z \end{bmatrix}, \text{ com } Z \in \mathbb{H}_g.$$

Pela *Condição de Riemann III* (veja [10], Condição de Riemann III, página 306), todo toro complexo principalmente polarizado é dada por uma matriz período normalizada $\Omega = \begin{bmatrix} I_g & Z \end{bmatrix}$; $Z \in \mathbb{H}_g$. Por conseguinte, todo toro complexo principalmente polarizado é dado por um ponto $Z \in \mathbb{H}_g$. Ou seja, através das matrizes período (normalizadas), variedades abelianas principalmente polarizadas são essencialmente parametrizadas pelo semi-espaço superior de Siegel $\mathbb{H}_g$. Um problema é que escolhendo outra base $\{\omega'_1, ..., \omega'_g\}$ de $H^0(S, \mathbb{Z})$ e outra base simplética $\{\alpha'_1, ..., \alpha'_g, \beta'_1, ..., \beta'_g\}$ de $H_1(S, \mathbb{Z})$, obteremos outra matriz período Ω'_S de S, e com isso outra representação em $\mathbb{H}_g$. Assim sendo, seria mais preciso descrever as variedades abelianas principalmente polarizadas sem ficarmos presos a uma escolha de base. Pois bem, o *espaço de moduli das variedades Abelianas principalmente polarizadas de dimensão g* é o quociente $\mathcal{A}_g := \mathbb{H}_g / Sp(2g, \mathbb{Z})$ proveniente da ação de $Sp(2g, \mathbb{Z})$ em $\mathbb{H}_g$ dada por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = (a\tau + b)(c\tau + d)^{-1}.$$

E é justamente a ação que define $\mathcal{A}_g$, que estabelece uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos pontos do espaço $\mathcal{A}_g$ com o conjunto das classes de isomorfismo das variedades abelianas principalmente polarizadas (veja [38], Teorema 2.10, página 50). Dito isso, a clássica forma do Teorema de Torelli é dada por:

A fim de que duas curvas algébricas não singulares S e S', de mesmo gênero g, sejam birracionalmente equivalentes é necessário e suficiente que se tenha $\overline{Z} = \overline{Z'}$, onde $\overline{Z}$ e $\overline{Z'}$ são os resíduos de Z e Z' em $\mathcal{A}_g$, para $\Omega_S = \begin{bmatrix} I_g & Z \end{bmatrix}$ e $\Omega_{S'} = \begin{bmatrix} I_g & Z' \end{bmatrix}$.

Como dissemos na introdução, é devido a André Weil a seguinte formulação abstrata desta afirmação:

Duas curvas não singulares S e S' são isomorfas se (e somente se) existir um isomorfismo da variedade Jacobiana $J(S)$ na variedade Jacobiana J(S') que transporta a polarização canônica de $J(S)$ na polarização canônica de $J(S')$.

É possível dar, ainda, ao Teorema de Torelli uma forma mais simples a partir da qual as formulações clássica e abstrata podem ser facilmente deduzidas. A afirmação é a seguinte:

Uma condição necessária e suficiente para duas curvas não singulares S e S', de mesmo gênero g, sejam biracionalmente equivalentes é que seus produtos simétricos $(S)^{(g-1)}$ e $(S')^{(g-1)}$ sejam biracionalmente equivalentes.

A forma abstrata do Teorema de Torelli segue, desta última, a partir da observação de que o produto simétrico $(S)^{(g-1)}$ é biracionalmente equivalente ao divisor $\Theta \subset J(S)$ e do fato de que a polarização canônica coincide com a polarização principal dada pelo divisor Θ.

Nosso ponto de partida aqui, será fazer uso da polarização principal dada pelo divisor Theta Θ. Desse modo, o Teorema de Torelli afirma que toda curva suave S de gênero g pode ser recuperada através da Jacobiana $J(S)$ juntamente com seu divisor Θ. Isso pode ser enunciado formalmente da seguinte maneira:

Sejam S_1, S_2 duas curvas suaves de gênero g. Então S_1 e S_2 são isomorfas se, e somente se as variedades abelianas principalmente polarizadas $(J(S_1), \Theta_1)$ e $(J(S_2), \Theta_2)$ são isomorfas.

Daremos a prova alinhada a este último enunciado.

Seja $X \subset \mathbb{P}^n$ uma variedade quasi-projetiva, suave, irredutível e de dimensão d. Uma vez que X é suave e de dimensão d, o plano tangente à variedade X em cada ponto $p \in X$ tem dimensão d. Porque estamos considerando X como subvariedade do espaço projetivo, consideraremos o plano tangente projetivo $\mathbb{P}(T_pX) \subset \mathbb{P}^n$. Para cada $p \in X$, $\mathbb{P}(T_pX)$ é um subespaço linear, de dimensão d, de $\mathbb{P}^n$, i.e., é um elemento do Grassmanniano $\text{Grass}(d{+}1, n{+}1) = \{L \subset \mathbb{P}^n \text{ subespaço linear de dimensão } d\}$. Assim, temos um mapa bem definido

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}_X : & X & \longrightarrow & \text{Grass}(d+1, n+1) \\ & p & \longmapsto & \mathbb{P}(T_pX) \end{array}$$

Esta aplicação é chamado mapa de Gauss associado à variedade X. A partir da descrição do plano tangente projetivo como núcleo do mapa linear dado pela matriz de derivadas parciais $(\frac{\partial F_\alpha}{\partial Z_i})$, onde $\{F_\alpha\}$ é uma coleção de geradores do ideal de X e Z_i são as coordenadas homogêneas de $\mathbb{P}^n$, vê-se que o mapa de Gauss é um morfismo de variedades algébricas. Note que se X é singular, então $\mathcal{G}$ ainda está bem definido e é regular no conjunto aberto de pontos suaves de X $-$que é, portanto, denso$-$, logo, temos um mapa racional

$$\mathcal{G}_X : X \dashrightarrow \text{Grass}(d+1, n+1).$$

Assim, de acordo com essa definição, o mapa de Gauss associado ao divisor theta $\Theta \subset J(C)$ pode ser escrito como

$$\begin{array}{cccc} \mathcal{G} = \mathcal{G}_\Theta : & \Theta_{reg} & \longrightarrow & G(g-1,g) \cong (\mathbb{P}^{g-1})^*, \\ & \mu(D) & \longmapsto & \mathbb{P}(T_{\mu(D)}\Theta) \end{array}$$

que é um morfismo dominante entre variedades algébricas (veja [5], Proposição 4.4.2, página 82). Do Teorema 6.6, segue que

