



UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

MESTRADO EM MATEMÁTICA

Lorhan da Silva Costa

A geometria de grupos fuchsianos

NITERÓI

2022



Lorhan da Silva Costa

A geometria de grupos fuchsianos

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. Javier Ribon Herguedas.

Niterói

2022

Bendize, ó minha alma, ao Senhor,
e tudo o que há em mim bendiga
ao seu santo nome.

Salmos 103:1

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Por tudo que És, ninguém me faz tão feliz.

À minha mãe, Barbara da Silva Montenegro, por todo apoio possível na vida inteira. Ao meu irmão, Micael Montenegro Gomes, por estar sempre ao meu lado. Ao meu padrasto, Willians da Silva Gomes, por toda sua crença em mim.

À Joyce dos Santos Vergilio, minha futura esposa e já companheira para toda a vida, por crescer comigo mais a mais. A minha sogra e as minhas cunhadas por toda paciência nos dias de estudo.

Ao meu pai, Robson da Silva Costa, por não deixar eu perder o foco. Agradeço ao restante da minha família que de uma maneira ou de outra contribuíram com apoio e compreensão para este trabalho.

A meu orientador Dr. Javier Ribon Herguedas, pelo suporte, dedicação e pela confiança depositada em mim.

A banca examinadora, por aceitarem compor parte fundamental deste trabalho.

A todo o departamento de pós graduação em matemática da UFF, que sempre foram muito atenciosos e solícitos nos tempos difíceis de pandemia que passamos.

Aos meus amigos, em especial ao Gabriel Costa Mendes que foi minha dupla na maioria das disciplinas que enfrentei.

Agradeço ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação, foi realizado uma pesquisa bibliográfica sobre resultados clássicos da Geometria de grupos Fuchsianos, baseado principalmente no livro *The geometry of discrete groups* de Allan F. Beardon. Foi apresentado o conceito do plano complexo estendido e de transformações de Möbius. Em seguida, foram apresentados dois modelos da geometria hiperbólica, ambiente sob o qual é o foco deste trabalho. Apresentou-se o conceito dos subgrupos discretos de isometrias e dos grupos fuchsianos. A partir daí, estudou-se os conceitos de polígonos fundamentais convexos, sua geometria e o Teorema de Poincaré sendo este um teorema clássico que garante a existência de grupos fuchsianos para determinados polígonos.

Palavras-Chave: Grupos Fuchsianos; Geometria Hiperbólica; Teorema de Poincaré.

Abstract

In this dissertation, we present several classic results of the geometry of Fuchsian groups. We followed, mainly, the book “The geometry of discrete groups” by Allan F. Beardon. Initially, we introduce basic concepts as the extended complex plane, Möbius transformations, the hyperbolic plane and in particular the half-plane model and the Poincaré disk model. Then we consider the main object of this work, namely discrete groups of isometries of the hyperbolic plane and in particular fuchsian groups. In order to understand their geometry, we study how to associate fundamental polygons to an action of a fuchsian group on the hyperbolic plane. The inverse problem, i.e. finding a fuchsian group with a prescribed fundamental polygon, is solved by the Poincaré’s Theorem under natural conditions.

Keywords: Fuchsian Groups; Hyperbolic Geometry; Poincaré’s theorem.

Sumário

Introdução	1
1 Transformações de Möbius	3
1.1 Plano Complexo Estendido	3
1.2 Transformações de Möbius	6
1.2.1 Razão cruzada	11
1.2.2 Classificação por conjugação	16
1.2.3 Transformações que preservam modelos	24
2 Geometria Hiperbólica	28
2.1 Modelo do semiplano superior	28
2.2 Modelo do disco unitário	32
2.3 Área hiperbólica	38
3 Grupo fuchsianos	41
3.1 Grupos propriamente descontínuos	41
3.2 Subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$	42
3.3 Conjunto limite	48
4 Domínios fundamentais	53
4.1 Domínios Fundamentais	53
4.2 Polígono Fundamental Convexo	59
4.3 Teorema de Poincaré	68
4.4 Grupos triangulares	77

5 Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados	80
5.1 Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados	80

Introdução

A teoria geométrica de grupos discretos nos permite explorar a relação entre propriedades algébricas dos grupos e geométricas dos espaços sobre o qual esses grupos atuam. Neste trabalho trataremos de grupos fuchsianos agindo em espaços hiperbólicos. No capítulo 15 do livro *The Poincaré half plane* de S. Stahl [7] é afirmado que esses assuntos compõem uma parte integral da matemática moderna e de seus objetos de pesquisa.

O ato de *tesselar o plano* significa cobri-lo com figuras que se encaixem perfeitamente não havendo sobreposições, nem espaços vazios entre elas. No caso euclidiano é de conhecimento geral que para um polígono regular com n lados é necessário que $n \in \{3, 4, 6\}$ para que se possa tesselar o plano \mathbb{R}^2 . Ao comparar com a geometria hiperbólica, uma questão interessante é saber com quais polígonos é possível construir uma tesselação do plano. O Teorema de Poincaré tratará de responder isto neste trabalho.

Os objetivos principais deste trabalho é apresentar uma demonstração para o Teorema de Poincaré e estudar os grupos fuchsianos finitamente gerados. Procuramos deixar evidente ao leitor como se dá essa relação entre grupos e geometria. A principal referência aqui utilizadas foi o livro *The Geometry of Discrete Groups* de Allan Beardon que conta com um grau de generalidade dos resultados que permite ir além do que aqui será apresentado.

No primeiro capítulo serão estudadas as transformações de Möbius no plano complexo estendido. Mostraremos que o grupo das transformações de Möbius é isomorfo a $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, apresentaremos alguns de seus aspectos geométricos e

estudaremos seus pontos fixos. Encerramos o capítulo apresentando uma classificação para elas e determinando quando duas transformações de Möbius podem ou não serem conjugadas.

O segundo capítulo tem o objetivo de introduzir os espaços geométricos que iremos trabalhar. Apresentaremos dois modelos consistentes para a geometria hiperbólica que consistirão em nosso espaço de estudo.

Á apresentação dos grupos fuchsianos vem no capítulo 3. Primeiro falaremos de grupos propriamente descontínuos e, logo em seguida, definiremos grupos fuchsianos e concluiremos que estes são grupos propriamente descontínuos. Encerraremos esta seção estudando os conjuntos limites e ordinários, conjuntos cujo possuem aplicações em diversas áreas.

O objetivo do quarto capítulo será estudar as tesselações do plano hiperbólico por domínios fundamentais. Será apresentado que para para todo grupo fuchsiano existirá um polígono fundamental convexo cujo suas G -imagens pelo grupo tessalam o plano, este polígono será conhecido como polígono de Dirichlet. Finalizamos o capítulo com a demonstração do Teorema de Poincaré que diz que sempre é possível tesselar o plano com um certo tipo de polígono e introduzimos os grupos triangulares.

Por fim, encerramos o trabalho estabelecendo condições necessárias e suficientes que os grupos fuchsianos devem satisfazer para que seus polígonos fundamentais convexos tenha um número finito de lados e aproveitamos para fazer uma breve conexão com o estudo de grupos fundamentais.

Capítulo 1

Transformações de Möbius

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos preliminares e focaremos nosso estudo nas transformações de Möbius. Essas transformações são importante no estudo de geometria hiperbólica, pois as isometrias conformes no plano hiperbólico são transformações de Möbius.

Para um melhor entendimento, recomendamos que o leitor tenha conhecimento básico prévio dos números complexos e de sua topologia. Sugere-se que consulte o capítulo 1 de [3] afim de relembrar esses conceitos.

1.1 Plano Complexo Estendido

Podemos pensar no plano complexo estendido como uma forma de compactificar o plano complexo acrescentando um ponto $\infty \notin \mathbb{C}$ ao conjunto \mathbb{C} e construindo uma bijeção entre este conjunto e a esfera unitária $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Denotamos o conjunto $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ por \mathbb{C}_∞ .

Começaremos representando \mathbb{C}_∞ como a esfera unitária

$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Seja $N = (0, 0, 1)$ o polo norte de S e vamos identificar \mathbb{C} com

$$\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\},$$

isto é, \mathbb{C} é o plano que "corta" S^2 no ao longo do equador. Veja a figura 1.1.

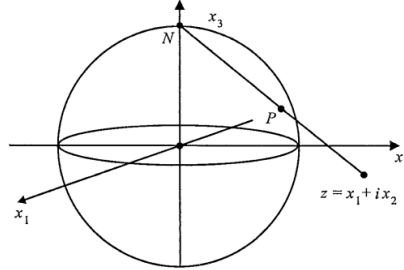


Figura 1.1: Plano Complexo Estendido.

Vamos construir a correspondência $\phi : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Para cada ponto $z = (x, y, 0) \in \mathbb{R}^3$, considere o plano Π_z obtido pelos três pontos N, z e $(0, 0, -1)$. Como $\Pi_z \cap S^2$ é uma circunferência e, além disso, a reta l_z que passa por z e N está contida em Π_z temos que $l_z \cap S^2$ possui N como elemento e no máximo mais um ponto. Como l_z é por construção não tangente a S^2 , segue que essa reta intersecta $S^2 \setminus \{N\}$ em exatamente um ponto. Chamemos este ponto de $\phi(z)$.

Tomando a equação da reta que liga z a N , dada por

$$l_z := \{tN + (1-t)z \mid t \in \mathbb{R}\} = \{((1-t)x, (1-t)y, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Podemos descobrir as coordenadas de $\phi(z) = P \in l_z \cap S^2$ se formos capazes de encontrar o valor t no qual a reta que liga z a N se intersecta com S^2 em um ponto diferente de N . Para isso, basta encontrar $P \in l_z$ tal que $|P| = 1$ e $P \neq N$. Seja $z = (x, y)$, então $P = ((1-t)x, (1-t)y, t)$ e queremos $|P| = 1$. Onde $1 = (1-t)^2x^2 + (1-t)^2y^2 + t^2$ e portanto

$$t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$

A partir de agora, faremos um abuso de notação e consideraremos $z = (x, y, 0)$ como um número complexo $z = x + iy$. Então, resolvendo a igualdade $(x_1, x_2, x_3) = ((1-t)x, (1-t)y, t)$ para esse valor de t , temos

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}; \quad x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}; \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

E portanto $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \rightarrow S^2$ pode ser dada em funções coordenadas por

$$\phi_1(z) = \frac{z + \bar{z}}{|z|^2 + 1}; \quad \phi_2(z) = \frac{-i(z - \bar{z})}{|z|^2 + 1}; \quad \phi_3(z) = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$

De forma análoga, partindo agora de um ponto P na esfera S^2 diferente de N podemos determinar o ponto $z \in \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, pela construção da reta que passa por N e por P e fazendo a interseção com $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$. A inversa ϕ^{-1} é dada pela correspondência:

$$Z = (u, v, t) \in S^2 \setminus \{N\} \mapsto z = \frac{u}{1-t} + i \frac{v}{1-t}.$$

Essa bijeção é conhecida como *projeção estereográfica* (ou *projeção estereográfica sem $N = (0, 0, 1)$*). e estabelece um homeomorfismo entre $S^2 \setminus \{N\}$ e \mathbb{R}^2 , basta observar que cada função coordenada é contínua nas duas correspondências, e como são inversas, ambas são homeomorfismos.

