Universidade Federal Fluminense

A Teoria de Gauss-Bonnet-Chern e suas aplicações

João Rodriguez Marcondes

Niterói

Julho 2022

A Teoria de Gauss-Bonnet-Chern e suas aplicações

João Rodriguez Marcondes

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Zhou Detang

Niterói

Julho 2022

Ficha catalográfica automática - SDC/BIME
Gerada com informações fornecidas pelo autor

M321t Marcondes, João Rodriguez
A Teoria de Gauss-Bonnet-Chern e suas aplicações / João Rodriguez Marcondes. - 2022.
41 p.

Orientador: Detang Zhou.
Dissertação (mestrado)-Universidade Federal Fluminense, Instituto de Matemática e Estatística, Niterói, 2022.

1. Geometria Diferencial. 2. Produção intelectual. I. Zhou, Detang, orientador. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.

CDD - XXX

Bibliotecário responsável: Debora do Nascimento - CRB7/6368

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

João Rodriguez Marcondes

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requesito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Título da tese:

A Teoria de Gauss-Bonnet-Chern e suas aplicações

Defendida publicamente em 26 de agosto de 2022.

Diante da banca examinadora composta por:

Detang Zhou	UFF	Orientador
Gregorio da Silva Neto	UFAL	Examinador
Ernani de Sousa Ribeiro Júnior.	UFC	Examinador
Carlo Penafiel	UFRJ	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DO(A) ORIENTADOR(A)

Autor(a) da Dissertação: João Rodriguez Marcondes
Data da defesa: 26/08/2022
Orientador(a): Zhou Detang

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, 26/08/2022.

Detang Zhou

Nome do orientador(a)

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer ao meu orientador Zhou Detang por toda ajuda, suporte e por ter-me ensinado tanto durante o tempo curto que é um mestrado. Gostaria também de agradecer aos meus professores Ralph Teixeira e Vitor Balestro por terem-me ensinado tanto sobre Geometria e sobre como aprender e falar sobre matemática.

Além disso gostaria de agradecer a minha família por todo o suporte e ajuda que me deram e para a minha querida Bruna por toda a motivação e suporte emocional, esses que foram vitais para ter concluído meu mestrado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

O Teorema de Gauss-Bonnet-Chern em dimensões maiores que 2, de forma intrinsica ao ambiente, é conhecida desde sua publicação em 1944 no artigo [Che44]. Essa dissertação de mestrado, sob a orientação do professor Zhou Detang (UFF), contém a demonstração original de S. S. Chern e conclui com a sua demonstração em [Che55] do Teorema de Milnor, que foi provado primeiramente por J. Milnor. Esses resultados são obtidos a partir da elegante maneira de escrever o tensor de curvatura utilizando a matriz de curvatura e as restrições que se pode tirar sobre o tensor de curvatura como feito por R. L. Bishop e S. I. Goldberg em [BG64].

Palavras-chave: Geometria Diferencial; Matriz de Curvatura; Gauss-Bonnet-Chern.

ABSTRACT

The Gauss-Bonnet-Chern Theorem in dimensions larger to 2, in a intrinsic way to the ambient, has been known since its publication in 1944 in the paper [Che44]. This master's thesis, under the guidance of Professor Zhou Detang (UFF), contains the original demonstration of S. S. Chern and concludes with his [Che55] demonstration of Milnor's Theorem, which was first proved by J. Milnor. These results are obtained from the elegant way of writing the curvature tensor using the curvature matrix and the restrictions one can take on the curvature tensor as done by R. L. Bishop and S. I. Goldberg in [BG64].

Keywords: Differential Geometry; Curvature Matrix; Gauss-Bonnet-Chern.

Sumário

CAPÍTULO 1

Introdução

Neste capítulo iremos relembrar os resultados fundamentais, assim como as definições dos objetos matemáticos que serão utilizados no decorrer do trabalho. Assumiremos que o leitor já possui um conhecimento prévio sobre o assunto de variedades diferenciáveis, citamos como referência ao leitor interessado o livro [Tu10] e [CCL16]. Vale ressaltar que se o leitor encontrar alguma dúvida quando a formas diferenciaveis ou quanto ao enunciado do teorema de Poincaré-Hopf, no Apêndice falamos um pouco sobre esses assuntos.

Durante o decorrer da dissertação, M denotará uma variedade diferenciável, compacta, orientável e de dimensão n, na maioria dos casos de dimensão par.

1.1 Conexões Afins

O espaço E vai representar TM, T^*M ou produtos entre esses espaços, podendo variar a depender da utilidade (de fato basta que E seja um fibrado vetorial sobre M).

Definição 1. *Seja M uma variedade, e denote por T_p o seu espaço tangente no ponto $p \in M$. Dessa forma definimos*

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{r\ vezes} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_{s\ vezes} \tag{1.1}$$

e

$$T_s^r = \bigcup_{p \in M} T_s^r(p). \tag{1.2}$$

Chamaremos T_s^r de um (r,s) **fibrado tensorial** em M, a função projeção π que leva $T_s^r(p) \to p$ será chamada de **projeção do fibrado** e $T_s^r(p)$ é chamado de fibra do **fibrado** T_s^r. O nome fibra vem da ideia de que estamos pegando um pequeno pedaço do conjunto inteiro e ao juntar cada uma de suas fibras podemos recuperar o conjunto inicial.

Definição 2. *Suponha que $\Gamma : M \to T_s^r$ é uma aplicação suave. Se*

$$\pi \circ \Gamma = id : M \to M, \tag{1.3}$$

então Γ é dito uma seção suave do fibrado tensorial T_s^r, ou um campo tensorial (r,s) suave em M.

Dessa forma é fácil ver que uma seção do fibrado tangente é um campo vetorial em M. Podemos estender a Definição 2 para espaços vetoriais definidos em M, de forma que, se E é um espaço vetorial em M e $\Gamma : M \to E$ é uma seção então denotamos ela por $\Gamma(E)$. Com essa nova notação os campos de vetores tangentes suaves são tais que $X \in \Gamma(TM)$ e as r-formas diferenciais alternadas são tais que $w \in \Gamma(\Lambda^r T^* M)$.

Definição 3. *Uma **conexão** em E*

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

que satisfaz as seguintes condições

(i) Dados $X_1, X_2 \in \Gamma(E)$, então $\nabla(X_1 + X_2) = \nabla X_1 + \nabla X_2$.

(ii) Dado $X \in \Gamma(E)$ e $\alpha \in C^\infty(M)$, então $\nabla(\alpha X) = d\alpha \otimes X + \alpha \nabla X$.

Note que pela segunda propriedade, se tomarmos $\alpha = c$ for uma constante, obtemos que

$$\nabla(cX) = c\nabla X.$$

Portanto ∇ leva a seção nula na seção nula, além disso junto da primeira propriedade ele se torna um operador linear. Se $X, Y \in \Gamma(TM)$ são campos de vetores tangentes então denotando

$$\nabla_X Y = \nabla Y(X),$$

teremos uma aplicação que vai de $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM)$ para $\Gamma(TM)$, que é a maneira com que o Manfredo define em [Car15b], pois teremos o seguinte lema.

Lema 1. *Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(E)$ quaisquer, $\alpha \in C^\infty(M)$. Então*

(1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(2) $\nabla_{\alpha X} Y = \alpha \nabla_X Y$,

(3) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$ e

(4) $\nabla_X(\alpha Y) = (X\alpha)Y + \alpha \nabla_X Y$.

Demonstração. As propriedades (1) e (2) vem do fato de se $du \in T_p^*M$, então $du(\alpha X + Y) = \alpha du(X) + du(Y)$, a propriedade (3) vem do fato de $\otimes$ ser distributivo. A última vem do fato de como

$$\nabla_X(\alpha Y) = \nabla \alpha Y(X),$$

por (ii) da Definição 3

$$\nabla \alpha Y(X) = (d\alpha \otimes Y + \alpha \nabla Y)X = d\alpha(X)Y + \alpha \nabla Y(X) = (X\alpha)Y + \alpha \nabla_X Y.$$

□

Observação 1. *Aqui vale deixar claro o que significa* $\nabla Y(X)$*, note que como* $\nabla Y \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$*, podemos escrever em uma base desse espaço*

$$\nabla Y = e_i^* \otimes e_j,$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ *é a base de* TM *e* $\{e_1^*, \dots, e_n^*\}$ *é base de* T^*M *(ao menos localmente). Dessa forma teremos que*

$$\nabla Y(X) = e_i^* \otimes e_j(X) = e_i^*(X) \cdot e_j,$$

logo vai ser um vetor no espaço tangente.

Um fato que será muito importante é o de que a conexão está definida por um conjunto de 1-formas ao menos localmente. Tome uma vizinhança $U \subset M$ onde tenha como coordenadas locais o conjunto $\{u^1, \dots, u^n\}$, tome também o conjunto de seções $\{X_1, \dots, X_n\}$ de E de forma que seja uma base de $\Gamma(E)$ (no caso de TM esse seria um frame móvel local). Portanto, para cada $p \in U$, sabemos que o conjunto $\{du^i \otimes X_j; 1 \leq i, j \leq n\}$ é base do espaço $T_p^* \otimes E_p$.

Como ∇X_α, onde $1 \leq \alpha \leq n$, é uma seção em $T_p^* \otimes E_p$, tem que existir funções suaves $\Gamma_{\alpha i}^\beta$ em U tais que

$$\nabla X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i \otimes X_\beta. \tag{1.4}$$

Denote por

$$w_\alpha^\beta = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{\alpha i}^\beta du^i,$$

dessa forma (1.1) se torna

$$\nabla X_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} w_\alpha^\beta \otimes X_\beta. \tag{1.5}$$

A partir de agora para simplificar as contas iremos utilizar a seguinte notação matricial. Denotemos por

$$S = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

e

$$w = (w_\alpha^\beta).$$

Dessa forma a versão matricial de (1.2) se torna

$$\nabla S = w \otimes S, \tag{1.6}$$

essa matriz w de 1-formas é chamada de **matriz da conexão**, note que ela depende do referencial móvel que tomarmos. Se tomarmos outro referencial, ou seja, se existir matriz A tal que

$$\overline{S} = AS,$$

onde $A = (a_{ij})$ é uma matriz de funções tal que $det(A) \neq 0$ em U. Sendo $\overline{w}$ a matrix da conexão nesse novo frame de coordenadas, temos que

$$\nabla\overline{S} = \nabla(AS) = dA \otimes S + A \cdot DS,$$

pela propriedade (ii) da Definição 3, além disso como $DS = w \otimes S$ e com $\otimes$ é distributivo, temos que

$$dA \otimes S + A \cdot DS = (dA + A \cdot w) \otimes S = (dA \cdot A^{-1} + A \cdot w \cdot A^{-1}) \otimes \overline{S},$$

onde na última igualdade usamos o fato de escalares poderem passar de um elemento para o outro no produto $\otimes$.