$$\mathcal{G}(\mu(D)) = \mathbb{P}(T_{\mu(D)}W^{g-1}) = \overline{\Phi_K(D)}.$$

Vamos à prova do Teorema de Torelli. Como vimos em seções anteriores, superfícies de Riemann hiperelípticas e não hiperelípticas exibem diferentes caracterizações. Elas aparecem no mapa canônico, no grau enquanto curvas em $\mathbb{P}^{g-1}$, na forma da equação em que podem ser expressas. Essas diferenças chegam até o mapa de Gauss −como veremos a seguir− tanto no que diz respeito ao grau como mapa entre variedades projetivas, mas também no lugar de branch. Essas diferentes características entre superfícies hiperelípticas e não hiperelípticas nos mostrarão que Jacobianas de superfícies de Riemann hiperelípticas não podem nunca ser isomorfas a Jacobianas de superfícies de Riemann não hiperelípticas, porque o lugar de branch de $\mathcal{G} : \Theta_{reg} \longrightarrow (\mathbb{P}^{g-1})^*$ para uma curva hiperelíptica tem mais componentes do que o lugar de branch de $\mathcal{G}$ para uma curva não-hiperelíptica. Assim sendo, não causa espanto que a prova se divide nesse ponto. Seguiremos, como já dito, a arquitetura da prova em [1], que também encontra-se em [10]; com uma inclinação um pouco mais analítica.

Definição 7.1. *Seja $X \subset \mathbb{P}^{n+1}$ uma variedade projetiva (sobre $\mathbb{C}$, como afinal tem sido em todo texto) de dimensão $d \geq 1$. Seja H um hiperplano em $\mathbb{P}^{n+1}$. Se $H \not\supset X$, dizemos que $X \cap H \subseteq H$ é uma seção própria de hiperplano de X.*
Uma vez fixada uma propriedade $\mathcal{P}$, dizemos que $\mathcal{P}$ vale para uma seção geral de hiperplano de X (ou simplesmente para um hiperplano geral) se existir um conjunto aberto não vazio $\mathcal{V} \subset (\mathbb{P}^{n+1})^*$, de modo que $X \cap H$ tenha a propriedade $\mathcal{P}$ para todo $H \in \mathcal{V}$. Nesse caso, chamamos $X \cap H \subseteq H$ de uma seção geral de hiperplano de X, ou ainda, quando não houver perigo de loxías, chamaremos H de hiperplano geral.

Diremos que H é um hiperplano transversal a X se H não é tangente a X em nenhum ponto. A maioria dos hiperplanos é transversal, no seguinte sentido:

Lema 7.2. *Suponha que $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva suave não-degenerada. A transversalidade dos hiperplanos $H \in \mathbb{P}^n$, em relação à curva X, vale para um seção geral de hiperplano de X.*

Proof. Veja [27], Lema 3.5, página 218. □

Proposição 7.3. *Suponha que $X \subset \mathbb{P}^n$ é uma curva suave não-degenerada de grau d (com $n \geq 2$). Temos que:*

(1) *O hiperplano geral H em $\mathbb{P}^n$ é tal que $div_X(H) = q_1 + \cdots + q_d$ com q_i pontos distintos.*

(2) *Com exceção de uma quantidade finita de pontos de X, um hiperplano tangente geral H a X, digamos em q, é tal que $div_X(H) = 2q + q_3 + \cdots + q_d$, com todos os q_i distintos e diferentes de q.*

Proof. Veja [27], Corolário 3.9, página 221. □

Dizemos que um conjunto de pontos $\{q_1, ..., q_d\}$ em $\mathbb{P}^{n-1}$ está *em posição geral* se qualquer subconjunto de n (ou menos) pontos for linearmente independente.

Lema 7.4. (*Teorema da Posição Geral*) *Seja $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 2$, uma curva não-degenerada, irredutível, possivelmente singular, e de grau d. Então, para um hiperplano geral H em $\mathbb{P}^n$, $H \cap X = \{q_1, ..., q_d\}$ está em posição geral no espaço projetivo $H = \mathbb{P}^{n-1}$.*

Proof. Veja [2], Teorema da Posição Geral, página 109. □

Sejam $C = \Phi_K(S)$ uma curva não hiperelíptica e $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$, onde Φ_K é o mapa canônico de uma superfície de Riemann compacta S de gênero $g \geq 2$. Pela Proposição 4.6, este hiperplano intersecta C em $2g-2$ pontos, contados com multiplicidade. Considere, sobre um hiperplano $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$, a seguinte propriedade geométrica $\mathcal{P}$:

Todos os divisores de grau $(g-1)$, correspondentes a soma das possíveis escolhas de $g-1$ pontos, dentre os $2g-2$ pontos de interseção $-$ contados com multiplicidade$-$, determinam pontos em W^{g-1}_{reg}, ou seja:

Se $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ tem a propriedade $\mathcal{P}$, então para o conjunto de pontos

$$H \cap C = \{p_1, ..., p_{2g-2}\},$$

onde estamos levando em conta a multiplicidade de cada ponto para contabilizar os $2g-2$ pontos, temos que

$$D = p_{i_1} + \cdots + p_{i_{g-1}} \in W^{g-1}_{reg}, \ i_j \in \{1, 2, ..., 2g-2\}.$$

Afirmamos que a propriedade $\mathcal{P}$ vale para uma seção geral de hiperplano de C. Com efeito, basta observar, do Teorema da Posição Geral, que se H é um hiperplano geral, então $H \cap C$ é um conjunto de pontos em posição geral e, portanto $H \cap C$ é um um conjunto de $2g-2$ pontos distintos. Logo, para qualquer dividor D de grau $(g-1)$, correspondente a uma combinação simples de $(g-1)$ elementos de $H \cap C$, temos que

$$D = p_{i_1} + \cdots + p_{i_{g-1}}, \text{ para } p_{i_j} \text{ pontos distintos.}$$

Então, $l(D) = 1$ e, equivalentemente, $D \in W^{g-1}_{reg}$. Com isso, o subconjunto de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$

$$V = \{H \in (\mathbb{P}^{g-1}) \mid H \text{ tem a propriedade } \mathcal{P}\}$$

contém um subconjunto aberto e denso de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ e é, portanto, ele mesmo um aberto denso de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$.

Faz sentido definir o seguinte: se um hiperplano $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ satisfizer a propriedade $\mathcal{P}$, diremos que H está em posição geral em relação a curva C.

Remark 7.5. Acima nós usamos que $D = p_1 + \cdots + p_{g-1} \in W^{g-1}_{reg}$ quando $l(D) = 1$, desde que os p_i sejam distintos. Para provar o Teorema de Torelli para quando a curva for hiperelíptica, vamos precisar também saber que esse é o caso, isto é, que $D \in W^{g-1}_{reg}$, quando os p_i não são distintos. Pois daí, para um hiperplano tangente geral a uma curva hiperelíptica C, teremos que $\mathrm{div}_C(H) \in W^{g-1}_{reg}$.