Para estender esse homeomorfismo a S^2 e \mathbb{C}_∞ , devemos entender o que é uma função contínua em \mathbb{C}_∞ . Assim, precisamos definir uma topologia em \mathbb{C}_∞ . Definimos a topologia em \mathbb{C}_∞ como sendo a gerada pelos abertos dados por bolas $B(z, r)$ centradas em pontos $z \in \mathbb{C}$ com $r \in \mathbb{R}^+$ e as bolas $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \cup \{\infty\}$ centradas no ponto do infinito com $R \in \mathbb{R}^+$.

Esta topologia quando restrita a \mathbb{C} é a topologia usual dos números complexos e para garantir a continuidade de $\phi : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$ em ∞ , sabendo que S^2 é um espaço topológico Hausdorff, basta mostrar que $\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z)$ existe.

Então, o que acontece com ϕ quando fazemos $z \rightarrow \infty$? Ocorre que:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z) = \left(\lim_{z \rightarrow \infty} x_1(z), \lim_{z \rightarrow \infty} x_2(z), \lim_{z \rightarrow \infty} x_3(z) \right) = (0, 0, 1) = N.$$

Com base nisso, define-se a projeção estereográfica desde $(0, 0, 1) = N$ (o que chamaremos a partir de agora projeção estereográfica apenas.) fazendo uma extensão de ϕ da seguinte forma $\phi(\infty) = N$ e uma extensão da inversa ϕ^{-1} como $\phi^{-1}(N) = \infty$. Provamos que ϕ é contínua, mas não é difícil ver que ϕ^{-1} também é contínuo já que

$$|\phi^{-1}(u, v, t)|^2 = \frac{1+t}{1-t}.$$

Dito isto, ϕ estabelece um homeomorfismo entre \mathbb{C}_∞ e S^2 . E por isso, intuimos que o plano complexo estendido é uma forma de compactar o plano complexo.

Um aspecto geométrico interessante é que as circunferências na esfera S^2 são levadas em retas ou circunferências no plano. O teorema da curva de Jordan diz que qualquer curva fechada simples em S^2 divide a esfera em duas partes e o mesmo acontece com o plano. Observe as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.1. *A projeção estereográfica estabelece uma correspondência biunívoca entre círculos do plano complexo e circunferências do \mathbb{R}^3 contidas em S^2 que não passam por $N = (0, 0, 1)$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6], na página 26. □

Proposição 1.1.2. *A projeção estereográfica estabelece uma bijeção entre as circunferências em $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ que passam por N e as retas no plano complexo unidas com o ∞ em \mathbb{C}_∞ .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6], na página 26. □

1.2 Transformações de Möbius.

Definição 1.2.1. *Uma transformação S em \mathbb{C} definida por $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ é dita Transformação de Möbius se os coeficientes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ satisfazem $ad - cb \neq 0$.*

Para $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ com $c \neq 0$, repare que a transformação de Möbius dada por $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ é tal que $\lim_{z \rightarrow \frac{-d}{c}} S(z) = \infty$ e $\lim_{z \rightarrow \infty} S(z) = \frac{a}{c}$.

Podemos então estender a definição de S ao plano complexo estendido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \bar{S} : \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto \infty, \text{ se } z = \frac{-d}{c}; \\ z &\longmapsto \frac{a}{c}, \text{ se } z = \infty; \\ z &\longmapsto S(z), \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

Assim, \bar{S} é contínua em \mathbb{C}_∞ e \bar{S} aplicado a $\mathbb{C} \setminus \{\frac{-d}{c}\}$ é igual a S . Denotaremos \bar{S} por S apenas se não houver engano.

Agora se $c = 0$, $S(z)$ é uma função polinomial de grau 1. Podemos estender de forma semelhante, já que:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} S(z) = \infty.$$

$$\begin{aligned} \bar{S}: \mathbb{C}_\infty &\longrightarrow \mathbb{C}_\infty \\ z &\longmapsto \infty, \text{ se } z = \infty; \\ z &\longmapsto S(z), \text{ se } z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Além disso, toda transformação de Möbius T pode ser representada de forma que $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ com $ad - bc = 1$. De fato, dado S transformação de Möbius com $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ e $ad - bc = K \neq 0$, onde $K \neq 1$. Existe $k \in \mathbb{C}$ tal que $k^2 = K$ e a transformação de Möbius S pode ser reescrita como $S(z) = \frac{ak^{-1}z + bk^{-1}}{ck^{-1}z + dk^{-1}}$ e $adk^{-2} - cbk^{-2} = \frac{ad - cb}{k^2} = 1$.

Proposição 1.2.1. *A composição de transformações de Möbius é uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Observe agora que considerando a composição usual de aplicações, sendo $S(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ e $T(z) = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$ com $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{C}$ temos:

$$S(T(z)) = \frac{a\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + b}{c\left(\frac{a'z + b'}{c'z + d'}\right) + d} = \frac{a(a'z + b') + b(c'z + d')}{c(a'z + b') + d(c'z + d')} = \frac{(aa' + bc')z + (ab' + bd')}{(ca' + dc')z + (cb' + dd')} \quad (1.1)$$

e temos

$$\begin{aligned} (aa' + bc')(cb' + dd') - (ca' + dc')(ab' + bd') &= bc'cb' + aa'dd' - ac'b'd'_a c b d' = \\ &= (ad - bc)(a'd' - b'c') \neq 0. \end{aligned}$$

Logo a composição ainda é uma transformação de Möbius. □

Não é difícil provar que o conjunto das transformações de Möbius é um grupo para a composição de aplicações, esse grupo será denotado por \mathcal{M} . Podemos associar a cada matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ no grupo linear

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) \neq 0\},$$

a transformação de Möbius $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$. Mais ainda, como podemos escolher $ad - bc = 1$, basta tomar $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{C}) := \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{C}) \mid \det(A) = 1\}.$$

A correspondência,

$$\begin{aligned} \phi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathcal{M} \\ A &\longmapsto T_A = \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

é um homomorfismo de grupos, basta notar que, considerando a representação matricial das transformações de Möbius e que a composição de transformações é equivalente a multiplicação de matrizes pela Equação (1.1), logo obtemos

$$\phi(AB) = \phi(A)\phi(B) = T_A \circ T_B.$$

Observe que $\phi|_{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}$ é sobrejetivo, já que se $T \in \mathcal{M}$ então $ad - bc = 1$, que é exatamente o determinante da forma matricial de T , portanto se $T \in \mathcal{M}$, existe $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ tal que $\phi(A) = T$. Vamos ver o núcleo de ϕ .

$$\begin{aligned} A \in \mathrm{Ker}(\phi) &\Leftrightarrow \frac{az + b}{cz + d} = z \\ &\Leftrightarrow az + b = cz^2 + dz \\ &\Leftrightarrow b = c = 0 \text{ e } a = d \in \mathbb{C}^*. \end{aligned}$$

Portanto A é um múltiplo escalar de Id . Logo, $\mathrm{Ker}(\phi) = \mathbb{C}^*Id$ e pelo teorema de isomorfismos de grupos, como ϕ é sobrejetiva, concluímos que

$$\mathcal{M} \simeq \frac{\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})}{\mathrm{Ker}(\phi)} = \frac{\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})}{\mathbb{C}^*Id} \simeq \frac{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}{\mathrm{Ker}(\phi) \cap \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})} \simeq \frac{\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}}.$$

Chamamos de *grupo especial linear projetivo* o grupo $\frac{\text{SL}(2, \mathbb{C})}{\{Id, -Id\}}$ e denotamos por $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Observação 1.2.1 (Aplicação inversa). *Vale observar que a inversa de uma transformação de Möbius $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ é dada*

$$[T^{-1}] = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Vejamos agora algumas propriedades das transformações de Möbius.

Proposição 1.2.2. *Se $T \neq Id$ é uma Transformação de Möbius, então T possui um ou dois pontos fixos.*

Demonstração. Seja $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ onde $ad - bc \neq 0$. Um ponto fixo é uma solução $T(z) = z$. Ou seja, são pontos $z \in \mathbb{C}_\infty$ tais que

$$z = \frac{az + b}{cz + d}$$

1. Se $c = 0$, temos que $ad \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ e $d \neq 0$. Assim $T(z) = \alpha z + \beta$, para $\alpha = \frac{a}{d} \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $\beta = \frac{b}{d} \in \mathbb{C}$. Portanto $T(\infty) = \infty$, logo ∞ é um dos pontos fixos de T . Já se $z \in \mathbb{C}$, para ser ponto fixo tem que satisfazer a equação $z = \alpha z + \beta$. Se $\alpha \neq 1$ Temos que $z = \frac{\beta}{1 - \alpha}$ é a única solução da equação $z - \alpha z + \beta = 0$, assim tem apenas dois pontos fixos. Repare que para $\alpha = 1$ em \mathbb{C} vale $z = \alpha z + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$, mas $\beta \neq 0$ pois $T \neq Id$. Assim para $\alpha \neq 1$ e T tem apenas dois pontos fixos.
2. Caso $c \neq 0$. Segue que $T(\infty) = \frac{a}{c} \in \mathbb{C}$ ou seja $T(\infty) \neq \infty$. Assim os pontos fixos $T(z) = z$ são pontos complexos. Logo, queremos encontrar os pontos de $z \in \mathbb{C}$ tais que

$$z = \frac{az + b}{cz + d} \Leftrightarrow cz^2 - (a - d)z - b = 0$$

Assim, como $c \neq 0$ temos do teorema fundamental da álgebra que $p(z) = cz^2 - (a-d)z - b \in \mathbb{C}[x]$ tem pelo menos uma raiz em \mathbb{C} e no máximo duas raízes em \mathbb{C} . Logo tem pelo menos um ponto fixo e no máximo dois pontos fixos distintos.

□

Observação 1.2.2. *Decorre diretamente da proposição 1.2.2 que o $\infty \in \mathbb{C}_\infty$ é ponto fixo de uma transformação de Möbius T se, e somente se $T(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ e $\alpha \neq 0$. Além disso, T tem apenas ∞ como ponto fixo se, e somente se $T(z) = z + \beta$ com $\beta \neq 0$, ou seja T é translação não-trivial.*

Na verdade, a menos de multiplicidade, toda transformação de Möbius possui dois pontos fixos. Podemos calcular a multiplicidade de um ponto fixo z_0 em \mathbb{C} como a ordem de anulação das derivadas $T - Id$ em z_0 . Por exemplo,

- A ordem é 1 se $(T - Id)'(z_0) \neq 0$;
- A ordem é 2 se $(T - Id)'(z_0) = 0$ mas $(T - Id)''(z_0) \neq 0$;
- A ordem é n se o valor da n -ésima derivada de $(T - Id)$ quando computada em z_0 é distinto de zero mas todas as derivadas de ordem menor são nulas.

Se a transformação de Möbius possui $c \neq 0$, pela proposição 1.2.2, seus pontos fixos são complexos z_0 e z_1 com possivelmente $z_0 = z_1$. Por um breve calculo:

- Verificando a primeira derivada:

Primeiro, simplifique $z - \frac{az + b}{cz + d} = \frac{z^2 - (a-d)c^{-1}z - bc^{-1}}{z + dc^{-1}}$ em termos dos pontos fixos z_0, z_1 de T (que são raízes de $p(z) = z^2 - (a-d)c^{-1}z - bc^{-1}$) usando a fatoração de polinômios para calcular a derivada, temos por um breve calculo:

$$(Id - T)'(z) = \frac{\left(z + \frac{d}{c}\right) [(z - z_0) + (z - z_1)] - (z - z_0)(z - z_1)}{\left(z + \frac{d}{c}\right)^2}.$$

E portanto, $(Id - T)'(z_0) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_0$.