Note que a matriz de conexão w é unicamente determinada por um referencial móvel devido ao fato de depender da combinação linear na base. Portanto pela igualdade que acabamos de mostrar, temos que

$$\overline{w} = dA \cdot A^{-1} + A \cdot w \cdot A^{-1}. \tag{1.7}$$

Observação 2. *Isso nos diz como a matriz da conexão varia de acordo com a mudança do referencial móvel, além disso, ela nos informa que ∇ não é um tensor, pois sua caracterização na base é w e esta muda de acordo com a equação acima. Mas, note que se ∇_1 e ∇_2 são duas conexões, apesar delas não serem tensores temos que $\nabla_1 - \nabla_2$ vai ser um tensor. Isso ocorre pois se w_1 for a matriz de ∇_1 e w_2 for a matriz de ∇_2, então pela equação acima, ao mudarmos a base teremos que a base de $\nabla_1 - \nabla_2$ será*

$$\overline{w}_1 - \overline{w}_2 = dA \cdot A^{-1} + A \cdot w_1 \cdot A^{-1} - dA \cdot A^{-1} - A \cdot w_2 \cdot A^{-1} = A \cdot (w_1 - w_2)A^{-1}.$$

Como

$$\overline{w}A = dA + Aw,$$

aplicando a deriva exterior de ambos os lados e usando a propriedade da derivada do produto e que $d(df) = 0$ se f for uma função, temos que

$$d\overline{w}A - \overline{w} \wedge dA = dA \wedge w + Adw,$$

onde o produto $\wedge$ entre as matrizes é feito de forma como o produto matricial. Como $dA = \overline{w}A - Aw$, temos que

$$d\overline{w}A - \overline{w} \wedge (\overline{w}A - Aw) = (\overline{w}A - Aw) \wedge w + Adw,$$

usando a distributiva e o fato de funções poderem passar de um elemento para o outro do produto $\wedge$ temos que

$$(d\overline{w} - \overline{w} \wedge \overline{w})A + A\overline{w} \wedge w = A(dw - w \wedge w) + A\overline{w} \wedge w,$$

portanto temos que

$$(d\overline{w} - \overline{w} \wedge \overline{w})A = A(dw - w \wedge w). \tag{1.8}$$

Definição 4. *A matriz de 2- formas $\Omega = dw - w \wedge w$ é chamada **matriz de curvatura** da conexão ∇ em U.*

Com essa definição, note que ela depende do frame móvel, mas a equação (1.5) nos diz que

$$\overline{\Omega} = A \cdot \Omega \cdot A^{-1}. \tag{1.9}$$

Uma outra definição que virá a ser bem importante é a seguinte.

Definição 5. *Se a conexão ∇ é tal que, dados $X, Y \in T_pM$ quaisquer, se*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

*então ∇ é dita uma conexão **simétrica**, onde $[\cdot, \cdot]$ representa os colchetes de Lee.*

Observação 3. *Caso o leitor esteja acompanhando no livro [CCL16], vale ressaltar que ele atribui o nome **torsion-free** para essas conexões. Isso se deve ao fato de ele definir o seguinte tensor*

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y],$$

*e denominar ele como **tensor de torção**.*

1.2 Geometria Riemanniana

Agora vamos começar a estudar variedades Riemannianas, para isso seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Seja $g : TM \times TM \to \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear e simétrica, sendo (U, u^i) um sistema de cartas locais de M, se $X = \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial u^i}$ e $Y = \sum_j y_j \frac{\partial}{\partial u^j}$ são quaisquer, então

$$g(X, Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j g(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) = \sum_i \sum_j x_i y_j g_{ij},$$

onde g_{ij} é uma função diferenciável em M. Se

- $g(X, X) \geq 0$ para todo $X \in TM$,
- $g(X, X) = 0$ implica que $X = 0$.

Então g é dita positiva definida, isso equivale a matrix (g_{ij}) ser positiva definida em todo ponto. Dizemos que g é não degenerada se $g(X, Y) = 0$ para todo $Y \in TM$ implicar que $X = 0$.

Observação 4. *Note que fica implícito que ao escrevermos $g(X, Y)$, então $X, Y \in T_pM$ para algum $p \in M$.*

Note que podemos escrever de outra forma g, seja

$$g' := g_{ij} du^i \otimes du^j,$$

então teremos que

$$g'(X, Y) = g_{ij} x_i y_j = g(X, Y),$$

e isso vale para quaisquer pares de vetores no fibrado tangente, portanto isso nos permite escrever g como um elemento de $\Gamma(T^*M \otimes T^*M)$.

Definição 6. *Se existir função g simétrica, bilinear, positiva definida e não degenerada como acima, então M é dita variedade Riemanniana. Além disso, g é chamada de métrica da variedade diferenciável M.*

A função g é chamada métrica pois ela define um produto interno no espaço vetorial $TM \times TM$, logo ela nos da uma forma de como medir comprimentos e ângulos no espaço tangente a variedade. Note que podem existir diversas métricas, visto que sendo f uma função diferenciável em M e sempre positiva, podemos definir $\overline{g}(X,Y) = f(p)g(X,Y)$ para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$, dessa forma ela claramente será uma nova métrica.

Como g nos da um produto interno, uma outra possível notação para ele é $g(X,Y) = \langle X, Y\rangle$. Dessa forma podemos definir a norma

$$|X| = \sqrt{g(X,X)} = \sqrt{\sum_i \sum_j g_{ij} x_i x_j}.$$

Aqui fica claro que para simplificar os cálculos seria muito mais simples se $g_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$, logo na maioria das vezes iremos tomar como base um frame móvel ortonormal em relação a métrica, de forma que as contas fiquem bem mais simples.

Teorema 1. *Existe uma métrica Riemanniana em toda variedade n-dimensional diferenciável M (Hausdorff e com base enumerável).*

Demonstração. Seja $(\varphi_\alpha, V_\alpha)$ uma cobertura de M por vizinhanças coordenadas e seja f_α uma partição diferenciável da unidade subordinada a cobertura $\{V_\alpha\}$. Isso significa que:

(1) Para todo $p \in M$, existe $U \subset M$, tal que se $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$, então α pertence a um conjunto finito de subindices.

(2) $f_\alpha \geq 0$, $f_\alpha = 0$ no complementar de $\overline{V}_\alpha$.

(3) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$ para todo $p \in M$.

Com isso a ideia será fazer o pullback via as funções φ_α do plano tangente para $\mathbb{R}^n$, este que temos o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ canonico. Para fazer dessa forma, seja $p \in M$, para todo α tal que $p \in V_\alpha$, seja $u, v \in T_pM$, defina

$$\langle u, v\rangle_p^\alpha = \langle (d\varphi_\alpha)_p(u), (d\varphi_\alpha)_p(v)\rangle,$$

dessa forma podemos definir

$$g_p(u,v) = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle u, v\rangle_p^\alpha,$$

com isso devido as propriedades do produto interno canônico é fácil ver que g será uma métrica positiva definida e não degenerada. Além disso, a diferenciabilidade de g vem da diferenciabilidade das funções f_α e da diferenciabilidade de φ_α. $\square$

Esse é um resultado extraordinário, pois demonstra que de certa forma, sempre podemos trabalhar com alguma métrica. O que no da muitas informações sobre a variedade e nos permite gerar muitos resultados fortes sobre a topologia da variedade. Muitas vezes é útil entender o que acontece com uma métrica ao mudarmos de um sistema de coordenadas para outro, visto que pode ser muito conveniente em alguns problemas usar um sistema de coordenadas diferente que simplifique as contas.

Sabemos que se trocarmos para uma base $\{\frac{\partial}{\partial u'^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u'^n}\}$, como a matriz de mudança de base é $J = (\frac{\partial u^i}{\partial u'^j})$, logo como g é bilinear temos que

$$g'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} g_{kl} \frac{\partial u^k}{\partial u'^i} \frac{\partial u^l}{\partial u'^j},$$

que caracteriza como a métrica se altera de acordo com a mudança de coordenadas. Tendo em mãos a função g, ela nos ajuda a identificar o espaço tangente a variedade com o espaço cotangente. De fato, se $X \in T_pM$ defina

$$\alpha_X(Y) = g(X, Y),$$

então α_X é um funcional linear de T_pM, ou seja, $\alpha_X \in T_p^*M$. Ainda mais que isso, como g é não degenerada, pelo teorema de representação de Riez, sabemos que todo funcional em T_p^*M pode ser representado desta forma, logo se definirmos $\alpha : T_pM \to T_p^*M$ como

$$\alpha(X) = \alpha_X,$$

então α é um isomorfismo e portanto, eles tem a mesma dimensão. Além disso, se tomarmos $u \in T_pM$ e $du \in T_p^*M$ seu dual, podemos pensar em u como um elemento de $(T_p^*M)^*$ fazendo com que $u(dv) = dv(u)$, dessa forma u vira o dual de du, portanto é fácil ver que $T_pM = (T_p^*M)^*$.