Lema 7.6. *O grau do mapa de Gauss $\mathcal{G}_\Theta$ é igual a $2^{(g-1)}$ se a curva $C = \Phi_K(S)$ é hiperelíptica, e igual a $\begin{pmatrix} 2g-2 \\ g-1 \end{pmatrix}$ se for não hiperelíptica.*

Proof. Lembremos que C é uma curva não-degenerada em $\mathbb{P}^{g-1}$, cujo grau é $g-1$ se C é hiperelíptica e $2g-2$, caso contrário. Partindo desse ponto, e supondo primeiro que C é hiperelíptica, seja $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ um hiperplano geral. Pelo Teorema da Posição Geral, $H \cap C = \{\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{g-1})\}$ é um conjunto linearmente independente. E do Teorema 6.6, isso equivale a dizer que $\mu(D) \in W^{g-1}_{reg}$, para $D = p_1 + ... + p_{g-1} \in S^{(g-1)}$. Neste caso, $\mathcal{G}(\mu(D))$ =span$\{\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{g-1})\} = \mathbb{P}(T_{\mu(D)}W^{g-1}_{reg})$. No entanto, como o mapa canônico, para C hiperelítica, tem grau 2, então para cada ponto em $H \cap C$, temos dois elementos na imagem inversa, pelo mapa canônico Φ_K, desse ponto, desde que este ponto não seja um ponto de ramificação de Φ_K. Assim, para $p_i \in S$, $1 \leq i \leq g-1$, temos duas possibilidades e, portanto a fibra de $\mathcal{G}$ sobre H tem

$$2^{(g-1)} \text{ elementos.}$$

Suponhamos agora que C é uma curva não hiperelíptica. Se H é um hiperplano em posição geral em $\mathbb{P}^{g-1}$, pelo Lema 7.4, $H \cap C = \{\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{2g-2})\}$ e qualquer conjunto de $g-1$ elementos $\{\Phi_K(p_{i_1}), ..., \Phi_K(p_{i_{g-1}})\}$ é linearmente independente. Então $l(D) = 1$ (para $D = p_{i_1} + ... + p_{i_{g-1}}$, com $p_{i_j} \in S$) e, pelo Teorema 6.6, $\mu(D) \in W^{g-1}_{reg}$ e

$$\mathcal{G}(\mu(D)) = span\{\Phi_K(p_{i_1}), ..., \Phi_K(p_{i_{g-1}})\} = \mathbb{P}T_{\mu(D)}W^{g-1}_{reg} = \widetilde{H},$$

onde $\widetilde{H}$ é um ponto de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ que correspondente ao hiperplano de $\mathbb{P}^{g-1}$ gerado por $\Phi_K(p_{i_1}), ..., \Phi_K(p_{i_{g-1}})$. Trocando em miúdos, a fibra de $\mathcal{G}$ sobre H consiste em todas as imagens dos divisores da forma $\mu(p_{i_1} + ... + p_{i_{g-1}})$ onde i_j varia sobre $\{1, 2, ..., 2g-2\}$. Concluímos então que o grau do mapa de Gauss $\mathcal{G}$ é dado por

$$\begin{pmatrix} 2g-2 \\ g-1 \end{pmatrix} = \frac{g(g+1)...(2g-2)}{(g-1)!}.$$

□

Vamos agora estudar de que maneira hiperplanos $H \subset \mathbb{P}^{g-1}$ que correspondem a pontos em $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ caracterizarão o lugar de branch $B_{\mathcal{G}}$ do mapa $\mathcal{G}$. Se C for uma curva não hiperelítica, um ponto geral de $B_{\mathcal{G}}$ será dado por um hiperplano geral tangente à curva canônica. Sendo um pouco mais preciso, denotemos por $C^* \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ o conjunto dos hiperplanos tangentes a C, afirmamos que:

Lema 7.7. *Se C é não hiperelíptica, então o fecho de Zariski $\overline{B_{\mathcal{G}}}$ de $B_{\mathcal{G}}$ em $(\mathbb{P}^{g-1})^*$ é dado por*

$$\overline{B}_G = C^*.$$

Proof. Seja $V \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ o conjunto dos hiperplanos que não estão em posição geral. Da Proposição 7.3, item (2), podemos tomar um hiperplano, $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V$, tangente à curva C, digamos num ponto p, de modo que

$$\mathrm{div}_C(H) = 2p + p_3 + ... + p_{2g-2},$$

com $p_{i's}$ distintos e diferentes de p. Agora estamos interessados no número de subconjuntos com $(g-1)$ elementos do conjunto $H \cap C = \{p, p_3, ..., p_{2g-2}\}$. Observando que $\#H \cap C = 2g-3$, temos que esse número é dado por

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2g-3 \\ g-1 \end{pmatrix} &= \frac{(2g-3)!}{(g-1)![(2g-3)-(g-1)]!} \\ &= \frac{(2g-3)(2g-4)\cdots(g+1)(g)(g-1)(g-2)!}{(g-1)!(g-2)!} \\ &< \frac{(2g-2)(2g-3)(2g-4)\cdots(g+1)(g)}{(g-1)!} \\ &= \begin{pmatrix} 2g-2 \\ g-1 \end{pmatrix} \\ &= \deg(\mathcal{G}).\end{aligned}$$

Como H é um hiperplano em posição geral, todos os $\begin{pmatrix} 2g-3 \\ g-1 \end{pmatrix}$ divisores da forma

$$D = p_{i_1} + \cdots + p_{i_{g-1}};\ p_{i_j} \in H \cap C,$$

são tais que $\varphi(D) \in W^{g-1}_{reg}$. Então, a cardinalidade da fibra de $\mathcal{G}$ sobre H, com H tangente a C, é $\begin{pmatrix} 2g-3 \\ g-1 \end{pmatrix}$. Então, da desigualdade acima e pela Proposição 2.9, não existe vizinhança U de H de modo que $\mathcal{G}|_{\mathcal{G}^{-1}(U)} : \mathcal{G}^{-1}(U) \longrightarrow U$ seja um revestimento étale de U. E da Definição 2.6, $H \in B_{\mathcal{G}}$. Observe com isso que: qualquer hiperplano $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V$, tangente a C, pertence ao lugar de branch de $\mathcal{G}$. Inversamente, se H é transversal a C então

$$\mathrm{div}_C(H) = p_1 + p_2 + ... + p_{2g-2},$$

com $p_{i's}$ distintos. E do Lema 7.6, a cardinalidade da fibra de $\mathcal{G}$ sobre H é igual ao grau de $\mathcal{G}$. Novamente da Proposição 2.9 e da Definição 2.6, $H \notin B_{\mathcal{G}}$. Mostramos então que $\overline{B_{\mathcal{G}}} \subset C^*$ e $\overline{C^* \cap (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V} \subset \overline{B_{\mathcal{G}}}$. Para concluir a prova precisamos ver que: $\overline{C^* \cap (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V} = C^*$.