- Mas, se $z_0 = z_1$. Tem-se

$$(Id - T)''(z) = \frac{2 \left(\frac{d}{c} + z_0 \right)^2}{\left(z + \frac{d}{c} \right)^3}$$

E assim $(Id - T)''(z) \neq 0$. Portanto z_0 tem multiplicidade 2.

No caso $c = 0$, para tratar do infinito basta calcular a multiplicidade de

$$\frac{1}{z} \circ T(z) \circ \frac{1}{z}$$

em zero. Por exemplo, seja $T(z) = z + 1$ seu único ponto fixo é ∞ . Então,

$$g(z) = \left(\frac{1}{z} \right) \circ T(z) \circ \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{z}{z + 1}.$$

Calculando as derivadas,

$$(g - Id)'(z) = \frac{1}{(z + 1)^2} - 1 \text{ e } (g - Id)''(z) = \frac{-2}{(z + 1)^3}.$$

A multiplicidade de zero em g é 2, e portanto a multiplicidade em infinito é 2.

1.2.1 Razão cruzada

Proposição 1.2.3. *Dados (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) , dois trios de pontos distintos dois a dois (i.e. $a_i \neq a_j$ para $i, j = 1, 2, 3, i \neq j$ e $a = z, w$). de \mathbb{C}_∞ , existe uma única transformação de Möbius T , tal que $T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$.*

Demonstração. Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ e uma transformação de Möbius S tal que $S(z_i) = u_i$ para $i = 1, 2, 3$, como S é bijeção segue $u_i \neq u_j$ se $i \neq j$. Suponha que exista outra transformação de Möbius T tal que $T(z_i) = u_i$ para $i = 1, 2, 3$. Logo tomando a inversa de T temos $T^{-1} \circ S(z_i) = z_i$ para $i = 1, 2, 3$. Assim, concluímos que $T^{-1} \circ S$ tem três pontos fixos, portanto $T^{-1} \circ S = Id$ e daí ocorre que $S = T$. Logo, toda transformação de Möbius está perfeitamente determinada a partir da imagem de três pontos de \mathbb{C}_∞ .

Agora, dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}_\infty$ distintos dois a dois, podemos definir uma transformação de Möbius $S : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ tal que $S(z_1) = 0$, $S(z_2) = 1$ e $S(z_3) = \infty$ da seguinte forma:

1. Se $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ tome

$$S(z) = \frac{(z_2 - z_3)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_3)};$$

2. Se $z_1 = \infty$ tome

$$S(z) = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3};$$

3. Se $z_2 = \infty$ tome

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3};$$

4. Se $z_3 = \infty$ tome

$$S(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Portanto, dados (z_1, z_2, z_3) e (w_1, w_2, w_3) , dois trios de pontos distintos dois a dois de elementos de \mathbb{C}_∞ temos que existem T e S transformações de Möbius tais que $T(z_1) = S(w_1) = 0$, $T(z_2) = S(w_2) = 1$ e $T(z_3) = S(w_3) = \infty$ e portanto $S^{-1} \circ T(z_i) = w_i$ para $i = 1, 2, 3$ como queríamos. Repare que toda transformação de Möbius possui inversa e a composição continua sendo transformação de Möbius. \square

Definição 1.2.2. Dada uma 4-upla (z_1, z_2, z_3, z_4) de pontos distintos em \mathbb{C}_∞ , definimos a **razão cruzada** de z_1, z_2, z_3, z_4 , denotada por (z_1, z_2, z_3, z_4) , como sendo o número $S(z_4)$, onde S é a única transformação de Möbius que satisfaz $S(z_1) = 0, S(z_2) = 1, S(z_3) = \infty$.

Pela proposição 1.2.3, considerando a primeira e última equação, temos

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}{(z_2 - z_1)(z_4 - z_3)} = S(z_4)$$

onde devemos omitir os dois fatores z_j aparece, caso z_j seja o ponto ∞ ($j = 1, 2, 3, 4$).

Exemplo 1.2.1. Vamos determinar uma transformação de Möbius f que transforma os pontos $-1, 1, i \in \mathbb{C}_\infty$ em $0, 1, \infty \in \mathbb{C}_\infty$.

Pela proposição 1.2.3, existe uma única transformação de Möbius tal que $f(-1) = 0, f(1) = 1, f(i) = \infty$. Temos pela razão cruzada:

$$f(z) = [-1, 1, i, z]$$

Ou seja,

$$f(z) = \frac{(1-i)(z - (-1))}{(1 - (-1))(z - i)}$$

e portanto

$$f(z) = \frac{(1-i)z + (1-i)}{2z - 2i}$$

Observe que f é realmente uma transformação de Möbius pois

$$ad - bc = (1-i)(-2) - 2(1-i) = -4(1-i) \neq 0$$

Proposição 1.2.4. Se f é uma transformação de Möbius, então

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$$

para toda 4-upla de pontos distintos em \mathbb{C}_∞ .

Demonstração. Por um lado, $(z_1, z_2, z_3, z_4) = S(z_4)$ com $S(z_1) = 0, S(z_2) = 1$ e $S(z_3) = \infty$. Por outro lado,

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = T \circ f(z_4)$$

com $T(f(z_1)) = 0, T(f(z_2)) = 1$ e $T(f(z_3)) = \infty$. Como toda transformação está bem determinada pela imagem de três pontos, segue $T \circ f = S$. Logo,

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)) = T \circ f(z_4) = S(z_4) = (z_1, z_2, z_3, z_4). \quad \square$$

Exemplo 1.2.2. *Seja*

$$f(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

uma transformação de Möbius. Tem-se que $f(0) = -1, f(\infty) = 1, f(i) = 0$. E portanto vale

$$\begin{aligned} [-1, 1, 0, f(z)] &= \frac{(1 - 0)(f(z) - (-1))}{(1 - (-1))(f(z) - 0)} = \frac{(f(z) + 1)}{2f(z)} = \frac{(f(z) + 1)}{2f(z)} = \\ &= \frac{\left(\frac{z - i}{z + i}\right) + 1}{\left(\frac{2z - 2i}{z + i}\right)} = \frac{(z - i) + (z + i)}{2(z - i)} = \frac{2z}{2(z - i)} = \frac{z}{z - i}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$[0, \infty, i, z] = \frac{(z - 0)}{z - i} = \frac{z}{z - i}$$

Logo vale $[0, \infty, i, z] = [-1, 1, 0, f(z)] = [f(0), f(\infty), f(i), f(z)]$.

Definição 1.2.3. *Um círculo generalizado em \mathbb{C}_∞ , ou simplesmente círculo quando for implícito que o espaço é \mathbb{C}_∞ , é:*

1. *Um círculo no infinito, ou seja, a união de uma reta euclidiana em \mathbb{C} e $\{\infty\}$; ou*
2. *círculos euclidianos em \mathbb{C} .*

Provaremos que transformações de Möbius em \mathbb{C} transformam círculos e retas em círculos e retas euclidianas. De maneira mais geral, quando consideramos \mathbb{C}_∞ , temos que transformações de Möbius levam círculos em círculos.

Observação 1.2.3. *Considere números reais A, C, b_1, b_2 tais que o número complexo $B = b_1 + ib_2$ satisfaça $|B|^2 > AC$. A equação $Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0$, determina uma reta quando $A = 0$ e, caso contrário, determina um círculo no plano euclidiano.*

De fato, se olharmos $z = x + iy$, a equação pode ser reescrita como

$$Ax^2 + Ay^2 + 2b_1x - 2b_2y + C = 0. \quad (1.2)$$

Se $A = 0$, temos que a hipótese

$$|B|^2 > AC \implies b_1 \neq 0 \text{ ou } b_2 \neq 0 \implies 2b_1x - 2b_2y + C = 0$$

determina uma reta. Por outro lado, toda reta no plano euclidiano está determinada pela equação $cy = ax + b$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou $c \neq 0$. Neste caso, tomemos $b = C, b_1 = \frac{a}{2}$ e $b_2 = \frac{c}{2}$.

Se $A \neq 0$, em coordenadas x, y , podemos reescrever a equação (1.2) como

$$\left(x + \frac{b_1}{A}\right)^2 + \left(y - \frac{b_2}{A}\right)^2 + \frac{AC - b_1^2 - b_2^2}{A^2} = 0$$

e a condição

$$|B|^2 = b_1^2 + b_2^2 > AC \implies \frac{AC - b_1^2 - b_2^2}{A^2} < 0$$

implica que a equação acima determina um círculo. Por outro lado, todo círculo está determinado por uma equação do tipo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, com $r > 0$ e $a, b, r \in \mathbb{R}$. A correspondência ocorre por escolher $B = -a + ib, A = 1$, e $C = -r^2 + a^2 + b^2$.

Proposição 1.2.5. A imagem por uma transformação de Möbius de um círculo de \mathbb{C}_∞ é um círculo de \mathbb{C}_∞ .

Demonstração. Seja T , uma transformação de Möbius dada por $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, com $ad - bc \neq 0$. Se $c \neq 0$ temos $T(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$, onde

$$f_1(z) = z + \frac{d}{c}, f_2(z) = \frac{1}{z}, f_3(z) = -\frac{ad - bc}{c^2}z \text{ e } f_4(z) = z + \frac{a}{c}.$$

Neste caso, sabe-se da geometria euclidiana que f_1, f_4 são translações e portanto transformam círculos euclidianos em círculos euclidianos e retas euclidianas em retas euclidianas. Portanto, em \mathbb{C}_∞ transformam círculos em círculos. O mesmo acontece para o homotetia f_3 . Como o caso $c = 0$ é um caso particular de composição de translações e homotetias, temos que vale também o resultado. Assim, para concluir a demonstração, temos que analisar f_2 .

Mas, dados A, B e C como na observação 1.2.3, temos

$$w \in \{z \in \mathbb{C}^* | Az\bar{z} + Bz + \overline{Bz} + C = 0\} \Leftrightarrow f_2(w) = w^{-1} \in \{z \in \mathbb{C}^* | Cz\bar{z} + B\bar{z} + \overline{Bz} + A = 0\}.$$

□

1.2.2 Classificação por conjugação

Uma primeira classificação para as transformações de Möbius se dá pela análise de seus pontos fixos. Já vimos que em \mathbb{C}_∞ as transformações de Möbius diferente da identidade tem no máximo dois pontos fixos e no mínimo um. De agora em diante, o grupo de transformação de Möbius \mathcal{M} , será denotado por $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ pelo isomorfismo existente entre os grupos.

Definição 1.2.4. *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ uma transformação de Möbius, se T fixa exatamente um ponto em \mathbb{C}_∞ então dizemos que T é parabólica.*

Lema 1.2.1. *Se f e F são transformações de Möbius. Então:*

1. *z é um ponto fixo de F se e somente se $f(z)$ é um ponto fixo de $f \circ F \circ f^{-1}$;*
2. *S é um subconjunto invariante por F se e somente se $f(S)$ é um subconjunto invariante por $f \circ F \circ f^{-1}$.*

Demonstração. Como

$$z = F(z) \Leftrightarrow f(z) = f \circ F(z) = f \circ F \circ f^{-1}(f(z))$$

então vale o resultado. A segunda afirmação é provada analogamente. \square

Proposição 1.2.6. *Se $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é uma transformação de Möbius. Então:*

1. *Se T é parabólica então existe $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $S \circ T \circ S^{-1}(z) = z + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*
2. *Se T não é parabólica então existe $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ tal que $S \circ T \circ S^{-1}(z) = \alpha z$, $\alpha \in \mathbb{C}$.*

Demonstração. Seja T parabólica com um ponto fixo z_0 . Se $z_0 = \infty$, acabou. Se $z_0 \in \mathbb{C}$, tome $S(z) = (z - z_0)^{-1}$, que é uma transformação de Möbius e é tal que $S \circ T \circ S^{-1}(\infty) = \infty$, donde $S \circ T \circ S^{-1}(z) = az + b$. Se $a \neq 1$, temos que $z = az + b$ tem solução em \mathbb{C} e portanto $S \circ T \circ S^{-1}$ teria dois pontos fixos, o que contradiz o lema 1.2.1. Portanto $a = 1$ e temos o resultado.