Definição 7. *Supondo que (M, g) é uma variedade Riemanniana e ∇ é a sua conexão afim. Então caso sua extensão $\nabla^* : \Gamma(T^*M \otimes T^*M) \to \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M)$, seja tal que*

$$\nabla^* g = 0, \tag{1.10}$$

*então ∇ é dita **compativel com a métrica** em (M, g).*

Aqui precisamos primeiro deixar claro o que queremos dizer com **extensão**, primeiro se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é base de T_pM, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ base de T_p^*M dual a base de T_pM escolhida. Existe uma extensão natural para o dual, seja $w = (w_\alpha^\beta)$ a matriz da conexão na nossa base, seja

$$S = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{pmatrix},$$

a extensão para o dual natural será tal que

$$\nabla \omega_i = -w_j^i \otimes \omega_j,$$

ou seja, tal que

$$\nabla S = -w^T \otimes S.$$

Observação 5. *A questão fundamental se torna porque essa é a extensão mais* ***natural****. Temos um pareamento natural entre os elementos de T_pM e T_p^*M, esse é tal que se $u \in T_pM$ e $\omega \in T_p^*M$ então*

$$\langle u, \omega \rangle = \omega(u)$$

Dessa forma note que sendo u e dv fixos, considerando suas extensões para se tornarem referenciais móveis será uma função de M em $\mathbb{R}$ diferenciável. Portanto sabemos que podemos aplicar a derivada exterior nela (que será a diferencial da função), a coisa mais natural a se pedir sobre a conexão no dual é que ela seja tal que, se $s \in T_pM$, então

$$d\langle u, \omega \rangle(s) = \langle \nabla_s u, \omega \rangle + \langle u, \nabla_s^* \omega \rangle \tag{1.11}$$

ou seja, que ela de certa forma respeite a regra do produto para a derivada. Note que independente de qualquer coisa, se temos uma base $\{u_1, \ldots, u_n\}$ do tangente e $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ do dual (uma dual a outra), podemos fazer análogo ao que foi feito para ∇ e obter uma expressão matricial para ∇^*. Portanto, existe matriz de 1-formas tal que

$$\nabla^* \omega_i = a_{ij} \otimes \omega_j,$$

dessa forma a questão vira mostrar que $a_{ij} = -w_j^i$.

Para isso temos que desenvolver a expressão (1.11), usando nessa equação u_i e ω_j e usando a definição matricial temos que

$$\nabla_s u_i = w_i^k(s) e_k$$

e

$$\nabla_s^* \omega_j = a_{jk}(s) \omega_k.$$

Substituindo ambas em (1.11), obtemos que

$$d\langle u_i, \omega_j \rangle = \langle w_i^k(s) e_k, \omega_j \rangle + \langle u_i, a_{jk}(s) \omega_k \rangle = \omega_j(w_i^k(s) e_k) + a_{jk}(s) \omega_k(u_i),$$

usando a linearidade das formas diferenciaveis e o fato das bases serem duais, temos que

$$d\langle u_i, \omega_j \rangle = w_i^j(s) + a_{ji}(s),$$

por outro lado, notemos que

$$\langle u_i, \omega_j \rangle = \delta_{ij}$$

é constante, logo

$$d\langle u^i, \omega_j \rangle = 0.$$

Portanto, juntando as duas igualdades temos que

$$a_{ji}(s) = -w_i^j(s)$$

para todo vetor $s \in T_pM$, isso implica que $a_{ji} = -w_i^j$. Para o caso de espaços produto a extensão mais natural é obviamente tal que se por exemplo $X, Y \in T_pM$, então

$$\nabla^*(X \otimes Y) := \nabla X \otimes Y + X \otimes \nabla Y.$$

Então, como

$$g = g_{ij} du^i \otimes du^j,$$

temos que

$$\begin{aligned}\nabla^* g &= dg_{ij} \otimes du^i \otimes du^j + g_{ij} \nabla^*(du^i \otimes du^j) \\ &= dg_{ij} \otimes du^i \otimes du^j + g_{ij}(\nabla^* du^i \otimes du^j + du^i \otimes \nabla^* du^j), \\ &= dg_{ij} \otimes du^i \otimes du^j + g_{ij}(-w_k^i \otimes du^k \otimes du^j + du^i \otimes (-w_k^j \otimes du^k)),\end{aligned}$$

pois

$$\nabla^* du^i = -w_k^i \otimes du^k.$$

Logo note que como i, j e k estão variando de 1 a n, na parte que tem g_{ij} em evidência, podemos trocar i por k no primeiro termo gerado na distributiva e j por k no segundo, portanto

$$\nabla^* g = (dg_{ij} - w_i^k g_{kj} - w_j^k g_{ik}) \otimes du^i \otimes du^j$$

ser compativel com a métrica é equivalente a

$$dg_{ij} = w_i^k g_{kj} + w_j^k g_{ik}. \tag{1.12}$$

A principio pode parecer confuso devido a grande quantidade de indices, mas matricialmente isso significa que

$$dg = w \cdot g + g \cdot w^T,$$

onde

$$g = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

e

$$w = \begin{pmatrix} w_1^1 & \cdots & w_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n^1 & \cdots & w_n^n \end{pmatrix}.$$

Teorema 2. *Sendo (M, g) uma variedade n-dimensional Riemanniana. Então existe uma única conexão ∇ simétrica e compatível com g, está é chamada de* ***conexão de Levi-Civita****.*

A existência e unicidade da conexão de Levi-Civita é um resultado de extrema importância em geometria Riemanniana e recomendamos fortemente ao leitor a ler em [Car15b] ou [CCL16] a demonstração.

Observação 6. *Caso desejemos trabalhar com um referencial móvel qualquer, sendo ele $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e matriz da conexão ∇ nesse frame sendo (θ_i^j), ou seja*

$$\nabla e_i = \theta_i^j \otimes e_j,$$

Se denotarmos g_{ij} como sendo $g(e_i, e_j)$, pelo mesmo argumento feito anteriormente

$$g = g_{ij}\theta^i \otimes \theta^j,$$

logo desenvolvendo analogamente temos que ser compatível com a métrica é

$$dg_{ij} = \theta_i^k g_{kj} + \theta_j^k g_{ik},$$

ou seja, ser compatível com a métrica quando visto em uma base qualquer, implica a mesma igualdade para g_{ij} só que na nova base e usando a matriz da conexão nesta base.

Observação 7. *Note que se nos restringirmos a um referencial móvel ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$, então $g_{ij} = \delta_{ij}$, portanto a equação (1.11) se torna*

$$\theta_i^j + \theta_j^i = 0, \tag{1.13}$$

o que nos diz que a matriz da conexão (θ_i^j) é antisimétrica.

Relembrando que a matriz de curvatura da conexão de Levi-Civita, caracterizada por w, é definida como

$$\Omega = dw - w \wedge w,$$

Como já sabemos que

$$dg = w.g + g.w^T, \tag{1.14}$$

derivando a igualdade acima, já que $d(dg) = 0$ teremos

$$dw.g - w \wedge dg + dg \wedge w^T + g(dw)^T = 0.$$

Usando (1.12)

$$dw.g - w \wedge (w.g + gw^T) + (w.g + g.w^T) \wedge w^T + g(dw)^T = 0,$$

então

$$(dw - w \wedge w)g - gw \wedge w^T + g(dw)^T + gw^T \wedge w^T + gw \wedge w^T = 0,$$

como $w^T \wedge w^T = -(w \wedge w)^T$, deduzimos que

$$(dw - w \wedge w)g + g(dw - w \wedge w)^T = 0.$$

Usando a definição de Ω e o fato de g ser simétrica, temos que

$$\Omega.g + (\Omega g)^T = 0.$$

Observação 8. *Durante a prova foi usado o fato de que*

$$w^T \wedge w^T = -(w \wedge w)^T.$$

Para o esclarecimento do leitor, note que se A, B são matrizes de 1-formas (assim como w), então como o produto dessas matrizes com $\wedge$ é feito da mesma forma que o produto matricial usual, teremos que

$$(A \wedge B)^T = -B^T \wedge A^T.$$

Basta verificar a demonstração de que para matrizes reais vale que $(AB)^T = B^T A^T$ e observar que na demonstração se usarmos o produto como sendo $\wedge$, na hora de de usarmos a comutatividade como estamos com o produto $\wedge$ de 1-formas o sinal vai trocar, de resto a prova é análoga ao caso real.

Definindo $\Omega.g = (\Omega_{ij})$, isso implica

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0, \tag{1.15}$$

portanto a matriz (Ω_{ij}) é antisimétrica. Além disso, como ela é formada por 2-formas, sabemos que existem um conjunto único de funções diferenciaveis R_{ijkl}, antisimétrico com relação a k e l, tais que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} du^k \wedge du^l,$$

Observação 9. *Caso queira remover a hipótese de ser antisimétrico, para ter unicidade é necessário remover o $\frac{1}{2}$ e pedir que o somátorio seja feito com $k < l$.*

Agora iremos começar a ver o poder de estudar a curvatura dessa forma quando comparado a estudar o tensor de curvatura, como ocorre se seguirmos um curso de Geometria Riemanniana pelo livro [Car15b]. Sabemos que o tensor de curvatura é

$$R(X, Y, Z, W) = g(R(X, Y)Z, W) = g(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z, W)$$

e denotamos em uma base $\{e_i; 1 \leq i \leq n\}$, como

$$R_{ijkl} = g(R(e_i, e_j)e_k, e_l)$$

A parte surpreendente é que vendo a curvatura da forma que estamos fazendo, os valores dos R_{ijkl} que aparecem são **exatamente iguais** a R_{ijkl} se fizermos como foi feito no capítulo 4 de [Car15b]. Para ver isso seria necessário desenvolver em coordenadas e símbolos de Chrystofell, e então observar que ambos são exatamente iguais, o leitor interessado pode encontrar esses cálculos na página 141, equação (1.52) do livro [CCL16] e ver que é exatamente igual ao que aparece no fim da página 103 do livro [Car15b].

Tendo em vista que ambas as formas são equivalentes, iremos agora usar a maneira feita pelo Manfredo para que as próximas contas sejam bem mais simples. Portanto denotando o tensor de curvatura como

$$R(X, Y, Z, T) = (X, Y, Z, T),$$

sabemos que ele satisfaz

(i) $(X, Y, Z, T) + (Y, Z, X, T) + (Z, X, Y, T) = 0,$

(ii) $(X, Y, Z, T) = -(Y, X, Z, T),$

(iii) $(X, Y, Z, T) = -(X, Y, T, Z)$ e

(iv) $(X, Y, Z, T) = (Z, T, X, Y).$

O leitor interessado pode encontrar uma prova dessas propriedades em [Car15b] página 101.