Primeiro, vamos ver que C^* é irredutível. Considere o conjunto

$$A = \{(p, H) \mid H \supset T_p(C)\} \subset C \times (\mathbb{P}^{g-1})^*$$

e as projeções $\pi_1 : A \longrightarrow C$ e $\pi_2 : A \longrightarrow C^*$. Temos que $\pi_1 : A \longrightarrow C$ é um mapa regular sobrejetivo entre conjuntos algébricos projetivos. Além disso, C é irredutível e todas as fibras de π_1 são irredutíveis e de mesma dimensão. Então A é irredutível. Se agora tivermos que C^* for redutível, escrevemos $C^* = C_1^* \cup C_2^*$, para C_1^* e C_2^* fechados, distintos e não vazios. Como π_2 é sobrejetiva e definida em todo A, temos que $A = \pi_1^{-1}(C_1^*) \cup \pi_2^{-1}(C_2^*)$ é uma decomposição não trivial de A numa união de dois conjuntos fechados, contradizendo a irredutibilidade de A. Logo, C^* é irredutível. Segue que: se tivessémos $\overline{C^* \cap (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V} \subsetneq C^*$, teríamos a decomposição $C^* = \overline{C^* \cap (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus V} \cup (\overline{C^* \cap V})$ em dois subconjuntos fechados não vazios. Contradizendo, agora, a irredutibilidade de C^*. □

A essa altura, já pode ser observado que do par $(J(S), \Theta)$ determina-se completamente o morfismo $\mathcal{G} : W^{g-1}_{reg} \longrightarrow (\mathbb{P}^{g-1})^*$ e, deste último lema, portanto, C^*, a menos de automorfismos de $(\mathbb{P}^{g-1})^*$. Lembrando que o objetivo final é recuperar a curva C, o que faltaria mostrar então é que: se C e C' são duas curvas canônicas −respectivas imagens dos mergulhos, em $\mathbb{P}^{g-1}$, de S e de S', por seus respectivos mapas canônicos Φ_K e $\Phi_{K'}$−, com $C^* = C'^*$, então $C \cong C'$. Formalizando num lema, temos:

Lema 7.8. *Sejam $C = \Phi_K(S)$ e $C' = \Phi_{K'}(S')$ duas curvas não hiperelípticas. Se $C^* = C'^*$, então C e C' são isomorfas.*

Proof. Vamos mostrar que o mapa

$$\varphi : C \longrightarrow C', \;\; p \longmapsto \{\text{ponto de tangência da reta } T_p(C) \text{ com a curva } C'\},$$

é bem definido, mais ainda, uma bijeção, onde $T_p(C)$ é a reta tangente a C em p.

Para cada ponto $p \in C$, considere o conjunto

$$T_p(C)^* := \{H \in (\mathbb{P}^{g-1})^* \mid H \supset T_p(C)\}.$$

Como um hiperplano H é tangente a C em p se, e somente se, H contém uma reta tangente a C em p, então $T_p(C)^* \subset C^* = C'^*$. Considere o seguinte sistema linear em C'

$$\Lambda = \{H \cdot C' \mid H \in T_p(C)^*\}.$$

Da Definição 3.7, o lugar de base do sistema Λ é:

$$B_\Lambda = \bigcap_{H \in T_p(C)^*} H \cap C' = T_p(C) \cap C',$$

uma vez que H contém $T_p(C)$, para todo divisor $H \cdot C' \in \Lambda$.

Do Teorema de Bertini, para um membro geral D do sistema linear Λ, tem-se que $D_{sing} \subset B_\Lambda$. Como $H \cdot C'$ é suave num ponto $q \in H \cap C'$ se, e somente se H não é tangente a C' em q, então H não é tangente a C' fora do $B_\Lambda = T_p(C) \cap C'$. Mas $H \in T_p(C)^*$ é sempre tangente à curva C': pois por hipótese $C'^* = C^* \supset T_p(C)^*$. Logo H é tangente a C' em pontos de $B_\Lambda = T_p(C) \cap C'$. Portanto, a reta $T_p(C)$ é obrigatoriamente tangente à curva C' em pelo menos um ponto.

Para $g > 3$, afirmamos que C' não tem bitangentes, i.e., nenhuma reta em $\mathbb{P}^{g-1}$ pode ser tangente a C' em dois pontos q, $q' \in C'$. Com efeito, suponha que l seja bitangente a C' em dois pontos p e $q \in C'$. Pela versão geométrica do Teorema de Riemann-Roch,

$$\dim|2p + 2q| = (4 - 1) - 1 = 2 = \frac{\deg(2p + 2q)}{2}.$$

Mas pelo Teorema de Clifford a curva C deveria ser hiperelíptica. Absurdo. Assim, podemos escrever $T_p(C) = T_{p'}(C')$ para um único ponto $p' \in C'$. Por conseguinte o mapa φ é um isomorfismo.

Para $g = 3$, é sabido que há apenas um número finito de bitangentes nas curvas quárticas C e C' em $\mathbb{P}^2$. Então, o mapa φ é birracional. Logo, $C \cong C'$; uma vez que todo mapa birracional entre curvas projetivas suaves é um isomorfismo.

□

No Lema 7.7 viu-se, quando a curva era não hiperelíptica, que o que caracterizava hiperplanos pertencerem ao lugar de branch do mapa de Gauss $\mathcal{G}_\Theta$ era o fato de serem tangentes à curva − a multiplicidade com que o hiperplano intersectava a curva era o ponto. Para uma curva hiperelíptica isso segue valendo, não obstante, há outra característica que faz com que outros hiperplanos, não necessariamente tangentes à curva, venham pertencer ao lugar de branch do mapa de Gauss.

Lema 7.9. *Sejam S uma curva hiperelíptica, $C = \Phi_K(S)$ e $\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{2g+2})$ os pontos de branch do mapa canônico $\Phi_K : S \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$. Então*

$$\overline{B_{\mathcal{G}}} = C^* \cup \Phi_K(p_1)^* \cup \cdots \cup \Phi_K(p_{2g+2})^*,$$

onde $\Phi_K(p_i)^* = \{H \in (\mathbb{P}^{g-1})^* \mid \Phi_K(p_i) \in H\}$.