Já, se T não é parabólica e fixa dois pontos distintos $z_0, z_1 \in \mathbb{C}_\infty$. Se ambos são complexos, temos então a transformação de Möbius $S(z) = \frac{z - z_0}{z - z_1}$ é tal que $S(z_0) = 0$ e $S(z_1) = \infty$. Assim, $S \circ T \circ S^{-1}$ fixa ∞ e 0 . Donde $S \circ T \circ S^{-1}(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ com $b = c = 0$. O que conclui o resultado. Se T fixa ∞ , $T(z) = az + b$ com $a \neq 1$ (pois T fixa dois pontos) e com $z_0 = \frac{-b}{a-1} \in \mathbb{C}$ sendo seu ponto fixo complexo, se conjugar T por $S(z) = z + z_0$ temos

$$S^{-1} \circ T \circ S(z) = S^{-1} \circ T(z + z_0) = S^{-1}(az + az_0 + b) = az + az_0 + b - z_0 = az,$$

pois

$$a \frac{-b}{a-1} - \frac{-b}{a-1} + \frac{b(a-1)}{a-1} = 0.$$

Assim termina prova. □

Corolário 1.2.1. *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ um elemento parabólico. Então T é conjugada a transformação de Möbius $z \rightarrow z + 1$.*

Demonstração. Pela proposição 1.2.6, basta analisar para $T(z) = z + \alpha$ (repare que $\alpha \neq 0$, pois do contrário T seria a identidade.). Considere a transformação de Möbius $S(z) = \frac{z}{\alpha}$. A seguinte igualdade nos garante o resultado:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Assim, $S \circ T \circ S^{-1}(z) = \frac{\alpha z + \alpha}{\alpha} = z + 1$. □

Analisaremos primeiro algumas informações que os pontos fixos de uma transformação de Möbius nos dão quando olhamos para o grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e seus subgrupos.

Lema 1.2.2. *Sejam $S, T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ transformações distintas da identidade que comutam, então S preserva o conjunto de pontos fixos de T e vice-versa.*

Demonstração. Sendo α um ponto fixo de T , tem-se

$$S(\alpha) = S(T(\alpha)) = T(S(\alpha)).$$

Donde $S(\alpha)$ é um ponto fixo de T , logo S preserva o conjunto de pontos fixos de T . □

Introduziremos as transformações em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, que são isometrias do plano hiperbólico H^2 para uma métrica que será definida no próximo capítulo.

Definição 1.2.5. *O semiplano superior é denotado por*

$$H^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$$

cujo bordo ∂H^2 em \mathbb{C}_∞ é $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Definição 1.2.6. *Define-se*

$$\text{PSL}(2, \mathbb{R}) = \frac{SL(2, \mathbb{R})}{\{Id, -Id\}},$$

onde $SL(2, \mathbb{R}) = \{A \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1\}$.

Proposição 1.2.7. *Toda transformação $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ satisfaz $T(H^2) = H^2$.*

Demonstração. A transformação T é da forma

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Repare que $T(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, já que os coeficientes são reais. Em seguida, calculando

$$\text{Im}(T(i)) = \text{Im} \left(\frac{(b + ai)(d - ci)}{c^2 + d^2} \right) = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2} > 0$$

segue que $T(i) \in H^2$. Portanto, como T é um homeomorfismo e $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ separa \mathbb{C}_∞ em duas componentes conexas, temos $T(H^2) = H^2$. □

A seguir damos uma caracterização da comutação de elementos de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Teorema 1.2.1. *Sejam $S, T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ transformações distintas da identidade. Elas comutam se, e somente se, elas fixam os mesmos pontos.*

Demonstração. Suponha que S e T fixam os mesmos pontos. A primeira observação que fazemos é que ou ambas são parabólicas ou são não parabólicas. Se são parabólicas, são conjugadas a uma translação e se são não parabólicas são conjugadas a uma transformação da forma αz com $\alpha \in \mathbb{C}$ pela proposição 1.2.6. Na demonstração dessa proposição vemos que uma transformação γ que pode realizar essas conjugações dependem apenas dos pontos fixos. Como são os mesmos, segue que para γ como na proposição 1.2.6, temos que $\gamma S \gamma^{-1} = F$ e $\gamma T \gamma^{-1} = G$. Onde ou ambas são translações, ou ambas são do tipo αz . Portanto

$$FG = GF \Rightarrow ST = (\gamma^{-1}F\gamma)(\gamma^{-1}G\gamma) = (\gamma^{-1}G\gamma)(\gamma^{-1}F\gamma) = TS.$$

E assim T e S comutam.

Reciprocamente, sendo T, S tais que $TS = ST$. Vamos mostrar que ambas fixam os mesmos pontos. Denote o conjunto dos pontos fixos de S e T por F_S e F_T respectivamente.

- Se T é parabólico e S é distinto da identidade. O conjunto de pontos fixos de T está formado por um único ponto P e a propriedade $S(F_T) = F_T$ dada pelo lema 1.2.2 implica $S(P) \in \{P\} \Rightarrow S(P) = P$. Suponha por absurdo que S tem um segundo ponto fixo $Q \neq P$. Então $F_S = \{P, Q\}$ e como $T(\{P, Q\}) \subset \{P, Q\}$ e $T(P) = P$ tem-se $T(Q) = Q$, o que contradiz o fato de T ser parabólico. Portanto $F_S = \{P\} = F_T$.
- Sendo S e T não parabólicos, isto é, ambas têm 2 pontos fixos. Se $F_S = \{P, Q\}$, pelo lema 1.2.2 $T(P), T(Q) \in F_S$. Pela bijetividade de T em \mathbb{C}_∞ , $T(Q) \neq T(P)$. Suponha por absurdo que $T(Q) = P$ e $T(P) = Q$. Daí

$$T^2(P) = T(T(P)) = T(Q) = P \text{ e } T^2(Q) = T(T(Q)) = T(P) = Q.$$

Logo tem-se $F_S \subset F_{T^2}$. Claramente $F_T \subset F_{T^2}$. Então $F_T \cup F_S \subset F_{T^2}$ e portanto T^2 tem mais de dois pontos fixos donde se conclui que $T^2 = Id$. Analogamente, conclui-se $S^2 = Id$.

Suponha que S fixe dois pontos em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Então como S é conjugada a uma aplicação αz , por uma transformação em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ que depende apenas desses dois pontos, temos que $\alpha z \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ com $\alpha^2 = 1$. Como $-z$ não preserva H^2 , obtemos $S = \text{Id}$ pela Proposição 1.2.7. Temos então uma contradição com $S \neq \text{Id}$. Logo, S não pode ter dois pontos fixos reais.

Então S tem dois pontos fixos complexos conjugados P e \bar{P} com $\text{Im}(P) > 0$ (uma vez que as entradas de S são reais). Assim, temos um outro absurdo, pois $T(P) = \bar{P} \notin H^2$, o que contradiz a Proposição 1.2.7.

Portanto, a única opção que temos é que T e S fixam os mesmos pontos. O que conclui o resultado. \square

Vale ressaltar que o resultado não vale em $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ de maneira geral.

Exemplo 1.2.3. As transformações de Möbius $S(z) = -z$ e $T(z) = \frac{1}{z}$ comutam mas não fixam os mesmos pontos.

Proposição 1.2.8. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, suponha $k_1 \neq k_2, k_2^{-1}$. As transformações de Möbius $T(z) = k_1 z$ e $S(z) = k_2 z$ não são conjugadas por transformações de Möbius.

Demonstração. Sejam $T = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $S = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, as representações

matriciais. Suponha que exista uma transformação de Möbius $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que

T e $B S B^{-1} = \begin{pmatrix} (adk_2 - bc) & (-abk_2 + ab) \\ (cdk_2 - cd) & (-bck_2 + ad) \end{pmatrix}$ representam a mesma transformação

de Möbius. Então existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que vale o sistema:

$$\begin{cases} \lambda k_1 = adk_2 - bc \\ 0 = -abk_2 + ab \\ 0 = cdk_2 - cd \\ \lambda = -bck_2 + ad \end{cases}$$

Ora, se $a, b \neq 0$ temos então que $k_2 = 1$, analisando a equação $0 = -abk_2 + ab$. Portanto, $\lambda = -bc + ad \Rightarrow \lambda k_1 = (-bc + ad)k_1 = (ad - bc) \Rightarrow k_1 = 1$, contradição pois $k_1 \neq k_2$.

Se $a = 0$ temos por B ser transformação de Möbius que $b \neq 0$ e $c \neq 0$ (pois $ad - bc \neq 0$). Daí $\lambda = -bck_2$ e $-bck_2k_1 = -bc \Rightarrow k_2k_1 = 1$, contradição, pois $k_1 \neq k_2^{-1}$.

Se $b = 0$, então $a, d \neq 0$ (pela mesma discussão anterior). Daí $\lambda = ad \Rightarrow adk_1 = adk_2 \Rightarrow k_1 = k_2$, contradição novamente. Portanto, como todos os casos foram cobertos, segue que T e S não podem ser conjugadas. \square

Ao contrário das funções parabólicas, onde todas são conjugadas entre si, as funções não parabólicas podem ser conjugadas ou não entre si. A seguinte definição nos permite distinguir um pouco melhor essas funções não parabólicas.

Definição 1.2.7. *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, tal que T seja não parabólica. Seja $S(z) = \alpha z$ a transformação de Möbius a qual T é conjugada pela proposição 1.2.6. Então*

1. *se $|\alpha| = 1$, então T se chama elíptica;*
2. *se $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 1$ e $\alpha > 0$, então T se chama hiperbólica;*
3. *se $|\alpha| \neq 1$ e $\alpha \notin \mathbb{R}^+$ então T se chama loxodrômica.*

Uma outra forma de se ver essa distinção é analisando o traço. Se define o traço de uma matriz quadrada A como a soma dos elementos da diagonal de A , denotamos o traço de A por $\text{tr}(A)$. Consideramos o grupo linear especial projetivo $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e seja $A \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ um representante de um elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, a matriz $-A$ representa o mesmo elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e seu traço tem sinal oposto ao de A . Mas $\text{tr}^2(-A) = \text{tr}^2(A)$, então em $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ o quadrado do traço independe do representante escolhido em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ logo está bem definido e será com base nele que faremos nossa classificação.

Observação 1.2.4. Observe que dados $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ então

$tr(AB) = tr(BA)$ pois

$$AB = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix} \text{ e } BA = \begin{pmatrix} ea + bg & eb + fd \\ ga + hc & cf + dh \end{pmatrix}. \text{ Onde,}$$

$tr(ABA^{-1}) = tr(A^{-1}AB) = tr(B)$. Logo o traço é invariante por conjugação.

O próximo teorema permite classificarmos as transformações de Möbius não apenas verificando transformações as quais são conjugadas, mas olhando apenas a sua matriz representante em $SL(2, \mathbb{C})$.