Observação 10. *Vale ressaltar que essas propriedades serão muito importantes no Cápitulo 3 e elas dependem fortemente do fato da conexão ser simétrica. Quanto à necessidade de ser compatível com a métrica, ficará claro no cápitulo 2, pois implica que no caso de um frame ortonormal, a matriz da conexão torna-se anti-simétrica e este fato será muito importante.*

Com essas propriedades em mãos, usando como produto interno a métrica g e a norma induzida por esse produtor interno, temos a seguinte Proposição.

Proposição 1. *Seja $\sigma \in T_pM$ um plano do espaço tangente e sejam $X, Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$K(X,Y) = \frac{-(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

não depende da escolha de $X, Y \in \sigma$.

Demonstração. Vamos provar primeiramente que dados $X, Y \in \sigma$ linearmente independentes, então

(1) $K(X,Y) = K(Y,X)$

(2) $K(\lambda X, Y) = K(X,Y)$

(3) $K(X + \lambda Y, Y) = K(X,Y)$

e com essas propriedades como $\sigma = span\{X,Y\}$, podemos, gerar qualquer outra base de σ com as operações acima e devida a essas propriedades, $K(X,Y)$ ficara invariante. Para provar o primeiro item basta usar a propriedade (iv) do tensor de curvatura, para (2) basta usar o fato do tensor de curvatura ser linear em cada coordenada, juntamente as propriedades da métrica. Para provar (3) iremos fazer o cálculo explicitamente

$$K(X+\lambda Y, Y) = \frac{-(X+\lambda Y, Y, X+\lambda Y, Y)}{||X+\lambda Y||^2||Y||^2 - \langle X+\lambda Y, Y\rangle^2},$$

usando a linearidade em cada entrada do tensor de curvatura e as propriedades da métrica

$$K(X+\lambda Y, Y) = -\frac{(X,Y,X,Y) + \lambda(\overbrace{Y,Y,X,Y}^{\text{zero por (ii)}}) + \lambda(\overbrace{(X,Y,Y,Y)}^{\text{zero por (iii)}}) + \lambda^2(\overbrace{(Y,Y,Y,Y)}^{\text{zero por (ii)}})}{\langle X+\lambda Y, X+\lambda Y\rangle||Y||^2 - \langle X,Y\rangle^2 - 2\lambda\langle X,Y\rangle\langle Y,Y\rangle - \lambda^2\langle Y,Y\rangle^2},$$

desenvolvendo o produto interno no denominador e cortando os respectivos termos que se cancelam, obtemos

$$K(X+\lambda Y, Y) = \frac{-(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2} = K(X,Y).$$

□

Definição 8. *Seja $p \in M$ e $\sigma \in T_pM$ um plano, então o número $K(X,Y) = K(\sigma)$, onde X, Y gera σ, é chamado **curvatura seccional** de σ em p.*

Um dos fatos mais importantes da curvatura seccional é suas diversas aplicações como será visto no Capitulo 3. Mas além disso ela define completamente o tensor de curvatura R, no sentido de que conhecido $K(\sigma)$ para todo $\sigma \in T_pM$, então o tensor de curvatura está totalmente definido. Isso se vem devido ao seguinte lema algébrico

Lema 2. *Sejam E um espaço vetorial com produto interno. Sejam*

$$R : E \times E \times E \to E,$$

$$R' : E \times E \times E \to E$$

aplicações tri-lineares tais que satisfazem as condições $(i), (ii), (iii)$ e (iv), onde

$$(X,Y,Z,T) = \langle R(X,Y)Z,T\rangle, \ \ (X,Y,Z,T)' = \langle R'(X,Y)Z,T\rangle$$

Sejam $X, Y \in E$ dois vetores linearmente independes, sendo

$$K(\sigma) = \frac{-(X,Y,X,Y)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}, \ \ K'(\sigma) = \frac{-(X,Y,X,Y)'}{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2},$$

onde $\sigma = span\{X,Y\}$. Se para todo $\sigma \subset E$, tivermos que $K(\sigma) = K'(\sigma)$, então $R = R'$.

Demonstração. Queremos mostrar que $(X,Y,Z,T) = (X,Y,Z,T)'$ para quaisquer $X,Y,Z,T \in E$. Para simplificar a notação, quando ao lado direito tivermos $(\dots)'$ vai significa que será a mesma expressão do lado esquerdo só que com $(X,Y,Z,T)'$. Note que a hipótese nos diz que

$$(X,Y,X,Y) = (X,Y,X,Y)'$$

para quaisquer $X,Y \in E$, logo

$$(X+Z,Y,X+Z,Y) = (X+Z,Y,X+Z,Y)',$$

então

$$(X,Y,X,Y) + 2(X,Y,Z,Y) + (Z,Y,Z,Y) = (\dots)'.$$

Usando a hipótese, obtemos

$$\Rightarrow (X,Y,Z,Y) = (X,Y,Z,Y)',$$

para quaisquer $X,Y,Z \in E$. Isto nos garante que

$$(X,Y+T,Z,Y+T) = (X,Y+T,Z,Y+T)',$$

consequentemente

$$(X,Y,Z,Y) + (X,Y,Z,T) + (X,T,Z,Y) + (X,T,Z,T) = (\dots)',$$

usando o fato que provamos podemos cortar o primeiro e quarto termo, obtendo

$$(X,Y,Z,T) + (X,T,Z,Y) = (\dots)'.$$

Organizando os termos e usando as propriedades (iv) e depois a (ii) do lado direito temos que

$$(X,Y,Z,T) - (X,Y,Z,T)' = (Y,Z,X,T) - (Y,Z,X,T)'.$$

Isso significa que permutações cíclicas nos 3 primeiros termos não alteram o valor de $(X,Y,Z,T) - (X,Y,Z,T)'$. Portanto, usando a propriedade (i) temos que

$$3[(X,Y,Z,T) - (X,Y,Z,T)'] = 0$$

ou seja,

$$(X,Y,Z,T) = (X,Y,Z,T)',$$

para quaisquer vetores $X,Y,Z,T \in E$. $\square$

CAPÍTULO 2

Gauss-Bonnet-Chern

O teorema de Gauss-Bonnet-Chern é um teorema clássico na teoria global de geometria differencial devido ao fato de estabelecer uma conexão entre as propriedades topológicas da variedade com a sua curvatura, que é um conceito local. Neste capítulo faremos a demonstração de forma similar ao que foi feito por Chern em [Che44].

2.1 Dimensão 2

Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão 2, compacta e orientável, $p \in M$ e U uma vizinhança do ponto p. Tome um referencial móvel $\{e_1, e_2\}$ em U de forma que ele tenha a mesma orientação de M, denote por $\{\theta^1, \theta^2\}$ o conjunto de 1-formas associadas ao nosso referencial móvel, isto é,

$$\theta^i(e^j) = \delta_{ij},$$

onde δ_{ij} é o delta de kronecker. Denotaremos por g a métrica de M, dessa forma sabemos que pelo Teorema Fundamental da Geometria Riemanniana, existe um único conjunto de 1-formas θ_i^j tais que

$$\begin{cases} d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i \\ dg_{ij} = g_{ik}\theta_j^k + g_{kj}\theta_i^k. \end{cases} \tag{2.1}$$

Além disso essas 1-formas definem a conexão de Levi-Civita ∇ e a matriz de curvatura de acordo com as seguintes equações:

$$\nabla e_i = \theta_i^j \otimes e_j, \tag{2.2}$$

$$\Omega_i^j = d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j \tag{2.3}$$

Dessa forma definindo $\Omega_{ij} = \Omega_i^k g_{kj}$ assim como feito no Cápitulo 1, temos que pela equação (1.16), (Ω_{ij}) é anti-simétrica. Como neste caso nós estamos nos restringindo ao caso de dimensão 2, sabemos que os indices só podem ser 1 ou 2. Dessa forma pela mesma equação que nos dá a antisimetria temos que $\Omega_{11} = \Omega_{22} = 0$,logo o único termo não nulo da forma de curvatura é Ω_{12}.

Agora faremos uso das fórmulas que caracterizam a mudança de referencial e vizinhança. Relambrando que se $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ é outro referencial móvel compatível com a orientação de M em uma vizinhança W de p, então existe uma matriz A 2x2 com $det(A) > 0$ tal que

$$\begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Denotando por $\Omega = (\Omega_i^j)$ e $\overline{\Omega}$ a mesma matrix para o novo referencial, $g = (g_{ij})$ e $\overline{g} = (\overline{g}_{ij}) = (\langle \overline{e}_i, \overline{e}_j \rangle)$, temos que

$$\overline{g} = A \cdot g \cdot A^T, \quad \overline{\Omega} = A \cdot \Omega \cdot A^{-1}. \tag{2.5}$$

Se multiplicarmos as equações acima obtemos que

$$\overline{\Omega} \cdot \overline{g} = A(\Omega g)A^T, \tag{2.6}$$

onde se repararmos na maneira com que definimos Ω_{ij}, a matriz com essas entradas é exatamente o produto das matrizes Ω com g, isto é, a equação (2.6) é equivalente à

$$\begin{pmatrix} 0 & \overline{\Omega}_{12} \\ -\overline{\Omega}_{12} & 0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 0 & \Omega_{12} \\ -\Omega_{12} & 0 \end{pmatrix} A^T. \tag{2.7}$$

Portanto, efetuando o produto matricial considerando $A = (a_{ij})$, obtemos que

$$\overline{\Omega}_{12} = a_{11}a_{22}\Omega_{12} - a_{12}a_{21}\Omega_{12} = det(A) \cdot \Omega_{12}. \tag{2.8}$$

Além disso, se denotarmos por $G := det(g)$, $\overline{G} := det(\overline{g})$ e tirarmos o determinante na primeira equação de (2.5) obteremos que

$$\overline{G} = det(A)^2 \cdot G, \tag{2.9}$$

dessa forma se juntarmos as equações (2.8) e (2.9) (aqui usamos também o fato de $det(A) > 0$, ou seja, que a nova base está na mesma orientação de M), segue que

$$\frac{\overline{\Omega}_{12}}{\sqrt{\overline{G}}} = \frac{\Omega_{12}}{\sqrt{G}}. \tag{2.10}$$