Proof. Seja $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ um hiperplano transversal a C tal que $H \cap B_{\Phi_K} = \emptyset$. Nesse caso a fibra de $\mathcal{G}$ sobre H, como viu-se na prova do Lema 7.6, tem cardinalidade igual a $\deg(\mathcal{G})$. E pela Proposição 2.9, existe uma vizinhança $U \subset (\mathbb{P}^{g-1})^*$ de H tal que $\mathcal{G}|_{\mathcal{G}^{-1}(U)} : \mathcal{G}^{-1}(U) \longrightarrow U$ é um recobrimento étale de U. Então, $H \notin B_{\mathcal{G}}$. Logo, $(C^* \cup \Phi_K(p_1)^* \cup \cdots \cup \Phi_K(p_{2g+2})^*)^c \subset (B_{\mathcal{G}})^c \iff B_{\mathcal{G}} \subset C^* \cup \Phi_K(p_1)^* \cup \cdots \cup \Phi_K(p_{2g+2})^*$. Embora ainda transversal, se $H \cap B_{\Phi_K} \neq \emptyset$, então continuamos com $\# H \cap C = \{q_1, ..., q_{g-1}\}$, mas ao menos um ponto $q_i \in B_{\Phi_K}$. E sabemos que um ponto de branch tem como imagem inversa um único ponto (de ramificação) com multiplicidade dois. Nesse caso, tendo em mente o princípio fundamental da contagem, teríamos então que a fibra de $\mathcal{G}$ sobre H tem cardinalidade

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times \underbrace{1}_{\text{i-ésima posição}} \times \cdots \times 2}_{\text{(g-1)-vezes}} < 2^{g-1} = \deg(\mathcal{G}).$$

E, novamente pela Proposição 2.9, $H \in B_{\mathcal{G}}$. Seja, agora, $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ um hiperplano que intersecta transversalmente a curva $C = \Phi_K(S)$ em todos os pontos, com exceção de um único $-$digamos $q = \Phi_K(p)$; $p \in S-$, onde a interseção possui multiplicidade 2. Então,

$$\operatorname{div}_C(H) = 2q + q_3 + \cdots + q_{g-1},$$

com todos os q_i distintos e nenhum igual a q. Antes de provarmos que $H \in B_{\mathcal{G}}$, precisamos ver que $\operatorname{div}_C(H) \in W^{g-1}_{reg}$. Essa verificação não se faz necessária para quando $g = 2$, caso em que o divisor Theta é suave; como viu-se no Exemplo 6.1. Vamos então mostrar que $\operatorname{div}_C(H) \in W^{g-1}_{reg}$, para $g \geq 3$. Considere o seguinte sistema linear

$$\Lambda = \{\operatorname{div}_C(H') \mid H' \in T_q(C)^*\}.$$

Observe que: $\Lambda = |\operatorname{div}_C(H)| := \{E \in \operatorname{Div}(C) \mid E \sim \operatorname{div}_C(H), \text{ e } E \geq 0\}$, i.e, Λ é o sistema linear completo determinado pelo divisor $\operatorname{div}_C(H)$ em C. Como $H' \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ é tangente à curva C em q se $\operatorname{div}_C(H') \geq 2q \geq q$, então $q \in supp(\operatorname{div}_C(H'))$ para todo $H' \in T_q(C)^*$. Daí,

$$B_\Lambda = \bigcap_{H' \in T_q(C)^*} supp(\operatorname{div}_C(H')) = q.$$

Assim, q é um divisor efetivo em C tal que

$$D - q \geq 0 \text{ para todo } D \in \Lambda.$$

O divisor q é, nesse caso, chamado componente fixa de Λ. Havendo uma componente fixa q de Λ, haverá uma componente fixa máxima q_0 de Λ, no sentido de que

$$q_0 \geq q \text{ para toda componente fixa } q \text{ de } \Lambda.$$

O divisor q_0 é chamado parte fixa de Λ. Note com isso que q é parte fixa de Λ. E pondo

$$\Lambda - q = \{D - q \mid D \in \Lambda\},$$

observamos que o sistema linear $\Lambda - q$ não possui pontos de base e, além disso, todo divisor de Λ é q mais um divisor em $\Lambda - q$ e vice-versa. Então,

$$L(\operatorname{div}_C(H) - q) = L(\operatorname{div}_C(H)).$$

Com efeito, como $q \geq 0$, temos que $\mathrm{div}_C(H) \geq \mathrm{div}_C(H) - q$, então $L(\mathrm{div}_C(H) - q) \subseteq L(\mathrm{div}_C(H))$. Para a inclusão inversa, tomemos $0 \neq f \in L(\mathrm{div}_C(H))$. Então, $\mathrm{div}_C(H) + (f) \geq 0$. Portanto, $\mathrm{div}_C(H) + (f) \in |\mathrm{div}_C(H)|$, e podemos escrever $\mathrm{div}_C(H) + (f) = q + E$, para E um divisor não negativo. Então

$$(\mathrm{div}_C(H) - q) + (f) = E \geq 0 \Longrightarrow f \in L(\mathrm{div}_C(H) - q).$$

Portanto, $L(\mathrm{div}_C(H)) \subset L(\mathrm{div}_C(H) - q)$.

Os $g-2$ pontos $q, q_3, ..., q_{g-1} \in H \cap C$, podem ser observados da seguinte maneira

$$q = (1 : t),\ q_i = (1 : t_i) \in \mathbb{P}^1,\ 3 \leq i \leq g - 1.$$

Quando $g = 3$, teremos que $H \cap C = \{q\}$ e $\mathrm{div}_C(H) = 2q$. Mas isso é só uma observação para que não se ache que tenhamos $3 \leq 2$, quando $g = 3$. Da Proposição 4.4, sabemos que existem superfícies de Riemann hiperelípticas de todos os gêneros. Considere então $\widetilde{S}$ uma superfície de Riemann hiperelíptica de gênero $\widetilde{g} = g - 1$, de modo que os $(g-2)$ pontos $q = (1 : t)$, $q_i = (1 : t_i) \in \mathbb{P}^1$, $3 \leq i \leq g - 1$, estejam entre os $2g$ pontos de branch de $\widetilde{S}$. Isso não é difícil de se imaginar, basta olharmos para a curva de equação

$$y^2 = \left[\prod_{i=1}^{g+2}(x - z_i)\right]\left[\prod_{j=3}^{g-1}(x - q_i)\right](x - q).$$