Teorema 1.2.2 (classificação pelo traço). *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, $T \neq id$. Seja $tr^2(T)$ o quadrado do traço de T . Então*

1. T é parabólica se, e somente se, $tr^2(T) = 4$;
2. T é elíptica se, e somente se, $0 \leq tr^2(T) < 4$;
3. T é hiperbólica se, e somente se, $4 < tr^2(T)$;
4. T é loxodrômica se, e somente se, $tr^2(T) \notin [0, \infty)$.

Demonstração. 1. T é parabólico \Leftrightarrow conjugado a uma translação $z \rightarrow z + b$.

Podemos tomar o representante de T em $SL(2, \mathbb{C})$ como sendo $T = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Então $tr(T) = 2$, logo $tr^2(T) = 4$.

2. T é elíptico \Leftrightarrow é conjugado a uma rotação $z \rightarrow e^{i\theta}z$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Podemos tomar o representante de T em $SL(2, \mathbb{C})$ como sendo $T = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$

Então $tr(T) = 2\cos(\frac{\theta}{2})$, logo $tr^2(T) = 4\cos^2(\frac{\theta}{2}) < 4$.

3. T é hiperbólico \Leftrightarrow existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tal que T é conjugada a $z \rightarrow \alpha z$. Escrevendo $\alpha = k^2$ para $k > 0$, podemos tomar o representante de T em $SL(2, \mathbb{C})$ como

sendo $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k^{-1} \end{pmatrix}$

Então $tr(T) = k + k^{-1}$. Sabendo que $a, b \geq 0 \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ com igualdade apenas se $a = b$. Como $k \neq k^{-1}$ temos $\frac{k+k^{-1}}{2} > 1$, e daí temos que o traço ao quadrado é maior que 4.

4. T é loxodrômico $\Leftrightarrow T$ é conjugado a uma aplicação $z \rightarrow \alpha z$ tal que $|\alpha| \neq 1$ e $\alpha \notin \mathbb{R}^+$. Escrevendo $\alpha = k^2 e^{i\theta}$, onde $k \in \mathbb{R}, k \neq 0, |k| \neq 1$ e $\theta \in (0, 2\pi)$. Podemos tomar o representante de T em $SL(2, \mathbb{C})$ como sendo

$$T = \begin{pmatrix} ke^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & k^{-1}e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}$$

Então, temos

$$tr(T) = ke^{i\frac{\theta}{2}} + k^{-1}e^{-i\frac{\theta}{2}} \implies tr^2(T) = e^{i\theta}k^2 + e^{-i\theta}k^{-2} + 2 \notin [0, \infty).$$

Temos $tr^2(T) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(tr^2(T)) = 0$ e usando

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta) \text{ e } e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \text{sen}(-\theta),$$

temos que $\text{Im}(tr^2(T)) = (k^2 - k^{-2})\text{sen}(\theta)$.

Suponha que $\theta \neq \pi$, temos $\text{Im}(tr^2(T)) = 0 \implies |k| = 1$, uma contradição.

Finalmente, suponha que $\theta = \pi$. Obtemos

$$\text{Im}(tr^2(T)) = 0 \implies \text{Re}(tr^2(T)) = 2 - (k^2 + k^{-2}).$$

Como $k^2 > 0$, podemos substituir $k^2 = x > 0$ e concluir que $\text{Re}(tr^2(T)) < 0$ usando que $x + x^{-1} > 2$, terminando assim a prova. □

A partir do traço é possível determinar se duas transformações de Möbius são conjugadas entre si. Isso é garantido pelo seguinte teorema.

Teorema 1.2.3. *Duas transformações de Möbius S, T são conjugadas se, e somente se, $tr^2(S) = tr^2(T)$.*

Demonstração. Se T e S são conjugadas, pela invariância do traço por conjugação, temos o resultado.

Se umas das transformações S ou T é parabólica, as duas são parabólicas. E já vimos que ambas são conjugadas a $z \rightarrow z + 1$ e por isso são conjugadas entre si.

Suponha que ambas são não parabólicas. Sem perda de generalidade, suponha $S(z) = \alpha z$ e $T(z) = \beta z$, onde $\beta = b^2$ e $\alpha = a^2$ para algum par $a, b \in \mathbb{C}$. Podemos assim, tomar como representantes de S e T em $SL(2, \mathbb{C})$ respectivamente como sendo as matrizes

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\text{tr}^2(S) = (a + a^{-1})^2 = a^2 + a^{-2} + 2 = \alpha + \alpha^{-1} + 2$$

e, analogamente temos $\text{tr}^2(T) = \beta + \beta^{-1} + 2$. Assim,

$$\alpha + \alpha^{-1} = \beta + \beta^{-1}$$

Uma vez que β é uma solução não nula da equação complexa $\alpha + \alpha^{-1} - z - z^{-1} = 0$ temos que β é solução de

$$\alpha + \alpha^{-1} - z - z^{-1} = \frac{-\alpha z^2 + z\alpha^2 + z - \alpha}{\alpha z} = 0,$$

logo, β é uma das duas soluções da equação polinomial

$$-\alpha z^2 + z\alpha^2 + z - \alpha = 0.$$

Portanto, $\beta = \alpha$ ou $\beta = \alpha^{-1}$. Se $\beta = \alpha$, T e S são claramente conjugadas. Se $\beta = \alpha^{-1}$, T e S são conjugadas por $z \rightarrow \frac{1}{z}$. O que concluí o resultado. \square

1.2.3 Transformações que preservam modelos

No capítulo seguinte, apresentaremos uma geometria que chamaremos de geometria hiperbólica, na qual as transformações de Möbius serão de extrema importância. Aqui serão apresentados dois modelos: o modelo do *semiplano superior* H^2 e o modelo do *disco unitário*.

A seguinte proposição nos permite ver que as transformações de Möbius que preservam H^2 são aquelas em correspondência com $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Proposição 1.2.9. *Temos*

$$\{T \in \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \mid T(H^2) = H^2\} = \text{PSL}(2, \mathbb{R}).$$

Demonstração. A inclusão do conjunto à direita no conjunto à esquerda decorre da Proposição 1.2.7. A seguir provaremos a outra inclusão.

Seja

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - cb = 1$. Considere também

$$S(z) = \frac{\bar{a}z + \bar{b}}{\bar{c}z + \bar{d}},$$

onde \bar{x} denota o conjugado complexo de x .

Por continuidade e pelo fato de T ser bijetivo, T preserva $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Repare ainda que

$$z \in \mathbb{R} \implies T(z) = \overline{T(z)} = S(\bar{z}) = S(z).$$

Portanto, $T = S$ e $a = \pm\bar{a}$, $b = \pm\bar{b}$, $c = \pm\bar{c}$ e $d = \pm\bar{d}$.

Assim, a, b, c e d ou são reais, ou são imaginários puros. Suponha por contradição que são imaginários puros, escrevemos $a = a'i$, $b = b'i$, $c = c'i$, $d = d'i$ onde $a', b', c', d' \in \mathbb{R}$ e $ad - cb = c'b' - a'd' = 1$.

Neste caso,

$$T(i) = \frac{-a' + b'i}{-c' + d'i} = \frac{(-a' + b'i)(-c' - d'i)}{(-c')^2 + (d')^2} \implies \text{Im}(T(i)) = \frac{a'd' - c'b'}{(-c')^2 + (d')^2} < 0,$$

uma contradição, pois T preserva H^2 . Logo, a, b, c e d são reais. \square

A partir das transformações que preservam H^2 conseguimos descobrir as transformações que preservam $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$. Tais transformações serão importantes quando estivermos usando o modelo do disco unitário. Considere a transformação de Möbius

$$U(z) = \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Avaliando U em $0, 1$ e -1 temos $U(0) = -i, U(1) = 1$, e $U(-1) = -1$. Uma vez que U leva círculos em círculos. Temos que U leva $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ em $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Uma vez que $U(i) = 0$, a continuidade e bijetividade garante que $U(H^2) = \Delta$.

Teorema 1.2.4. *As transformações de Möbius em $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ que preservam o disco unitário são da forma*

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Demonstração. Observe primeiro que $U^{-1}(z) = \frac{iz - 1}{-z + i}$, é a inversa de U . Além disso, observe que se $S \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ satisfaz $S(\Delta) = \Delta$ então $T := U^{-1}SU \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ pois $T(H^2) = H^2$. Olhando para as representações matriciais temos:

$$[S] = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ai + c & bi + d \\ ci + a & di + b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix},$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Assim,

$$[S] = \begin{pmatrix} -(a + d) + i(c - b) & -(c + b) + i(d - a) \\ -(c + b) - i(d - a) & -(a + d) - i(c - b) \end{pmatrix}.$$

Logo, fazendo $\alpha = -(a + d) + i(c - b)$ e $\beta = -(c + b) + i(d - a)$ temos que

$$[S] = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}.$$

Repare que essa representação matricial de $[S]$ é tal que $\det([S]) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ então em termos de a, b, c, d temos $\det([S]) = 4(ad - bc) = 4$. Apesar de não ser uma matriz de determinante 1, e portanto não ser um bom representante no nosso caso, basta multiplicar cada entrada da matriz por $\frac{1}{2}$. Assim, $S(z) = \frac{\alpha' z + \beta'}{\bar{\beta}' z + \bar{\alpha}'}$ onde $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$ e $\beta' = \frac{\beta}{2}$ onde $|\alpha'|^2 - |\beta'|^2 = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2}{4} = 1$.

Reciprocamente, vamos ver que

$$S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\beta z + \bar{\alpha}}, \quad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

preserva o disco unitário. Para isso, basta ver que $|S(i)| = |S(1)| = |S(-1)| = 1$ e que $S(0) \in \Delta$. Como $|z| = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1$, basta que:

- $|S(i)|^2 = 1$, de fato

$$|S(i)|^2 = S(i)\overline{S(i)} = \left(\frac{\alpha i + \beta}{\beta i + \bar{\alpha}} \right) \overline{\left(\frac{\alpha i + \beta}{\beta i + \bar{\alpha}} \right)} = \frac{\alpha \bar{\alpha} + \bar{\beta} \alpha i - \bar{\alpha} i \beta + \beta \bar{\beta}}{\alpha \bar{\alpha} + \bar{\beta} \alpha i - \bar{\alpha} i \beta + \beta \bar{\beta}} = 1;$$

- $|S(-i)|^2 = 1$, de fato

$$|S(-i)|^2 = S(-i)\overline{S(-i)} = \left(\frac{-\alpha i + \beta}{-\beta i + \bar{\alpha}} \right) \overline{\left(\frac{-\alpha i + \beta}{-\beta i + \bar{\alpha}} \right)} = \frac{\alpha \bar{\alpha} - \bar{\beta} \alpha i + \bar{\alpha} i \beta + \beta \bar{\beta}}{\alpha \bar{\alpha} - \bar{\beta} \alpha i + \bar{\alpha} i \beta + \beta \bar{\beta}} = 1;$$

- $|S(1)|^2 = 1$, de fato

$$|S(1)|^2 = S(1)\overline{S(1)} = \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta + \bar{\alpha}} \right) \overline{\left(\frac{\alpha + \beta}{\beta + \bar{\alpha}} \right)} = \left(\frac{\alpha + \beta}{\beta + \bar{\alpha}} \right) \left(\frac{\bar{\beta} + \bar{\alpha}}{\alpha + \beta} \right) = 1.$$

Finalmente, obtém-se $|S(0)|^2 = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{|\beta|^2}{|\beta|^2 + 1} < 1$. □

Terminamos este capítulo observando que, as transformações que preservam discos não podem ser transformações loxodrômicas. Com efeito, dado $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ qualquer tem-se $\text{tr}^2(T) \in [0, \infty)$, assim o teorema 1.2.2 garante que T não pode ser loxodrômica.