Logo, isso implica que a 2-forma $\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{g}}$ é independente da escolha de referencial móvel, desde que ela seja consistente com a orientação. Portanto, basta cobrir a variedade com vizinhanças e em cada uma definir essa 2-forma, pela equação (2.10), ela será bem definida na variedade inteira dessa forma. Agora escolha um sistema de coordenadas u^i com mesma orientação de M, sendo $\{e_1 = \frac{\partial}{\partial u^1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial u^2}\}$ a base natural, temos pelo que foi feito no fim da Seção 1.2 que

$$\Omega_{12} = \frac{1}{2} R_{12kl} du^k \wedge du^l = R_{1212} du^1 \wedge du^2, \tag{2.11}$$

onde a segunda igualdade vale devido as propriedades das formas diferenciais. Com isso

$$\frac{\Omega_{12}}{\sqrt{G}} = \frac{R_{1212}}{G} \sqrt{G} du^1 \wedge du^2 = -K d\sigma, \tag{2.12}$$

onde K é a curvatura seccional, que foi definida na seção 1.2 e $d\sigma = \sqrt{G} du^1 \wedge du^2$ é o elemento de área na orientação de M. Como podemos mudar o referencial de forma que nos for conveniente, tome $\{e_1, e_2\}$ um referencial móvel ortonormal. Fazendo um certo abuso de notação e chamando de Ω_{12} a nova 2-forma, temos que $G = 1$. Portanto

$$K d\sigma = -\Omega_{12} \tag{2.13}$$

Por outro lado, como estamos em um referencial ortonormal, a matriz $g = Id$, portanto temos que

$$\Omega_{12} = d\theta_1^2 - \theta_1^k \wedge \theta_k^2. \tag{2.14}$$

Logo, relembrando a observação 5 na Seção 1.2 temos que a matriz (θ_i^j) é antisimétrica, portanto $\theta_1^1 = \theta_2^2 = 0$. Portanto, temos que

$$\Omega_{12} = d\theta_1^2,$$

dessa forma segue por (2.13) que

$$Kd\sigma = -d\theta_1^2. \tag{2.15}$$

Note que, a parte chave do argumento é que em um referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$, a matriz (θ_i^j) é antisimétrica. Logo desde que exista um referencial ortonormal em uma vizinhança, existira a uma 1-forma θ_1^2 de forma a satisfazer (2.15).

Quando temos um campo de vetores tangente X em uma variedade M, um ponto $p \in M$ será dito **singular** se $X(p) = 0$. Assuma que existe um campo de vetores tangente em uma vizinhança $U \subset M$ tal que $p \in U$ é o único ponto singular de X em U, dessa forma defina

$$v_1 = \frac{X}{|X|} \tag{2.16}$$

e v_2 de forma que $\{v_1, v_2\}$ seja um referenciál móvel ortonormal em $U - \{p\}$ com a mesma orientação de M. Dessa forma se tomarmos um outro referencial ortonormal $\{e_1, e_2\}$ condizente com a orientação, teremos que

$$\begin{cases} v_1 = cos(\alpha)e_1 + sen(\alpha)e_2 \\ v_2 = -sen(\alpha)e_1 + cos(\alpha)e_2. \end{cases} \tag{2.17}$$

A função α é o ângulo formado pelos vetores v_1 e e_1. Portanto, ela pode assumir múltiplos valores. Porém, sabemos que para cada ponto p em uma vizinhança dela teremos que a função α será contínua e bem definida. Agora defina (w_1^2) a partir da conexão de Levi-Civita na base $\{e_1, e_2\}$, ou seja, ela é tal que

$$\nabla e_1 = w_1^2 \otimes e_2. \tag{2.18}$$

Isso ocorre porque o referencial é ortonormal e a matriz (w_i^j) é antisimétrica, logo $w_1^1 = 0$. Como

$$\nabla v_1 = \theta_1^2 \otimes v_2,$$

usando (2.17) em v_1 e v_2, obtemos que

$$\nabla(cos(\alpha)e_1 + sen(\alpha)e_2) = \theta_1^2 \otimes (-sen(\alpha)e_1 + cos(\alpha)e_2),$$

usando as propriedades de conexão e a distribuitividade de $\otimes$ temos que

$$-sen(\alpha)d\alpha \otimes e_1 + cos(\alpha)\nabla e_1 + cos(\alpha)d\alpha \otimes e_2 + sen(\alpha)\nabla e_2 = -sen(\alpha)\theta_1^2 \otimes e_1 + cos(\alpha)\theta_1^2 \otimes e_2,$$

por (2.18) e a igualdade análoga de ∇e_2

$$(sen(\alpha)w_2^1 - sen(\alpha)d\alpha) \otimes e_1 + (cos(\alpha)w_1^2 + cos(\alpha)d\alpha) \otimes e_2 = -sen(\alpha)\theta_1^2 \otimes e_1 + cos(\alpha)\theta_1^2 \otimes e_2.$$

Portanto, passando tudo para o mesmo lado e colocando mais uma vez em evidência e_1 e e_2, a única forma de isso ser zero é

$$w_1^2 = d\alpha + \theta_1^2, \tag{2.19}$$

aqui usamos o fato de $w_2^1 = -w_1^2$ e o fato de $\{e_1, e_2\}$ ser base do espaço tangente logo para termos $u_1 \otimes e_1 + u_2 \otimes e_2 = 0$, necessariamente $u_1 = u_2 = 0$.

A ideia da prova de Gauss-Bonnet-Chern é começar com um campo de vetores tangente em M, com singularidades isoladas, tomar curvas simples e fechadas ao redor de cada ponto e ir diminuindo seu diamentro. Nesse processo realizaremos a integração com relação a unidade de área e dessa forma obteremos pelo teorema de Poicaré-Hopf o teorema de Gauss-Bonnet-Chern.

Dessa forma tome $B \subset U$ um domínio, isto é, aberto e conexo, tal que $p \in B$ e $C = \partial B$ é uma curva fechada com e simples com p no seu interior. Está curva por ser fechada, podemos assumir sem perda de generalidade que existe $L > 0$ tal que $C(0) = C(L)$. Como C é compacta, e referenciais moveis $\{v_1, v_2\}$ e $\{e_1, e_2\}$ definidos na curva, sabemos que podemos cobrí-la com vizinhanças onde em cada uma delas existe uma função α contínua, dessa forma conseguimos definir uma α em toda C que seja contínua. Porém nem sempre será verdade que $\alpha(0) = \alpha(L)$ (reparametrizando o intervalo de definição para condizer com o de C). Pelo teorema fundamental do cálculo sabemos que

$$\alpha(L) - \alpha(0) = \int_0^L d\alpha \tag{2.20}$$

e como o ponto $C(0) = C(L)$, o lado direito acima tem que ser um múltiplo inteiro de 2π pois é mesmo ângulo formado pelos mesmos vetores.

Iremos mostrar agora que $\alpha(L) - \alpha(0)$ não depende da curva fechada C. Suponha que tenhamos outra curva fechada simples C_1 que seja o bordo de outro dominio D_1 dentro de U com p no interior. Primeiro assuma que as curvas C e C_1 não se intersectam, sem perda de generalidade podemos assumir também que $D_1 \subset D$, logo $D - D_1$ é um dominio em M que possuir orientação induzida em $C - C_1$ por M.

Portanto pela fórmula (2.19), (2.15) e pelo teorema de Stokes temos que

$$\begin{aligned} \int_{C-C_1} d\alpha = \int_{C-C_1} w_1^2 - \int_{C-C_1} \theta_{12} &= \int_{C-C_1} w_1^2 - \int_{D-D_1} d\theta_{12} \\ &= \int_{C-C_1} w_1^2 + \int_{D-D_1} K d\sigma. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Além disso, como w_1^2 depende somente de $\{v_1, v_2\}$ e a curvatura seccional depende somente da métrica, podemos escolher um referencial móvel conveniente. Tome $e_1 = v_1$ e $e_2 = v_2$, dessa forma a função ângulo para esse referencial é $\overline{\alpha} \equiv 0$, portanto

$$\int_{C-C_1} w_1^2 + \int_{D-D_1} K d\sigma = \int_{C-C_1} d\overline{\alpha} = 0, \tag{2.22}$$

substituindo esse valor em (2.21), obtemos que

$$\int_{C-C_1} d\alpha = 0 \text{ ou seja, } \int_C d\alpha = \int_{C_1} d\alpha. \tag{2.23}$$

Isso implica que o número $\alpha(L) - \alpha(0)$ não depende da curva, a princípio isso só ocorre se as curvas não se intersectarem. Mas, caso elas se intersectem como p pertence ao interior de D e D_1 tome um domínio de p que não intersecte C nem C_1 e que tenha como bordo uma curva C_2 simples e fechada. Com isso note que o que provamos implica

$$\int_{C_2} d\alpha = \int_{C_1} d\alpha,$$

$$\int_{C_2} d\alpha = \int_{C} d\alpha.$$

implicando que esse número não depende de forma alguma da curva, isso nos motiva a considerar a seguinte definição.

Definição 9. *Seja X um campo de vetores tangentes suave, com uma singularidade p com vizinhança U_p tal que se $q \in U$ e $q \neq p$ então $X(q) \neq 0$. Então o número inteiro*

$$I_p = \frac{\alpha(L) - \alpha(0)}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_C d\alpha, \tag{2.24}$$

construído analogamente ao que foi feito anteriormente, é chamado de ***índice*** *do ponto p.*

Essa definição faz sentido por não depender da curva C e do referencial móvel $\{e_1, e_2\}$, esse número depende somente do campo X e da variedade.