Ora, cada um desses pontos de branch corresponde, através da imagem inversa do morfismo de grau 2, $\widetilde{f} : \widetilde{S} \longrightarrow \mathbb{P}^1$, a um único ponto em $\widetilde{S}$. Em particular os que nos interessam são: $\widetilde{f}^{-1}(q)$ e $\widetilde{f}^{-1}(q_i)$. Pois assim, ao divisor $(\mathrm{div}_C(H) - q)$ em C, fazemos corresponder um único divisor $\widetilde{D} = \widetilde{f}^{-1}(q) + \widetilde{f}^{-1}(q_3) + \widetilde{f}^{-1}(q_4) + ... + \widetilde{f}^{-1}(q_{g-1})$, que é um divisor efetivo de grau $g - 2$ na superfície de Riemann $\widetilde{S}$. Seja $h \in L(\mathrm{div}_C(H) - q)$. Então, $h \in k(C)$, mas $C \cong \mathbb{P}^1$ e $\widetilde{f} : \widetilde{S} \longrightarrow \mathbb{P}^1$ é um recobrimento. Então, $h \circ \widetilde{f} \in k(\widetilde{S})$ e $\widetilde{D} + (h \circ \widetilde{f}) \geq 0$. Assim, através da transformação linear

$$\begin{array}{rccc} T: & L(\mathrm{div}_C(H) - q) & \longrightarrow & L(\widetilde{D}) \\ & h & \longmapsto & h \circ \widetilde{f} \end{array}$$

temos que $L(\mathrm{div}_C(H) - q)$ pode ser observado com um subespaço de $L(\widetilde{D})$ e, portanto

$$0 < l(\mathrm{div}_C(H) - q) \leq l(\widetilde{D}).$$

De acordo com o Teorema da Singularidade de Riemann, como $\widetilde{D} \in \widetilde{S}^{(g-2)}$ é um ponto genérico (os pontos $\widetilde{f}^{-1}(q), \widetilde{f}^{-1}(q_3), \widetilde{f}^{-1}(q_4), ..., \widetilde{f}^{-1}(q_{g-1})$ são dois a dois distintos), então $l(\widetilde{D}) = 1$. E da desigualdade acima,

$$1 = l(\mathrm{div}_C(H) - q) = l(\mathrm{div}_C(H)).$$

E novamente, do Teorema da Singularidade de Riemann, temos que: $\mathrm{div}_C(H) \in W^{g-1}_{reg}$. Agora, observando que $\#H \cap C$ tem $(g-2)$ elementos, do princípio fundamental da contagem, a fibra de $\mathcal{G}$ sobre H tem cardinalidade menor ou igual a

$$2^{g-2} < 2^{g-1} = \deg\,(\mathcal{G}).$$

E pela Proposição 2.9, $H \in B_{\mathcal{G}}$. Com isso, mostramos até agora que:

1) $\overline{B_{\mathcal{G}}} \subset C^* \cup \Phi_K(p_1)^* \cup ... \cup \Phi_K(p_{2g+2})^*$

2) $\Phi_K(p_i)^* \cap (\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^* \subset B_{\mathcal{G}}; 1 \leq i \leq 2g+2$ e
3) Se V é o conjunto de hiperplanos $H \in (\mathbb{P}^{g-1})^*$ que intersecta transversalmente a curva $C = \Phi_K(S)$ em todos os pontos, com exceção de um único, onde a intersecção possui multiplicidade 2, então $V \subset B_{\mathcal{G}}$.
Combinando 2) e 3) obtemos:

$$V \cup \{\Phi_K(p_1)^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\} \cup \cdots \cup \{\Phi_K(p_{2g+2})^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\} \subset B_{\mathcal{G}}$$
$$\Downarrow$$
$$\overline{V} \cup \overline{\{\Phi_K(p_1)^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\}} \cup \cdots \cup \overline{\{\Phi_K(p_{2g+2})^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\}} \subset \overline{B_{\mathcal{G}}}$$

Note que: $\overline{\{\Phi_K(p_i)^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\}} = \Phi_K(p_i)^*$. Caso contrário, teríamos que

$$\Phi_K(p_i)^* = \overline{\{\Phi_K(p_i)^* \cap [(\mathbb{P}^{g-1})^* \setminus C^*]\}} \cup \overline{\{\Phi_K(p_i)^* \cap C^*\}},$$

o que contrariaria a irredutibilidade de $\Phi_K(p_i)^*$. Então,

$$\overline{V} \cup \Phi_K(p_1)^* \cup \cdots \cup \Phi_K(p_{2g+2})^* \subset \overline{B_{\mathcal{G}}}.$$

Da Proposição 7.3, item (2), segue que

$$C^* \cup \Phi_K(p_1)^* \cup \cdots \cup \Phi_K(p_{2g+2})^* \subset \overline{B_{\mathcal{G}}}.$$

E combinando isto com 1), segue a prova do lema. □

Imediatamente, da variedade dual de $\overline{B_{\mathcal{G}}}$, recuperamos (unicamente) a curva C e os $2g+2$ pontos de branch

$$\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{2g+2}).$$

Com efeito, do lema acima, temos

$$\begin{aligned}(\overline{B_{\mathcal{G}}})^* &= (C^* \cup (\Phi_K(p_1))^* \cup ... \cup (\Phi_K(p_{2g+2})^*)^* \\ &= (C^*)^* \cup (\Phi_K(p_1)^*)^* \cup ... \cup (\Phi_K(p_{2g+2})^*)^* \\ &= C \cup \Phi_K(p_1) \cup ... \cup \Phi_K(p_{2g+2}).\end{aligned}$$

Como $\Phi_K : S \longrightarrow \Phi_K(S) \subset \mathbb{P}^{g-1}$ (e $C = \Phi_K(S) \cong \mathbb{P}^1$) é um recobrimento ramificado de grau 2 com $\Phi_K(p_1), ..., \Phi_K(p_{2g+2})$ pontos de branch, então pela Proposição 4.4, S é a única superfície de Riemann associada à curva plana de equação $y^2 = \prod_{i=1}^{2g+2}(x - \Phi_K(p_i))$. Ou seja, S pode ser recuperada como recobrimento ramificado duplo de $\mathbb{P}^1$ com $2g+2$ pontos de branch.

É claro que se $S_1 \cong S_2$, então $J(S_1) \cong J(S_2)$. Nosso foco aqui é demonstrar que $(J(S_1), \Theta_1) \cong (J(S_2), \Theta_2)$ implica que $S_1 \cong S_2$. Noutras palavras, demonstrar que S é unicamente determinada a partir da variedade abeliana principalmente polarizada $(J(S), \Theta)$.