Capítulo 2

Geometria Hiperbólica

A geometria hiperbólica plana é uma geometria não-Euclidiana na qual valem os postulados de Euclides exceto o 5°. O 5° postulado diz que dado uma reta m e um ponto P fora de m , existe uma única reta l paralela a m , isto é que não intersecta a m , que contém P . Na geometria hiperbólica ocorre que dada uma reta m e um ponto P fora de m existem infinitas retas paralelas que contém P .

Neste capítulo apresentaremos dois modelos da geometria hiperbólica plana. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [7].

2.1 Modelo do semiplano superior

Primeiro, consideraremos o conjunto $H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y > 0\}$ no plano \mathbb{R}^2 . Identificando $z = x + iy \in \mathbb{C}$ com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. O modelo do semiplano superior de Poincaré é o semiplano H^2 munido da estrutura que apresentaremos a seguir.

O comprimento hiperbólico C_γ de uma curva suave por partes γ , neste modelo, será dada por calcular a integral

$$\int_\gamma \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}}{y}.$$

Vejamos um exemplo prático.

Exemplo 2.1.1 (Comprimento Hiperbólico de segmentos verticais). *Seja γ uma curva vertical da forma $\gamma : [y_1, y_2] \rightarrow H$ com $\gamma(t) = (x, t)$, supondo $y_1 < y_2$. Neste caso,*

Tem-se $dx = 0$ e $dy = dt$. Portanto, $(0 < y_1 < y_2)$

$$C_\gamma = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln(y_2) - \ln(y_1) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Define-se a métrica hiperbólica, denotada por d_h , como sendo a dada pela função $d_h : H^2 \times H^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $d_h(x, y) = \inf\{C_\gamma\}$, onde $\inf\{C_\gamma\}$ é o ínfimo obtido dentro todos os comprimentos hiperbólicos de caminhos suaves por pedaços γ de x a y . A condição de ínfimo garante que d_h é não negativa, sendo zero apenas se $y = x$. Ainda mais, valem $d_h(x, y) = d_h(y, x)$ e a desigualdade triangular. Portanto é uma métrica. Chamaremos d_h muitas vezes ao longo do texto de distância hiperbólica.

Exemplo 2.1.2. *Mostraremos aqui que a curva de comprimento hiperbólico mínimo entre $P = (x, y_1)$ e $Q = (x, y_2)$ em H^2 com $y_1 < y_2$ é exatamente o segmento vertical $[P, Q]$. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow H^2$ um caminho suave por pedaços qualquer, então*

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt}{y(t)} \geq \int_0^1 \frac{\sqrt{(y'(t))^2} dt}{y(t)} \geq \int_0^1 \frac{y'(t) dt}{y(t)} = \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

mas $\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ é o comprimento hiperbólico de $[P, Q]$ (cf. exemplo 2.1.1) e portanto

$$d_h(P, Q) = \ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Vamos ver que em um certo sentido o segmento $[P, Q]$ é a única curva de comprimento hiperbólico $d_h(P, Q)$. Mais precisamente, para que a primeira desigualdade seja uma igualdade, precisamos que $x(t)$ seja constante, ou seja que o caminho esteja contido na reta vertical que contém os pontos P e Q . Para que a segunda desigualdade seja uma igualdade precisamos que y' nunca seja negativo. A discussão garante que salvo reparametrização, o segmento $[P, Q]$ é a uma única curva de comprimento mínimo ligando P e Q .

No decorrer do texto, o fecho de um conjunto $D \subset H^2$ relativo ao modelo do plano hiperbólico, será denotado por \tilde{D} . Enquanto o fecho em \mathbb{C}_∞ será denotado por \overline{D} .

Como no caso euclidiano, queremos que as retas sejam as curvas que tenham a menor distância hiperbólica entre dois de seus pontos. Definimos então:

Definição 2.1.1. As retas hiperbólicas, ou simplesmente retas, em H^2 são semi-circunferências euclidianas centradas no eixo- x e contidas no plano semiplano $y > 0$ ou semi-retas euclidianas perpendiculares ao eixo x contidas no plano semiplano $y > 0$.

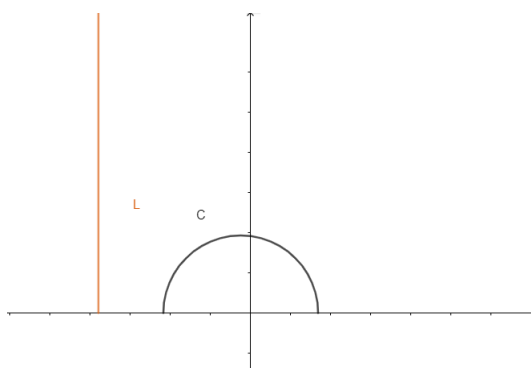


Figura 2.1: retas hiperbólicas

Observação 2.1.1 (Construindo segmentos de retas que ligam dois pontos). Dados dois pontos distintos $P = (x_P, y_P)$ e $Q = (x_Q, y_Q)$ em H^2 , com $x_P \neq x_Q$. Para achar a circunferência C que passa por P e Q e tem centro sob o eixo- x fazemos uso da geometria analítica. Bastando considerar o segmento PQ e seu ponto médio euclidiano M que é dado por $M = \frac{P+Q}{2} = (x_M, y_M)$. Ainda da geometria analítica, sabe-se que o coeficiente angular de toda reta perpendicular a PQ é dado por $a = \frac{x_P - x_Q}{y_P - y_Q}$ se $y_P \neq y_Q$, e neste caso a equação cartesiana da reta perpendicular a PQ (denotaremos a reta por s) que passa por M é $y - y_M = a(x - x_M)$, assim o ponto $(-y_M \cdot a^{-1} + x_M, 0) =: c$ é o ponto de interseção entre o eixo- X e a reta s . Além disso, c é o centro de circunferência que passa por P e Q . O caso que $x_P = x_Q$, fica a cargo do exemplo 2.1.1.

Denotaremos o segmento de reta hiperbólica que liga dois pontos $P, Q \in H^2$ por $[P, Q]$.

As isometrias, as vezes chamadas de movimentos rígidos, são transformações que preservam distâncias. Na geometria euclidiana as isometrias são expressas por funções bem conhecidas sendo sempre composições de translações, reflexões ou rotações.

No caso da geometria hiperbólica, especificamente no modelo H^2 as isometrias são caracterizadas com o seguinte resultado:

Teorema 2.1.1. *As isometrias em H^2 coincidem com as funções complexas dadas pelas seguintes formas:*

$$(1) f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \text{ ou};$$

$$(2) g(z) = f(-\bar{z}), \text{ sendo } f \text{ como em (1),}$$

onde os números reais a, b, c, d são tais que $ad - cb = 1$.

Demonstração. Não faremos aqui a prova completa, mas diremos a ideia por trás. Para tal são utilizadas ferramentas da geometria axiomática, isso quer dizer que através dos axiomas é possível garantir quais como são formadas as isometrias, vide [7] capítulos 4, 5 e 9.

Essas isometrias hiperbólicas podem ser escritas como composição de três reflexões hiperbólicas. As reflexões hiperbólicas, em termos das aplicações euclidianas conhecidas, são translações horizontais, reflexões euclidianas e inversões em círculos. Todas podem ser escritas como transformações de Möbius (satisfazendo as hipóteses do enunciado) compostas com $z \rightarrow -\bar{z}$ se necessário. \square

Mesmo fornecendo só uma ideia da prova do Teorema 2.1.1, podemos apresentar a seguinte versão simples do resultado anterior.

Lema 2.1.1. *Toda transformação de Möbius em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é uma isometria em H^2 .*

Demonstração. Sejam $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow H^2$ uma curva suave por pedaços. Temos

$$C_\gamma = \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}(\gamma(t))} dt \quad \text{e} \quad C_{T(\gamma)} = \int_0^1 \frac{|(T \circ \gamma)'(t)|}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} dt = \int_0^1 \frac{|T'(\gamma(t))||\gamma'(t)|}{\text{Im}(T(\gamma(t)))} dt.$$

Então basta provar que

$$\frac{|T'(z)|}{\text{Im}(T(z))} = \frac{1}{\text{Im}(z)} \tag{2.1}$$

para todo $z \in H^2$ para obter que T preserva distâncias e portanto que é uma isometria.

Seja

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc = 1$. Temos que

$$|T'(z)| = \frac{1}{|cz + d|^2}$$

e

$$\operatorname{Im}(T(z)) = \frac{1}{2i} \left(\frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \right) = \frac{1}{|cz + d|^2} \frac{z - \bar{z}}{2i} = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

implicam a Equação (2.1). □

Ainda mais, pode-se provar que as retas hiperbólicas são imagens de semirretas verticais por aplicações em $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$. Como as semirretas verticais minimizam a distância entre seus pontos e $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \operatorname{Isom}(H^2)$, as retas hiperbólicas são geodésicas, ou seja minimizam distâncias entre os seus pontos, de H^2 .

2.2 Modelo do disco unitário

Já vimos que a transformação de Möbius

$$U(z) = \frac{iz + 1}{z + i}$$

é tal que $U(H^2) = \Delta$ e que $U(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$. Vamos utilizar dela para definir o modelo do disco unitário. Começaremos usando a distância hiperbólica d_h do modelo do semiplano para definir a distância hiperbólica ρ no modelo do disco unitário. Se P, Q são dois pontos qualquer em $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ então definimos

$$\rho(P, Q) := d_h(U^{-1}(P), U^{-1}(Q)).$$

Sabemos que as transformações de Möbius permutam os círculos em \mathbb{C}_∞ . Mais ainda, essas transformações são mapas conformes em \mathbb{C}_∞ , isto é, preservam ângulos. Podemos então definir as retas hiperbólicas assim:

Definição 2.2.1. *As retas hiperbólicas em Δ são a imagens das retas hiperbólicas de H^2 por U .*

Uma outra caracterização das retas hiperbólicas em Δ , que passa a não depender de H^2 quando apresentada, é dizer que as retas hiperbólicas no disco são círculos generalizados perpendiculares ao círculo unitário. Uma vez que as transformações de Möbius são conformes, as retas hiperbólicas em H^2 são perpendiculares ao bordo e temos a correspondência $U(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = S^1$, é possível mostrar que as definições são equivalentes.

Observe que, se $\text{Isom}(H^2)$ denota o grupo de isometrias em H^2 e $\text{Isom}(\Delta)$ denota o grupo de isometrias em Δ , temos que $\text{Isom}(\Delta) = U \circ \text{Isom}(H^2) \circ U^{-1}$. Em resumo, temos o próximo resultado, que talvez não seja uma surpresa ao leitor.

Proposição 2.2.1. *As isometrias no modelo do disco unitário são transformações dadas por*

$$(1) f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}};$$

$$(2) g(z) = f(-\bar{z}), \text{ sendo } f \text{ como em (1)}$$

onde $a, c \in \mathbb{C}$ tais que $|a|^2 - |c|^2 = 1$.

Demonstração. Basta aplicar o teorema 1.2.4 e o teorema 2.1.1. □

Um modelo não depende do outro para ser definido, apresentamos desta forma por acreditar ser mais intuitivo. Porém, acreditamos que seja importante o leitor conhecer explicitamente como calcular comprimentos de curvas.