A intuição geométrica para o que esse número representa é que ele nos diz quantas vezes o campo tangente X rodou ao redor de p quando percorremos C. A ideia do teorema será tomar círculos geodésicos no interior de cada uma dessas vizinhanças U_p e tomar seus raios indo para zero. Para isso precisamos entender o que ocorre com as integrais nesse caso, para isso integre a equação (2.19), use o fato de $\theta_1^2 = -Kd\sigma$ e use o teorema de Stokes, dessa forma obtemos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{S_r} w_1^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{S_r} d\alpha - \frac{1}{2\pi}\int_{B_r} Kd\sigma, \tag{2.25}$$

onde B_r é um círculo geodésico de raio $r > 0$ que está contido em U_p e com p de centro, além disso $S_r = \partial B_r$.

Como K é uma função contínua em M, quando $r \to 0$ temos que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{B_r} Kd\sigma \to 0.$$

Além disso como I_p não depende da curva a equação (2.25) implica que

$$I_p = \frac{1}{2\pi}\lim_{r\to 0}\int_{S_r} w_1^2. \tag{2.26}$$

Teorema de Gauss-Bonnet-Chern 1. *Seja M uma variedade Riemanniana, orientada e de dimensão 2. Então*

$$\frac{1}{2\pi}\int_M Kd\sigma = \mathcal{X}(M). \tag{2.27}$$

Demonstração. Tome um campo X de vetores tangentes e suave em M, com singularidades $\{p_1, \ldots, p_s\}$ isoladas, isto é, para cada uma existe uma vizinhança U_{p_i} de forma que em $U_{p_i} - \{p_i\}$ não exista singularidade. Para cada singularidade tome o círculo geodésico B_{r_i} ao redor de p_i, onde seu raio é tal que $B_{r_i} \subset U_{p_i}$ para todo $1 \leq i \leq r$, além disso denote por $S_{r_i} = \partial B_{r_i}$. Dessa forma, o campo de vetores X define um referencial móvel

$$e_1 = \frac{X}{|X|}$$

e e_2 de forma que $\{e_1, e_2\}$ tenha a orientação de M e seja uma base ortonormal do plano tangente, em $N = M - \cup_i B_{r_i}$. Seja ∇ a conexão de Levi-Cevita, então temos que

$$\nabla e_i = \theta_i^j \otimes e_j, \tag{2.28}$$

dessa forma, por (2.15), temos que em $N := M - \cup_i B_{r_i}$,

$$d\theta_1^2 = \Omega_{12} = -K d\sigma. \tag{2.29}$$

Agora iremos avaliar a integral em (2.27) em N, aplicando o teorema de Stokes temos que

$$\begin{aligned} \int_N K d\sigma &= -\int_N d\theta_1^2 \\ &= \sum_{i=1}^{s} \int_{S_{r_i}} \theta_1^2. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Note que o sinal de menos sumiu ao aplicarmos Stokes pois apesar de o bordo de N ser a união dos S_{r_i}, a orientação induzida em S_{r_i} é oposta a orientação de ∂N visto como subconjunto de N. Além disso, como podemos fazer esse argumento para qualquer raio menor que r_i, tome um $r > 0$ tal que podemos fazer o mesmo argumento e que $r > r_i$ para todo $1 \leq i \leq s$. Dessa forma a equação (2.30) continua verdadeira mesmo se diminuirmos o valor de r. Ademais, como K é contínua e diferenciável em M vale que

$$\lim_{r \to 0} \int_N K d\sigma = \int_M K d\sigma, \tag{2.31}$$

pois $N \to M$ quando $r \to 0$. Agora note que como estamos considerando $v_1 = e_1$ e $v_2 = e_2$ nas contas que fizemos anterioremente, temos que $w_1^2 = \theta_1^2$. Dessa forma, usando a equação (2.26) quando tiramos o limite $r \to 0$ na equação (2.30) e dividimos por 2π obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_M K d\sigma = \sum_{i=1}^{s} I_{p_i} = \mathcal{X}(M), \tag{2.32}$$

onde a segunda igualdade vem do teorema de Poicaré-Hopf. □

2.2 Dimensão 2n

Agora vamos provar o caso dimensões pares maiores que dois, seja $n = 2d$ a dimensão de M. Tome um sistema de cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ em M, considere S_n como o conjunto das permutações de $\{1, \ldots, n\}$ e tome um referencial ortonormal $\{e_1, \ldots e_n\}$ com as 1-formas $\{w_i^j | 1 \leq i, j \leq n\}$, em U_α, tais que $\nabla e_i = w_i^j \otimes e_j$ assim como no capítulo 1. Dessa forma defina a n-forma $\Omega_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \Lambda^n T^* M)$ como

$$\Omega_\alpha = \frac{(-1)^d}{4^d \pi^d (d!)} \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge \Omega_{\sigma(n-1)\sigma(n)}. \tag{2.33}$$

Lema 3. *Podemos definir uma n-forma diferencial Ω^*, como sendo a forma Ω_α em cada aberto. Está forma é bem definida e não depende do referencial ortonormal que condiz com a orientação.*

Demonstração. Relambrando do Capítulo 1 temos que a matriz, de curvatura é tal que se mudarmos para outro referencial via uma matriz A, teremos que $\Omega^* = A.\overline{\Omega}.A^T$, portanto mudando o referencial temos que

$$\overline{\Omega}_{ij} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{jl}\Omega_{kl}. \tag{2.34}$$

Substituindo (2.38) em (2.37) fica claro que ao mudarmos o referencial não iremos alterar a forma. Ela está bem definida pois caso $U = U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, tome um referencial ortonormal em U e considere a $\overline{\Omega}_U$ a definição 2.37 para este frame. Pelo argumento acima teremos que Ω_α em U tem a mesma definição que a forma diferenciál $\overline{\Omega}_U$ vista que elas estão definidas da mesma forma. Analogamente, $\overline{\Omega}_U = \Omega_\beta$ em U, portanto $\Omega_\alpha = \Omega_\beta$ em U. □

Observação 11. *Neste lema foi usado o fato de que ao mudarmos de base a matriz (Ω_{ij}) muda de acordo com*

$$\overline{\Omega} = A\Omega^* A^T.$$

Isso se deve ao fato de

$$\Omega^* = \Omega.g,$$

onde Ω é a matriz de curvatura e $g = (g_{ij})$ a matriz da métrica na base. Sabemos que pela equação (1.6) do Capítulo 1, a matriz de curvatura muda de forma que

$$\Omega' = A\Omega A^{-1}.$$

Porém, devido as propriedades de produto interno é fácil ver que

$$g' = AgA^T.$$

Dessa forma como $\overline{\Omega} = \Omega'.g'$, temos que

$$\overline{\Omega} = \Omega' g' = A\Omega A^{-1}AgA^T = A\Omega^* A^T.$$

Seja $\pi : SM \to M$ a função projeção que sai do **fibrado esférico**, que é o conjunto dos vetores tangentes de norma 1 em M. Dessa forma note que $\pi^*\Omega^*$ pertence a $\Gamma(SM, \Lambda^n T^*SM)$. Um importante resultado para a prova do teorema é o lema de transgressão, que nos permite fazer análogo ao que fizemos em dimensão 2, devido ao seu caratér combinátorio e a extensão de sua prova iremos omitir sua demonstração.

Lema 4. *Existe uma forma diferencial $\Pi \in \Gamma(SM, \Lambda^{n-1}T^*SM)$ tal que $\pi^*\Omega^* = d\Pi$ e*

$$\int_{SM_x} \Pi = 1 \tag{2.35}$$

Teorema de Gauss-Bonnet-Chern 2. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, orientável de dimensão $n = 2d$. Seja Ω^* a n-forma definida em (2.37), então*

$$\int_M \Omega^* = \mathcal{X}(M) \tag{2.36}$$

Demonstração. Seja X um campo de vetores com singularidades $P = \{p_1, \ldots, p_r\}$ isoladas. Seja $B(r_i)$ a bola centrada em p_i de raio r_i, $S_{r_i} = \partial B(r_i)$ e $N_i = M - \cup\overline{B(r_i)}$, dessa forma temos que

$$\int_M \Omega^* = \int_{N_i} \Omega^* + \int_{\cup\overline{B(r_i)}} \Omega^*,$$

sendo $L_i = \pi^{-1}(N_i)$

$$= \int_{L_i} \pi|_{L_i}^* \Omega^* + \int_{\cup\overline{B(r_i)}} \Omega^*,$$

pelo Lema 4

$$= \int_{L_i} d\Pi|_{L_i} + \int_{\cup\overline{B(r_i)}} \Omega^*,$$

por Stokes

$$= \int_{\pi^{-1}(S_{r_i})} \Pi + \int_{\cup\overline{B(r_i)}} \Omega^*.$$

Como isso vale para todo r_i, fazendo $r_i \to 0$, como Ω^* é contínua em M a segunda integral tende a 0. Além disso como p_i são singularidades, para cada i, a integral na esquerda acima tende a

$$I_{p_i} \int_{SM_{p_i}} \Pi.$$

Logo usando o Lema 4 junto do teorema de Poincaré-Hopf temos que

$$\sum_{i=1}^{r} I_{p_i} \int_{SM_{p_i}} \Pi = \sum_{i=1}^{r} I_{p_i} = \mathcal{X}(M)$$

□

A chave da prova é o incrível fato de que ao separar as sigularidades isoladas, podemos separar a integral e ao usar o lema de transgressão em conjunto com Stokes. A parte mais complexa que difere da dimensão 2 é que antes foi muito mais simples construir a forma diferencial Π e ver que sua integral convergia para o índice da singularidade.

CAPÍTULO **3**

Consequências

Este Capítulo é focado na demonstração do teorema de Milnor, iremos fazer seguindo o que foi feito por S. S. Chern em [Che55].

3.1 Teorema de Milnor

Sabemos pelo capítulo 1 que as 2-formas Ω_{ij} que aparecem na equação (2.37) satisfazem que

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} R_{ijkl} w_k \wedge w_l. \tag{3.1}$$

onde R_{ijkl} representa o tensor de curvatura. Dessa forma como R_{ijij} é definido como a curvatura seccional da variedade quando nos restringimos ao plano gerado por $\{e_i, e_j\}$ da respectiva base que se esteja utilizando, podemos fazer a seguinte generalização quanto a supor curvatura seccional constante, se

$$R_{ijkl} = -K(a_{ik}a_{kl} - a_{il}a_{jk}), \tag{3.2}$$

onde a função K pode variar, notemos que se a matriz (a_{ij}) for a identidade e K a função constante, então

$$R_{ijij} = -K(a_{ii}a_{jj} - a_{ij}a_{ji}) = -K,$$

logo, estaríamos no caso curvatura seccional constante. Pelo teorema de Gauss-Bonnet-Chern, sabemos que essas formas tem um papel fundamental para calcularmos a característica de Euler-Poincaré de M, portanto iremos tentar achar restrições sobre os possíveis valores de R_{ijkl}, essas restrições serão feitas seguindo [BG64].