Pois bem, como $(J(S_1), \Theta_1) \cong (J(S_2), \Theta_2)$, existe $f : J(S_1) \longrightarrow J(S_2)$ isomorfismo analítico (bi-holomorfismo) de modo que $f^* : Div(J(S_2)) \longrightarrow Div(J(S_1))$ é um isomorfismo de grupos e, além disso,

$$f^*(\Theta_2) = \Theta_1 + k_1 \quad \text{e} \quad (f^{-1})^*(\Theta_1) = (f^*)^{-1}(\Theta_1) = \Theta_2 + k_2,$$

onde $k_1 \in J(S_1)$ e $k_2 \in J(S_2)$. Mas se Θ é uma polarização principal em $J(S)$, então $\Theta + k$ é a mesma polarização, para $k \in J(S)$.

Assim, considere a relação de equivalência $\underset{E}{\sim}$ da maneira seguinte:

$$D_1 \underset{E}{\sim} D_2 \iff D_1 = D_2 + k, \text{ onde } k \in J(S).$$

Ou seja, D_1 é equivalente a D_2 se, e somente se, D_1 e D_2 induzem a mesma polarização em $J(S)$. Temos que $\frac{Div(J(S))}{\underset{E}{\sim}}$ mantém a estrutura de grupo que havia em $Div(J(S))$ e, além disso, $f : J(S_1) \longrightarrow J(S_2)$ sendo um isomorfismo analítico implica que

$$[f^*] : \frac{Div(J(S_2))}{\widetilde{E}} \longrightarrow \frac{Div(J(S_1))}{\widetilde{E}}$$

é, ainda, um isomorfismo de grupos. E agora podemos escrever:

$$[f^*]([\Theta_2]) = [\Theta_1] \text{ e } [(f^*)]^{-1}([\Theta_1]) = [\Theta_2]$$

Então, a menos de um isomorfismo analítico e um isomorfismo de grupos, temos que

$$J(S_1) = J(S_2) \text{ e } \Theta_1 = \Theta_2.$$

Logo, as curvas recuperadas, nos Lemas 7.7 e 7.9, dos mapas $\mathcal{G}_1 : \Theta_1^{reg} \longrightarrow (\mathbb{P}^{g-1})^*$ e $\mathcal{G}_2 : \Theta_2^{reg} \longrightarrow (\mathbb{P}^{g-1})^*$ são isomorfas. E o teorema está provado.

8. O Problema de Schottky

Vamos voltar ao clássico enunciado do Teorema de Torelli:

A fim de que duas curvas algébricas não singulares S e S', de mesmo gênero g, sejam birracionalmente equivalentes é necessário e suficiente que se tenha $\overline{Z} = \overline{Z'}$, onde $\overline{Z}$ e $\overline{Z'}$ são os resíduos de Z e Z' em $\mathcal{A}_g$, para $\Omega_S = \begin{pmatrix} I_g & Z \end{pmatrix}$ e $\Omega_{S'} = \begin{pmatrix} I_g & Z' \end{pmatrix}$.

Pois bem, o que está sendo dito com esse enunciado é que toda superfície de Riemann compacta de gênero g corresponde a um ponto do espaço $\mathcal{A}_g$. O teorema é, então, intuitivamente reformulado em termos de uma aplicação entre $\mathcal{M}_g$ (espaço de moduli das curvas S de gênero g) e o espaço $\mathcal{A}_g$. Explico: um ponto de $\mathcal{M}_g$ representa uma curva de gênero g, ou melhor, uma classe de uma curva a menos de um isomorfismo. Então, fica bem definido o mapa

$$t : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g, \ \ [S] \longmapsto [(J(S), \Theta_S)].$$

Os espaços $\mathcal{A}_g$ e $\mathcal{M}_g$ são variedades quase-projetivas (veja [29], Teorema 7.10 e Corolário 7.14, páginas 139 e 143), de dimensões $\frac{1}{2}g(g+1)$ e $3g-3$, respectivamente. Então, o mapa acima induz um morfismo de variedades algébricas. E o Teorema de Torelli toma a seguinte simples forma:

O mapa $t : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$ é um morfismo injetivo.

Com isso, se $g \geq 2$, $J_g := t(\mathcal{M}_g)$ é uma subvariedade de $\mathcal{A}_g$ de dimensão $3g-3$. Questão que se desdobra imediatamente a partir do morfismo injetivo $t : \mathcal{M}_g \longrightarrow \mathcal{A}_g$ é: Como se pode caracterizar ou descrever J_g (ou seu fecho $\overline{J}_g$) em $\mathcal{A}_g$? Ou seja, como se pode caracterizar as Jacobianas de curvas algébricas entre todas as variedades abelianas principalmente polarizadas? Essa pergunta é chamada de *Problema de Schottky*. Nem todas as variedades abelianas são Jacobianas de curvas em $\mathcal{M}_g$, visto que $\mathcal{M}_g$ e $\mathcal{A}_g$ tem dimensões diferentes para $g \geq 4$. Para $g = 2$ e 3, as dimensões de $\mathcal{M}_g$ e $\mathcal{A}_g$ coincidem e, pelo Teorema de Torelli,

$$\dim \mathcal{M}_g = \dim\ J_g = \dim \mathcal{A}_g.$$

Tomando o fecho de J_g em $\mathcal{A}_g$ −que por sua vez é irredutível−, e observando que $\dim \overline{J}_g = \dim \mathcal{A}_g$, segue que $\overline{J}_g = \mathcal{A}_g$ quando $g = 2$ ou 3.

É preciso, no Teorema de Torelli, que as variedades Jacobianas $J(S)$ e $J(S')$, das curvas S e S', sejam isomorfas não apenas como toros complexos que são, mas também é preciso que haja um isomorfismo de variedades abelianas principalmente polarizadas. A condição de haver um isomorfismo apenas como toros complexos entre $J(S)$ e $J(S')$, por si só, não implicará que sejam S e S' duas superfícies de Riemann isomorfas. Vamos tentar observar isso com a ajuda da seguinte teorema:

Teorema 8.1. *Seja* $(X, D) \in \mathcal{A}_2$. *Então,* D *é uma superfície de Riemann compacta* S *de gênero 2; caso em que* $X = J(S)$, *ou* $D = E_1 \times \{p\} + \{q\} \times E_2$, *onde* p *e* q *são os divisores Theta de* E_1 *e* E_2*; caso em que* $X = E_1 \times E_2$.