Teorema 2.2.1. *O comprimento hiperbólico de uma curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow \Delta$ é dada pelo integral*

$$\int_{\gamma} \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2}.$$

Demonstração. Analogamente a distância hiperbólica neste modelo, usamos o modelo do semiplano para calcular comprimento por definição. Denote por $C_\gamma(\Delta)$ o comprimento de γ , então

$$\begin{aligned} C_\gamma(\Delta) &= C_{U^{-1} \circ \gamma} = \int_{U^{-1} \circ \gamma} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y} = \int_a^b \frac{|(U^{-1} \circ \gamma)'(t)|}{\text{Im}(U^{-1} \circ \gamma(t))} dt = \\ &= \int_a^b \frac{|(U^{-1})'(\gamma(t))| |\gamma'(t)|}{\text{Im}(U^{-1} \circ \gamma(t))} dt = \int_a^b \frac{2|\gamma'(t)|}{1 - |\gamma(t)|^2} dt = \int_\gamma \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - x^2 - y^2}. \end{aligned}$$

A menos de ver que $\frac{|(U^{-1})'(z)|}{\text{Im}(U^{-1}(z))} = \frac{2}{1 - |z|^2}$ todas as etapas das igualdades acima valem. Porém, através de contas simples temos

$$|(U^{-1})'(z)| = \left| \frac{-2}{(-z + i)^2} \right| = \frac{2}{|-z + i|^2}$$

e $\text{Im}(U^{-1}(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|-z + i|^2}$ finalizando assim o resultado. \square

Observação 2.2.1. *As funções hiperbólicas são funções de uma variável complexa que são expressas por funções racionais de exponenciais.*

- *Seno hiperbólico:* $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
- *Cosseno hiperbólico:* $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$;
- *Tangente hiperbólica:* $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$;
- *Cotangente hiperbólica:* $\coth(x) = \tanh^{-1}(x)$, definida se $x \neq 0$.

Pode-se provar a identidade trigonométrica $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.

Veremos que dado $w \in \Delta$ e $\epsilon > 0$, os conjuntos da forma

$$\{z \in \Delta \mid \rho(z, w) = \epsilon\},$$

chamados de *círculos hiperbólicos*, estão em bijeção com os círculos euclidianos inteiramente contidos em Δ .

Observação 2.2.2. Dado $w \in \Delta$ tal que $w \neq 0$ o segmento hiperbólico $[0, w]_h$ é igual ao segmento de reta euclidiano $[0, w]$. De fato, U leva a semi-reta vertical $i\mathbb{R}^+$ no segmento euclidiano $(-i, i)$. Se $\rho(0, w) = r$ então tome $w' \in (-i, i)$ tal que $\rho(0, w') = r$. Como U carrega geodésicas de H^2 em geodésicas de Δ o segmento vertical $[0, w']$ é uma geodésica hiperbólica, isto é $[0, w'] = [0, w']_h$. Existe uma rotação $\pi(z) = e^{i\theta}z$ de centro 0 e ângulo θ tal que $\pi(w') = w$ e como rotações euclidianas de centro na origem preservam Δ e são transformações de Möbius temos que são isometrias hiperbólicas. Logo, $[0, w] = \pi([0, w']) = \pi([0, w']_h) = [0, w]_h$.

Esse argumento é suficiente para concluir que toda circunferência hiperbólica de centro na origem é uma circunferência euclidiana de centro na origem (repare que os raios não coincidem) e vice-versa.

Proposição 2.2.2. Todo círculo hiperbólico é um círculo euclidiano

Demonstração. Seja C_0 um círculo hiperbólico de centro z e raio r em H^2 ou Δ . De fato, existe uma isometria de H^2 em Δ ou de Δ em Δ que leva C_0 em um círculo hiperbólico C em Δ de centro 0 e raio r . Mas, os círculos hiperbólicos em Δ são círculos euclidianos com mesmo centro (mas não o mesmo raio). Como as transformações de Möbius preservam os círculos euclidianos, temos o resultado. \square

Corolário 2.2.1. Todo círculo euclidiano contido em Δ é um círculo hiperbólico

Demonstração. Como tanto círculos hiperbólicos quanto círculos euclidianos estão determinados por três quaisquer dos seus pontos, ambos conjuntos coincidem pela Proposição 2.2.2. \square

Observe que $SL(2, \mathbb{C})$ é um subconjunto de $M_2(\mathbb{C})$, onde $M_2(\mathbb{C})$ denota o conjunto de matrizes com entradas complexas 2×2 . A norma $\|\cdot\|$ em $M_2(\mathbb{C})$ dada por

$$\left\| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2}$$

induz uma métrica em $SL(2, \mathbb{C})$.

Mais tarde será útil para nós considerarmos a seguinte relação envolvendo a norma. A relevância de citá-la agora é que ela dá uma caracterização para o calculo da distância hiperbólica dependo apenas dos pontos.

Proposição 2.2.3. *Para todo $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tem-se $2 \cosh(d_h(i, T(i))) = \|T\|^2$.*

Demonstração. Faremos uso da identidade

$$\cosh(d_h(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2\text{Im}(x)\text{Im}(y)},$$

provada em [1, p. 130]. Com base nisso, é suficiente mostrar que dado $T \in PSL(2, \mathbb{R})$ tem-se:

$$2 + \frac{|i - T(i)|^2}{\text{Im}(i)\text{Im}(T(i))} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

onde

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - cb = 1$. Primeiro observe que $\text{Im}(i) = 1$ e $\text{Im}(T(i)) = \frac{1}{c^2 + d^2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} 2 + \frac{|i - T(i)|^2}{\text{Im}(i)\text{Im}(T(i))} &= 2 + \frac{\left| i - \frac{ac + bd + i}{c^2 + d^2} \right|^2}{(c^2 + d^2)^{-1}} = \\ &= 2 + \frac{(ac + bd)^2 + (c^2 + d^2 - 1)}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{2(c^2 + d^2) + a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + 1 - 2d^2 - 2c^2 + d^4 + 2d^2c^2 + c^4}{c^2 + d^2} =: I \end{aligned}$$

Mas, lembrando que $ad - bc = 1 \Rightarrow 1 = (ad - bc)^2$ e substituindo em I , temos:

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2c^2 + 2abcd + b^2d^2 + (ad - cb)^2 + d^4 + 2d^2c^2 + c^4}{c^2 + d^2} = \\ &= \frac{(c^2 + d^2)(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)}{c^2 + d^2} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \|T\|^2. \end{aligned}$$

O que concluí o resultado. □

Corolário 2.2.2. *Seja uma transformação de Möbius $S(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}$ do tipo que preserva o disco unitário, isto é, satisfazendo $|a|^2 - |b|^2 = 1$, com $a, b \in \mathbb{C}$. Vale que $2 \cosh(\rho(0, S(0))) = \|S\|^2$*

Demonstração. Fixado S como acima. Se escrevemos $a = x_a + iy_a$ e $b = x_b + iy_b$, onde $x_a, x_b, y_a, y_b \in \mathbb{R}$. Assim, $\|S\|^2 = 2(x_a^2 + x_b^2 + y_a^2 + y_b^2)$.

Por outro lado, usado a proposição 2.2.3, temos:

$$2 \cosh(\rho(0, S(0))) = 2 \cosh(d_h(U^{-1}(0), U^{-1}S(0))) = 2 \cosh(d_h(i, U^{-1}SU(i))) = \|U^{-1}SU\|^2.$$

Pela demonstração do teorema 1.2.4, a matriz em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ que determina $U^{-1}SU$ é dada por

$$\frac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \right]$$

e, em termos de x_a, x_b, y_a, y_b , obtemos que a transformação de Möbius que queremos está determinada pela matriz

$$[U^{-1}SU] = \begin{pmatrix} -x_a - y_b & -x_b - y_a \\ -x_b + y_a & -x_a + y_b \end{pmatrix}$$

Logo, temos

$$\|U^{-1}SU\|^2 = 2(x_a^2 + x_b^2 + y_a^2 + y_b^2),$$

o que concluí o resultado. □

Usando a identidade

$$\cosh(d_h(x, y)) = 1 + \frac{|x - y|^2}{2\text{Im}(x)\text{Im}(y)}$$

podemos dar uma caracterização para a distância hiperbólica entre dois pontos em Δ que dependa apenas deles mesmo. Explicitamente, a distância entre $w, z \in \Delta$ satisfaz:

$$\cosh(\rho(z, w)) = \cosh(d_h(U^{-1}(z), U^{-1}(w))) = 1 + \frac{|U^{-1}(z) - U^{-1}(w)|^2}{2\text{Im}(U^{-1}(z))\text{Im}(U^{-1}(w))}.$$

Como $U^{-1}(z) - U^{-1}(w) = \frac{2w - 2z}{(i - z)(i - w)}$ e como $\text{Im}(U^{-1}(x)) = \frac{1 - |x|^2}{|i - x|^2}$ para todo $x \in \Delta$ temos que

$$\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|U^{-1}(z) - U^{-1}(w)|^2}{2\text{Im}(U^{-1}(z))\text{Im}(U^{-1}(w))} = 1 + \frac{2|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}.$$

Gostaríamos também de caracterizar a distância hiperbólica de $w \in \Delta$ a uma geodésica ℓ qualquer, definida por

$$\rho(w, \ell) = \inf\{\rho(w, z) | z \in \ell\}.$$

Na página 163 de [1] é deduzido, para todo $w \in \Delta$, que

$$\sinh(\rho(w, L)) = \frac{2|\operatorname{Im}(w)|}{1 - |w|^2},$$

onde L é o segmento de reta euclidiano que liga 1 a -1 no plano complexo; perceba que L é uma reta geodésica de Δ . Mais a frente no texto será necessário o seguinte resultado.

Proposição 2.2.4. *Dados $w \in \Delta$ e $\lambda \in \partial\Delta$. Se $L' = (-\lambda, \lambda)$ temos que*

$$\sinh(\rho(w, L')) = \frac{2|\operatorname{Im}(\bar{\lambda}w)|}{1 - |\bar{\lambda}w|^2}.$$

Demonstração. Considere a transformação de Möbius $T(z) = \bar{\lambda}z$. Esta é uma transformação de Möbius que preserva o disco unitário e portanto é uma isometria para este modelo.

Como $T(0) = 0$, $T(-\lambda) = -1$ e $T(\lambda) = 1$ concluímos que $T(L') = L$. Assim,

$$\sinh(\rho(w, L')) = \sinh(\rho(\bar{\lambda}w, L)) = \frac{2|\operatorname{Im}(\bar{\lambda}w)|}{1 - |\bar{\lambda}w|^2}.$$

□

2.3 Área hiperbólica

Consideremos primeiro o modelo do semiplano superior. Sabe-se da geometria euclidiana que a área euclidiana de uma região $R \subset \mathbb{R}^2$ é dada pela integral dupla

$$\int \int_R dx dy.$$

A gente definiu uma métrica hiperbólica que é completa e conforme. Mais geralmente, a gente tem uma métrica riemanniana

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

definida em H^2 . Imediatamente, obtemos uma fórmula para a área na geometria hiperbólica.

Definição 2.3.1. Dado uma região $R \subset H^2$, se define sua área hiperbólica como o integral duplo

$$\int \int_R \frac{dx dy}{y^2}.$$

Denotaremos a área hiperbólica de R , por $h\text{-área}(R)$.