Lema 5. *Se X_i, X_j e X_k fazem parte de uma base ortonormal de T_pM. Se a curvatura seccional gerada pelo plano $\{X_i, X_j\}$ for um ponto crítico da função da que toma a curvatura seccional dos planos $\{X_i, X_j cos(\theta) + X_k sen(\theta)\}$, então $R_{ijik} = 0$.*

Demonstração. Defina

$$f(\theta) = K(X_i, X_j cos(\theta) + X_k sen(\theta)),$$

usando a multilinearidade do tensor de curavtura e as propriedades da métrica, temos que

$$f(\theta) = cos^2(\theta) R_{ijij} + sen^2(\theta) R_{ikik} + sen(2\theta) R_{ijik}.$$

Então, como $\theta = 0$ é ponto crítico de f e

$$f'(\theta) = -2cos(\theta)sen(\theta)R_{ijij} + 2sen(\theta)cos(\theta)R_{ikik} + 2cos(2\theta)R_{ijik},$$

temos o resultado desejado. $\square$

Lema 6. *Sendo M uma variedade Riemanniana, compacta, orientável e de dimensão 4. Então temos que existe uma base ortonormal tal que*

$$R_{1213} = R_{1214} = R_{1223} = R_{1224} = R_{1314} = R_{1323} = 0. \tag{3.3}$$

Demonstração. Tome $X_1, X_2 \in T_pM$ tais que $K(X_1, X_2)$ seja o máximo da curvatura seccional em $p \in M$. Dessa forma independente de quais vetores X_3 e X_4 sejam usados, temos que

$$R_{1213} = R_{1214} = 0,$$

pois podemos usar o Lema 5 em $\{X_1, X_2, X_3\}$ e $\{X_1, X_2, X_4\}$. Além disso, como $K(X_1, X_2) = K(X_2, X_1)$, podemos usar o lema em $\{X_2, X_1, X_3\}$ e $\{X_2, X_1, X_4\}$, logo

$$R_{1223} = -R_{2123} = 0$$

e

$$R_{1224} = -R_{2124} = 0,$$

agora escolheremos X_3 e X_4 de forma que $K(X_1, X_3)$ seja o máximo de

$$K(X_1cos(\theta) + X_2sen(\theta), X_3cos(\alpha) + X_4sen(\alpha)).$$

Isso pode ser feito pois sendo $\sigma = span\{X_1, X_2\}$, sabemos que $K(X_1, X_2)$ não depende dos vetores e sim do plano σ. Portanto, sabemos que vai existir um vetor $u \in \sigma$ e um v no complemento ortonormal de σ, tais que

$$K(u, v),$$

é o máximo da expressão anterior. Então basta girar os vetores X_1 e X_2 no plano σ, caso necessário, para que $X_1 = u$ e além disso definir $X_3 := v$. Dessa forma podemos usar o lema 5 em $\{X_1, X_3, X_4\}$ e $\{X_3, X_1, X_2\}$, obtendo

$$R_{1323} = R_{3132} = R_{1314} = 0,$$

além de manter os resultados anteriores para o novo X_1 e X_2, pois esses continuam gerando o máximo da curvatura seccional, logo o argumento inicial contínua sendo válido. $\square$

Observação 12. *Note que os lemas são pontuais, porém podemos usar eles sem problemas pois a forma diferencial Ω^* que definimos na variedade inteira, **não depende do referencial ortonormal**. Portanto, em cada ponto sabemos que existe $a(p)$ tal que*

$$\Omega^* = a(p)w_1 \wedge \cdots \wedge w_n,$$

então a questão vira somente calcular os respectivos valores da função $a(p)$. E para isso podemos usar uma base conveniante como a do lema acima e chegar ao integrando da equação (3.8), que será positivo. Ou seja, conforme mudamos de ponto, estamos mudando de base e usando a mesma notação para o tensor de curvatura, só que agora nessa nova base de vetores.

Com esse lema em mãos, podemos enunciar e provar o Teorema de Milnor.

Teorema de Milnor 1. *Seja M uma variedade Riemanniana, compacta, orientável de dimensão 4. Se a curvatura seccional ao longo de planos perpendiculares tem sempre o mesmo sinal, então $\mathcal{X}(M) \geq 0$. Se a curvatura seccional for sempre positiva ou negativa, então $\mathcal{X}(M) > 0$.*

Demonstração. Note que se olharmos para a expressão que Ω^* assume na equação (2.37), como o grupo de permutações de S_4 tem 24 elementos, teríamos várias elementos. Porém, note que se $\sigma \in S_4$ é uma permutação e se denotarmos ela por

$$\sigma = (\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(3)\ \sigma(4)),$$

se trocarmos 2 elementos adjacentes a permutação troca de sinal, e como $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$ essa nova permutação vai aparecer com o mesmo sinal de σ. Portanto, as permutações

$$(\sigma(2)\ \sigma(1)\ \sigma(3)\ \sigma(4)),$$

$$(\sigma(2)\ \sigma(1)\ \sigma(4)\ \sigma(3)),$$

e

$$(\sigma(1)\ \sigma(2)\ \sigma(4)\ \sigma(3)),$$

fazem aparecer o mesmo elemento $sgn(\sigma)\Omega_{\sigma(1)\sigma(2)} \wedge \Omega_{\sigma(3)\sigma(4)}$. Usando o fato de que 2 formas permutam no produto wedge, temos que fixa uma permutação σ, vai aparecer 8 permutações que geram o mesmo elemento dentro do somatório de (2.37). Portanto, o problema vira achar 3 permutações que sejam distintas de acordo com as regras que usamos acima, essas são tais que o somatório (2.37) vira

$$= \Omega_{12} \wedge \Omega_{34} + \Omega_{13} \wedge \Omega_{42} + \Omega_{14} \wedge \Omega_{23}. \tag{3.4}$$

Iremos omitir a constante multiplicativa pois o teorema de Milnor se preocupa somente com o sinal da característica de Euler-Poincaré, primeiro vamos simplificar cada elemento separadamente.

$$\Omega_{12} =$$
$$(R_{1212}w_1 \wedge w_2 + \overbrace{R_{1213}w_1 \wedge w_3 + R_{1214}w_1 \wedge w_4 + R_{1223}w_2 \wedge w_3 + R_{1224}w_2 \wedge w_4}^{\text{Zero pelo Lema 5}} + R_{1234}w_3 \wedge w_4)$$
$$\Omega_{34} =$$
$$(R_{3412}w_1 \wedge w_2 + R_{3413}w_1 \wedge w_3 + R_{3414}w_1 \wedge w_4 + R_{3423}w_2 \wedge w_3 + R_{3424}w_2 \wedge w_4 + R_{3434}w_3 \wedge w_4).$$

Logo, usando o fato de o produto wedge ser distributivo, o fato $w_i \wedge w_i = 0$, que temos de reordenar os termos de w_i e as entradas de R_{ijkl}, temos que

$$\Omega_{12} \wedge \Omega_{34} = (R_{1212}R_{3434} + R_{1234}^2)w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4. \tag{3.5}$$

O próximo termo será

$$\Omega_{13} =$$
$$(\overbrace{R_{1312}w_1 \wedge w_2}^{\text{Zero pelo Lema 5}} + R_{1313}w_1 \wedge w_3 + \overbrace{R_{1314}w_1 \wedge w_4 + R_{1323}w_2 \wedge w_3}^{\text{Zero pelo Lema 5}} + R_{1324}w_2 \wedge w_4 + R_{1334}w_3 \wedge w_4)$$
$$\Omega_{42} =$$
$$(\overbrace{R_{4212}w_1 \wedge w_2}^{\text{Zero pelo Lema 5}} + R_{4213}w_1 \wedge w_3 + R_{4214}w_1 \wedge w_4 + R_{4223}w_2 \wedge w_3 + R_{4224}w_2 \wedge w_4 + R_{4234}w_3 \wedge w_4).$$

Usando novamente que $w_i \wedge w_i = 0$ e reordenando, temos que

$$\Omega_{13} \wedge \Omega_{42} = (R_{1313}R_{2424} + R_{1324}^2) w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4. \tag{3.6}$$

Analogamente obtemos que

$$\Omega_{14} \wedge \Omega_{23} = (R_{1414}R_{2323} + R_{1423}^2) w_1 \wedge w_2 \wedge w_3 \wedge w_4. \tag{3.7}$$

Portanto, o termo que aparece ao integrarmos a forma Ω^* em Gauss-Bonnet-Chern será

$$(R_{1212}R_{3434} + R_{1234}^2 + R_{1313}R_{2424} + R_{1324}^2 + R_{1414}R_{2323} + R_{1423}^2). \tag{3.8}$$

Relembrando que R_{ijkl} é o tensor de curvatura e que R_{ijij} representa a curvatura seccional gerada pelos vetores $\{v_i, v_j\}$ da nossa base ortogonal, isso conclui a prova do teorema. Pois se cada curvatura seccional ao longo desses planos perpendiculares tiver o mesmo sinal, teremos que o integrando de Gauss-Bonnet-Chern será sempre positivo. Caso todas as curvaturas sejam somente não negativas, o mesmo vale para a característica de Euler-Poincaré pelo mesmo motivo. □

Uma consequência direta da equação (3.8) é o seguinte corolário.