Proof. Veja [25], Proposição 1, página 777. □

Exemplo 8.1. Se uma variedade abeliana A, de dimensão 2, contiver uma superfície de Riemann S compacta e de gênero 2, então (A, S) é uma variedade abeliana principalmente polarizada que é isomorfa, como variedade abeliana principalmente polarizada, a $(J(S), S)$. Com efeito, suponha que uma variedade abeliana A contenha uma superfície de Riemann S de gênero 2; nesse caso existe um mergulho natural $\iota : S \longrightarrow A$. Segundo propriedade universal, que é intrínseca a variedade Jacobiana de uma curva (veja [36], Teorema 2, página 96), existe um morfismo $\tilde{\iota} : J(S) \longrightarrow A$, de modo que comuta o diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\iota"'] & J(S) \arrow[d, "\tilde{\iota}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Como o mapa de Abel μ e o mergulho ι são injetivos, também o é o mapa holomorfo $\tilde{\iota}$. Assim, $\tilde{\iota}$ é um morfismo injetivo entre duas variedades de mesma dimensão. Ora, nesse caso, é claro que $J(S) \cong A$. Portanto, $(A, S) \cong (J(S), S)$.

Segundo artigo de Hayashia e Nishi (veja, [15]), está garantida a existência de uma curva de gênero 2 na variedade produto

$$E_1 \times E_2 = \mathbb{C}/\Lambda_1 \times \mathbb{C}/\Lambda_2 \cong \mathbb{C}^2/(\Lambda_1 \times \Lambda_2) = \mathbb{C}^2/\Lambda,$$

de duas curvas elípticas E_1 e E_2, ambas com multiplicações complexas. Donde,

$$(E_1 \times E_2, S) \cong (J(S), S).$$

Do Teorema 8.1, temos que:

$$(E_1 \times E_2, E_1 \times \{p\} + \{q\} \times E_2) \not\cong (J(S), S) \bmod (Sp(2g, \mathbb{Z}))$$

onde $p \in E_1$ e $q \in E_2$ são divisores Theta. Logo $(J(S), E_1 \times \{p\} + \{q\} \times E_2) \notin J_2$. Portanto, não existe $S \in \mathcal{M}_2$ tal que $t(S) = (J(S), E_1 \times \{p\} + \{q\} \times E_2)$, o que destaca a importância do isomorfismo como variedade abeliana principalmente polarizada, no Teorema de Torelli.

References

[1] A. Andreotti, *On a theorem of Torelli*, Amer. J. Math., 80 (1958), 801-827.

[2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths e J. Harris, *Geometry of algebraic curves*. Vol. I, Grundlehren der Mathematischen Wissenshaften 267. Springer-Verlag, New York (1985).

[3] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison-Wesley, Reading (1969).

[4] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*. 2nd ed., London Mathematical Society (1996).

[5] C. Birkenhake e H. Lange, *Complex abelian varieties*. Springer-Verlag, Berlin, second edition (2004).

[6] H. Borges e E. Tengan, *Álgebra Comutativa em Quatro Movimentos.* Projeto Euclides, IMPA (2015).

[7] R. Cavalieri e E. Miles, *Riemann Surfaces and Algebraic Curves - A first Course in Hurwitz Theory.* Cambridge University Press (2016).

[8] S. D. Cutkosky, *Introduction to Algebraic Geometry.* American Mathematical Society (2018).

[9] H. M. Farkas e I. Kra, *Riemann Surfaces.* 2nd ed., Springer (1991).

[10] P. Griffiths e J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry.* Pure and Applied Mathematics, Wiley-interscience [John Wiley & Sons], New York (1978).

[11] P. Griffiths, *Introduction to Algebraic Curves.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 76. American Mathematical Society · Providence · Rhode Island (1989).

[12] A. Grothendieck e M. Raynaud, *Revêtements Étales et Groupe Fondamental* (SGA1); Springer-Verlag (1971), arXiv:math/0206203v2.

[13] J. Harris, *Algebraic Geometry, A First Course* . Springer-Verlag (1992).

[14] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer (1977).

[15] T. Hayashida e M. Nishi, *Existence of curves of genus two on a product of two elliptic curves.* J. Math. Soc. Japan Vol. 17, No. 1, (1965), 1-16.

[16] M. Hindry e J. H. Silverman, *Diophantine Geometry - An Introduction.* Springer (2000).

[17] D. Huybrechts, *Complex Geometry - An introduction.* Springer (2000).

[18] J. Igusa, *Theta Functions.* Springer (1972).

[19] S. Iitaka, *Algebraic Geometry - An Introduction to Birational Geometry of Algebraic Varieties.* Springer-Verlag (1982).

[20] T. Jambois, *The Theorem of Torelli for Singular Curves.* Transactions of the Am. Math. Society, 239:123-145 (1978).

[21] L. Keen, I. Kra e R. E. Rodrígues, *Lipman Bers, a Life in Mathematics.* American Mathematical Society (2015).

[22] A. Lesfari, *Introduction à la Géométrie Algébrique Complexe.* Hermann (2005).

[23] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford Graduate Texts in Mathematics (2006).

[24] H. H. Martens, *A New Proof of Torelli's Theorem*, Annals of Mathematics, 78 (1963), 107-111.

[25] G. Mess, *The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces.* Topology, Vol. 31, No. 4, (1992), 775-790.

[26] J. S. Milne, *Étale Cohomology.* Princeton University Press (1980).

[27] R. Miranda, *Algebraic Curves and Riemann Surfaces.* American Mathematical Society (1995).

[28] D. Mumford, *The Red Book of Varieties and Schemes.* Springer-Verlag (1980).

[29] D. mumford, J. Fogarty e F. Kirwan, *Geometric Invariant Theorey.* 3rd ed., Springer-Verlag (1994).

[30] D. Mumford, *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties.* Springer-Verlag (1995).

[31] D. Mumford, *Abelian Varieties.* American Mathematical Society, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, second edition (2012).

[32] R. Narasimhan, *Compact Riemann Surfaces.* Lectures in Mathematics, ETH Zurich, Birkhauser Verlag (1992).

[33] K. J. Nowak, *Flat Morphisms Between Regular Varieties.* Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, Fasciculus XXXV (1997).

[34] E. Reyssat, *Quelques Aspects des Surfaces de Riemann.* Springer (2000).

[35] O. Riemenschneider, *A Generalization of Kodaira's Embedding Theorem*, Math. Ann. 200 (1973), 99-102.

[36] J-P. Serre, *Groupes algébriques et corps de classes.*Hermann, Paris (1959).

[37] I. R. Shafarevich, *Basic Algebraic Geometry 1.* 3rd ed., Springer-Verlag (2013).

[38] Y. Shimizu e K. Ueno, *Advances in Moduli Theory.* Translations of Mathematical Monographs, vol. 206. American Mathematical Society · Providence · Rhode Island (2002).

[39] A. Weil, *Œuvres Scientifiques Collected Papers* . Volume II (1951-1964). Springer-Verlag (1979), 307-327.