Corolário 1. *Se M é uma variedade Riemanniana, compacta, orientável, de dimensão 4 tal que*

$$\mathcal{X}(M) = 0$$

e a curvatura seccional ao longo de planos perpendiculares tem sempre o mesmo sinal. Então, em cada ponto $p \in M$ existe uma base do espaço tangente tal que

$$R_{1234} = R_{1324} = R_{1423} = 0,$$

$$R_{1212} = 0 \text{ ou } R_{3434} = 0,$$

$$R_{1313} = 0 \text{ ou } R_{2424} = 0 \text{ e}$$

$$R_{1414} = 0 \text{ ou } R_{2323} = 0.$$

Uma observação interessante é que o teorema de Gauss-Bonnet-Chern provado na Seção 2.2 pode ser usado em dimensão 2, notemos primeiramente que este caso teremos que

$$\Omega^* = \frac{(-1)^1}{4\pi}(\Omega_{12} + \Omega_{12}),$$

isso pois $\Omega_{21} = -\Omega_{12}$ e o sinal dessa permutação é (-1).

$$= \frac{1}{4\pi}(-R_{1212}w_1 \wedge w_2 - R_{1221}w_2 \wedge w_1) = \frac{-R_{1212}}{2\pi} w_1 \wedge w_2,$$

devido as propriedades do tensor de curvatura e do produto wedge. Porém em dimensão 2 e em uma base ortonormal, a curvatura seccional R_{1212} é exatamente menos a curvatura Gaussiana e $w_1 \wedge w_2$ é elemento de área. Portanto isso nos fornece o Teorema de Gauss-Bonnet clássico, que usualmente é visto em cursos de Graduação em Matemática.

APÊNDICE **A**

Comentários

Este apêndice servirá basicamente para relembrar um ponto sobre alguns dos resultados e propriedades que foram usados durante a dissertação.

Comecemos pelo produto tensorial $\otimes$, ele nos permite ampliar um espaço de funcionais lineares para um espaço "produto". Seja por exemplo V um espaço vetorial sobre um corpo K e V^* seu dual, então podemos definir o produto tensorial como sendo tal que, se $u, v \in V$ e $f, g \in V^*$ então

$$f \otimes g(u, v) = f(u)\dot{g}(v).$$

Dessa forma $f \otimes g$ se torna um funcional linear no espaço $V \times V$. É fácil ver que essa definição poderia ser estendida para um anel K ao invés de um corpo, mas no nosso caso estamos trabalhando com $\mathbb{R}$.

Note que isso implica que

$$f \otimes g = g \otimes f$$

isso se deve a comutatividade do corpor K. Também é fácil ver que teremos propriedades como distributividade, associatividade e outras similares devido ao corpo que estamos trabalhando ter essas propriedades.

Outra operação que aparece com frequência é o produto vetorial $\wedge$, este pode ser definido de diversas maneiras, a maneira que acho mais simples e deixa claro o porque dessa operação ser tão importante é vendo ela como uma "extensão"do determinante, está maneira se encontra muito bem escrita no primeiro capítulo de [Car15a]. O que quero dizer é que, sendo como anteriormente V um espaço vetorial (dessa vez de dimensão n) e V^* seu dual, denotaremos por $\Lambda^k(V^*)$, com $k \leq n$, o conjunto das aplicações k-lineares e alternadas.

Com as operações usuais sobre funções é óbvio que $\Lambda^k(V^*)$ se torna um espaço vetorial. Dessa forma podemos definir o produto vetorial como sendo tal que, dados $du^1, du^2 \in V^*$ e $v_1, v_2 \in V$, então teremos que

$$du^1 \wedge du^2(v_1, v_2) := det(du^i(v_j)).$$

Dessa forma obtemos diretamente que $du^1 \wedge du^2 \in \Lambda^2(V^*)$. Como podemos ver os proprios elementos de V como elementos de $(V^*)^*$, podemos fazer a mesma definiçã para $\Lambda^k(V)$ (mas na dissertação usamos somente para o caso de elementos do dual, ou seja, para formas diferenciais).

Um resultado clássico é que $du^1, \dots, du^n$ é base de V^*, então

$$du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k}$$

onde $i_1 < \cdots < i_k$ e $i_j \in \{1, \dots, n\}$, é uma base de $\Lambda(V^*)$. Por isso, no caso em que consideramos as n-formas diferenciais como sabemos que existe a n-forma diferencial de volume, teremos que essa formula gera todas as outras. Isso é usado fortemente no capítulo 3, onde tentamos escrever a n-forma Ω^* como um múltiplo positivo da forma de volume em cada ponto, o que acaba resultando na demonstração do Teorema de Milnor. A operação de produto vetorial tem algumas propriedades que são muito usadas no decorrer da dissertação, se w é uma k-forma, φ é uma s-forma e θ é uma r-forma, então

1) $(w \wedge \varphi) \wedge \theta = w \wedge (\varphi \wedge \theta)$,

2) $(w \wedge \varphi) = (-1)^{ks}(\varphi \wedge w)$ e

3) $w \wedge (\varphi + \theta) = w \wedge \varphi + w \wedge \theta$, se $r = s$.

Note que a segunda propriedade implica que no caso de 1-formas, teremos que $w \wedge w = 0$. Essa propriedade se é importante em muitos momentos, um deles é quando estamos no capítulo 3 e estamos tentando simplificar a expressão de Ω^*, essa propriedade no permite excluir muitos termos, pois todos os elementos com a mesma forma no produto vetorial se tornam zero.

Agora iremos falar um pouco sobre a derivada exterior e suas propriedades. Primeiramente, iremos fazer um certo abuso de notação, denotaremos por $\Lambda^r(M^*)$ as r-formas diferenciais definidas na variedades M, onde $r < n =$ dimensão de M. Com isso considere

$$A^r(M) = \Gamma(\Lambda^r(M^*)),$$

ou seja, $A^r(M)$ é tal que se $du \in A^r(M)$ e $p \in M$ então

$$du(p) \in \Lambda^r(T_p^*M).$$

e $A^0(M)$ é definido com o espaço das funções diferenciaveis definas em M.Tendo essas notações claras, temos o seguinte teorema.

Teorema 3. *Existe uma única função $d : A(M) \to A(M)$ tal que $d(A^r(M)) \subset d(A^{r+1})$ e que satisfaz:*

(i) Dado $w_1, w_2 \in A(M)$ então $d(w_1 + w_2) = dw_1 + dw_2$

(ii) Se w_1 é $r-$forma diferenciável, então

$$d(w_1 \wedge w_2) = dw_1 \wedge w_2 + (-1)^r w_1 \wedge dw_2$$

(iii) Se f é função diferenciável em M, então df é exatamente a diferencial de f.

(iv) Se f é função diferenciável em M, então $d(df) = 0$

Essa operação única d é a que se obtem se definirmos ela da seguinte forma, tome $\{du^1, \dots du^n\}$ uma base de T_p^*M, então se $w \in \Lambda^r(T_p^*M)$ sabemos que existem funções diferenciaveis $a_{i_1 \dots i_r}$ tais que

$$w = a_{i_1 \dots i_r} du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r},$$

então definimos

$$dw := da_{i_1 \dots i_r} \wedge du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_r}.$$

Uma demonstração do teorema usando esse fato pode ser encontrada em [CCL16] página 76.

Lema 7. *Dada uma forma diferenciál qualquer $w \in A(M)$, então $d(dw) = 0$*

Demonstração. Tendo em vista que o operador d é linear podemos considerar o caso em que w é uma r-forma diferenciável, além disso para um ponto $p \in M$ fixo, sabemos que existe vizinhança V_p tal que

$$w = adu^1 \wedge \cdots \wedge du^r$$

em V_p, onde a é uma função diferenciável em M. Dessa forma diferenciando ambos os lados obtemos que

$$dw = da \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r$$

pois foi dessa forma que definimos localmente a diferenciação exterior. Derivando outra vez e usando a propriedade (ii) obtemos que

$$d(dw)) = d(da) \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge du^r - da \wedge d(du^1) \wedge \cdots \wedge du^r + \cdots = 0$$

Pois $d(da) = 0$ já que $a \in A^0(M)$ e o mesmo vale para $d(du^i)$ pela mesma razão. □

A teoria obtida ao integrar formas diferenciais é muito importante, o leitor interessado pode encontrar ela muito bem escrita em [Tu10]. Um resultado clássico dessa teoria que usaremos muito é o Teorema de Stokes.

Teorema 4. *Suponha que D é uma região com bordo em M, se w é uma forma $(n-1)$-forma diferenciável em M com suporte compacto. Então*

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w$$

Se o bordo de D for vazio, então o lado direito é zero.

Esse teorema será fundamental na demonstração do Teorema de Gauss-Bonnet-Chern no capítulo 2. O último Teorema que aparece com muita frequência no texto e que vale a pena enunciar é o Teorema de Poincaré-Hopf.

Teorema 5. *Seja M uma variedade diferenciável compacta, sem bordo e X um campo de vetores em M com singularidades isoladas $p_1, \dots p_r$. Então*

$$\sum_{i=1}^{r} I_{p_i} = \mathcal{X}(M),$$

ou seja, a soma dos indices das singularidades resulta na caracteristica de Euler-Poincaré da variedade.

Um corolário interessante é que caso exista um campo de vetores tangentes não nulo, então a variedade tem caracteristíca 0. Esse resultado é usado para fechar as contas em Gauss-Bonnet-Chern, pois ele nos permite usar o indice das singularidades, que aparecem ao integrarmos algumas formas especiais no capítulo 2, para obter uma propriedade topológica da variedade.

Bibliografia

[BG64] R. L. Bishop e I. Goldberg. *Some Implications of the Generalized Gauss-Bonnet Theorem*. Vol. 112. 3. Transactions of the American Mathematical Society, 1964, pp. 508–535.

[Car15a] M. P. do Carmo. *Formas Diferenciais e Aplicações*. SBM, 2015.

[Car15b] M. P. do Carmo. *Geometria Riemanniana*. 5nd. Projeto Euclides, 2015.

[CCL16] S. S. Chern, W. H. Chen e K. S. Lam. *Lectures on Differential Geometry*. World Scientific, 2016.

[Che44] S. S. Chern. *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*. Vol. 45. 4. Annals of Math, 1944, pp. 747–752.

[Che55] S. S. Chern. *On Curvature and Characteristic Classes of a Riemann Manifold*. Vol. 20. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg, 1955, pp. 117–126.

[Tu10] L. W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer, 2010.