Exemplo 2.3.1. Como motivamos essa definição fazendo um comparativo com a área euclidiana. Analisaremos a área dos seguintes conjuntos em H^2 ,

$$A = (0, 1) \times (0, 1), \quad B = (0, 1) \times (1, 2) \quad \text{e} \quad C = (0, 1) \times (2, \infty),$$

veja a figura 2.2. No caso euclidiano, as áreas de A , B e C são respectivamente 1, 1 e ∞ . Já no caso hiperbólico são:

- $\int \int_A \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2} = \infty$;
- $\int \int_B \frac{dx dy}{y^2} = \int_1^2 \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_1^2 \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}$;
- $\int \int_C \frac{dx dy}{y^2} = \int_2^\infty \int_0^1 \frac{dx dy}{y^2} = \int_2^\infty \frac{dy}{y^2} = \frac{1}{2}$.

Vemos assim que a área hiperbólica tem grande diferença quando comparada com a área euclidiana. Mesmo que duas regiões de H^2 tenham mesma área euclidiana, não necessariamente elas terão mesma área hiperbólica.

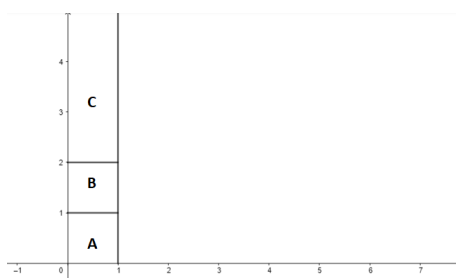


Figura 2.2: Regiões A , B e C .

Pode-se provar que as áreas hiperbólicas são invariantes pela ação de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, já que a condição de preservação de distância e preservação área são essencialmente as mesmas. De maneira análoga ao comprimento hiperbólico no modelo do disco unitário, podemos definir a área hiperbólica de uma região $R \subset \Delta$ como sendo

$$\text{Área hiperbólica de } R := h - \text{área}(U^{-1}(R)).$$

Mencionaremos aqui, sem demonstração, um resultado que relaciona as áreas de um polígono com os ângulos de seus vértices.

Teorema 2.3.1. *Se P é qualquer polígono hiperbólico com ângulos interiores $\theta_1, \dots, \theta_n$. Então*

$$h - \text{área}(P) = (n - 2)\pi - \sum_{i=1}^n \theta_i.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 153. □

Observação 2.3.1. *Lembre-se que para um polígono euclidiano temos que vale a igualdade $n - 2 = \theta_1 + \dots + \theta_n$.*

Capítulo 3

Grupo fuchsianos

Neste capítulo estudaremos propriedades de alguns dos subgrupos de transformações de Möbius em $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ que preservam discos.

3.1 Grupos propriamente descontínuos

O conjunto dos homeomorfismos de um espaço topológico X , denotado por $\text{Homeo}(X)$, é um grupo em relação a composição. Por simplicidade de notação, escrevemos $g \circ h = gh$.

A *órbita* de um ponto $x \in X$ relativamente a um grupo de homeomorfismos G é o conjunto $G(x) := \{g(x) | g \in G\}$. A relação "existe $g \in G$ tal que $g(x) = y$ " é uma relação de equivalência entre pontos $x, y \in X$. A classe de equivalência de um ponto $x \in X$ segundo essa relação é a sua órbita.

Observação 3.1.1 (Relação de equivalência). *Dados $x, y \in X$, quando x se relaciona com y escrevemos $x \sim y$. De fato, dado um grupo de homeomorfismos G de X . Temos que a relação definida acima é de equivalência. Pois, cumpre as propriedades*

Reflexiva Repare que como G é subgrupo, $Id \in G$ e portanto $Id(x) = x$. Donde $x \sim x$.

Simétrica Se $x \sim y$, temos então que existe $g \in G$ que $g(x) = y$ e portanto $g^{-1}(y) = x$ e

$$y \sim x$$

Transitiva Se $x \sim y$ e $y \sim z$. Segue que existem $g, h \in G$ tal que $g(x) = y$ e $h(y) = z$,
 donde $hg(x) = z$ e portanto $x \sim z$.

Observação 3.1.2. Dados $x, y \in X$, tem-se $G(x) = G(y)$ ou $G(x) \cap G(y) = \emptyset$.

Definição 3.1.1. Diz-se que um grupo de homeomorfismos G é propriamente descontínuo, ou que sua ação é propriamente descontínua, em um espaço métrico X quando para todo $K \subset X$ compacto tem-se $g(K) \cap K = \emptyset$, exceto para um número finito de $g \in G$.

Se G é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de um espaço X então fixado $x \in X$ existe um número finito de $g \in G \setminus \{Id\}$ tal que $g(x) = x$. Então todo ponto $x \in X$ é o ponto fixo de no máximo um número finito de aplicações de G .

Proposição 3.1.1. Seja X um espaço topológico e G um grupo que age sobre X . Sejam $x \in X$ e $g_1, g_2, \dots \in G$ são elementos de G distintos. Se G age de forma propriamente descontínua em X então $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x), \dots$ não pode convergir para um ponto $y \in X$

Demonstração. Suponha por absurdo que $g_n(x) \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Então $\{x, y, g_1(x), g_2(x), \dots\} =: K$ é compacto. Daí $g_n(K) \cap K \supset \{g_n(x)\}$, absurdo, pois G é propriamente descontínuo. □

Exemplo 3.1.1. Para cada $m \in \mathbb{Z}$, seja $T_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ a translação $T_m(z) = z + m$. O conjunto $G = \langle T_1 \rangle$ é um grupo propriamente descontínuo de homeomorfismos de \mathbb{R} . Basta olhar para os intervalos $K = [-n, n]$ com $n \in \mathbb{N}$, pois todo compacto está contido em um intervalo desses. Neste caso, para que $T_m(K) \cap K \neq \emptyset$ ocorra tem-se que $m \in [-2n, 2n] \subset \mathbb{Z}$. Portanto temos um número finito de elementos $T_m \in G$ tal que dado compacto K a interseção $T_m(K) \cap K$ seja não vazia.

3.2 Subgrupos de $SL(2, \mathbb{C})$

Nosso principal objeto de estudo nesta seção serão os subgrupos discretos de $SL(2, \mathbb{C})$ que vamos definir agora.

Definição 3.2.1. Um subgrupo $\Gamma < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ é discreto se, e somente se, não existe uma sequência de elementos distintos que converge a um elemento do grupo.

Lema 3.2.1. Seja $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de elementos dois a dois distintos de $\Gamma \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$ tal que $T_n \rightarrow T \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$ quando $n \rightarrow \infty$. Então existe uma sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $G \setminus \{Id\}$ tal que $S_n \rightarrow Id$.

Demonstração. Temos $T_n T_{n+1}^{-1} \rightarrow T T^{-1} = Id$. Repare que $T_n \neq T_{n+1} \implies T_n T_{n+1}^{-1} \neq Id$ para todo n . Assim, temos o resultado. \square

O lema nos dá uma nova caracterização para os subgrupos discretos de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Corolário 3.2.1. Um subgrupo Γ de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é discreto se, e somente se, para toda sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em Γ cujo o limite existe, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_n = T_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$.

Corolário 3.2.2. Um subgrupo discreto de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ é fechado.

Definição 3.2.2. Um subgrupo $\bar{\Gamma} < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é discreto quando sua pré-imagem pela projeção canônica $\pi : \text{SL}(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é um subgrupo discreto de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Diz-se que um subgrupo Γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é puramente elíptico se todos os seus elementos não triviais são elípticos. De maneira análoga, se definem grupos puramente parabólicos, hiperbólicos e loxodrômicos.

Exemplo 3.2.1. O grupo gerado por $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, com $g \neq Id$ é puramente elíptico se g é elíptico. De maneira, análoga pode-se criar grupos puramente hiperbólicos, parabólicos e loxodrômicos.

Uma propriedade dos subgrupos discretos abelianos de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é que todos são cíclicos.

Teorema 3.2.1. Se Γ é um subgrupo discreto e abeliano de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ então Γ é cíclico.

Demonstração. Pelo teorema 1.2.1, segue que todas as transformações de Γ fixam os mesmos pontos. Se os elementos de Γ fixam dois pontos, então Γ é puramente hiperbólico ou puramente elíptico, já que em um dos casos os pontos fixos estão sobre ∂H^2 e em outro não. Então se resume a analisar três casos.

Caso 1: Γ é puramente parabólico.

Como as propriedades de comutação e discretização são invariantes por conjugação, pela proposição 1.2.6, podemos supor que Γ é um grupo de translações da forma:

$$\Gamma = \{T_\lambda \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T_\lambda(z) = z + \lambda, \lambda \in M \subset \mathbb{R}\}.$$

O conjunto M tem um elemento positivo mínimo μ . Do contrário, existiria uma sequência infinita $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números positivos tal que $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas isso é uma contradição com o fato de Γ ser discreto, pois $z + \lambda_n \rightarrow z$ quando $n \rightarrow \infty$.

Agora, dado $\lambda \in M$ se tem que $\lambda = q\mu + r$, onde $q \in \mathbb{Z}$ e $r \in \mathbb{Z}$ com $0 \leq r < \mu$. Vamos mostrar que $r = 0$. Pois,

$$T_\lambda \circ (T_\mu^{-1})^q(z) = z + r \in \Gamma$$

e pela minimalidade de μ temos $r = 0$. Portanto, $\Gamma = \langle T_\mu(z) \rangle$

A minimalidade de μ vem de, se $\mu = \inf\{\lambda \in M \mid \lambda > 0\}$ então $\mu > 0$ e $\mu \in M$ porque G é discreto e fechado

Caso 2: Γ é puramente hiperbólico.

Conjugando se necessário, podemos supor que os pontos fixados por Γ são zero e ∞ . Assim,

$$\Gamma = \{T_\lambda(z) \in PSL(2, \mathbb{R}) \mid T_\lambda(z) = \lambda z, \lambda \in M \subset \mathbb{R}^+\}.$$

De maneira análoga ao caso anterior, por Γ ser discreto, os pontos de M não se acumulam em 1 e além disso, podemos tomar $\mu > 1$ com $\mu \in M$ tal que para todo $\lambda \in M$ tem-se $\lambda > 1 \implies \lambda \geq \mu$.

Mais ainda, se $\lambda \in M$, $\lambda > 1$ e $\lambda \neq \mu^m$ para todo $m \in \mathbb{N}$ tem-se que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mu^n < \lambda < \mu^{n+1}$. Assim, teríamos $1 < \frac{\lambda}{\mu^n} < \mu$. Assim, teríamos uma contradição quanto a escolha de μ . O caso $\lambda < 1$ e $\lambda \in M$ se prova usando $1 < \lambda^{-1}$. Portanto, $M = \{\mu^n | n \in \mathbb{Z}\}$ e $\Gamma = \langle T_\mu(z) \rangle$.

Caso 3: Γ é puramente elíptico.

Sem perda de generalidade, podemos supor que Γ fixa 0 e ∞ , assim Γ é um grupo de rotações em Δ com ponto fixo na origem. Podemos escrever Γ como

$$\Gamma = \{T_\theta(z) = e^{i\theta}z | \theta \in M \subset \mathbb{R}\}.$$

De maneira análoga, existe $\theta > 0$ que é o mínimo positivo em M , onde M é o conjunto dos $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $e^{i\theta}z \in \Gamma$. Para $\phi \in M$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n\theta \leq \phi \leq (n+1)\theta$ e como isso implica $0 \leq -n\theta + \phi \leq \theta$, pela minimalidade de θ tem-se $-n\theta + \phi = 0$ ou $-n\theta + \phi = \theta$. Assim, $\phi = n\theta$ ou $\phi = (n+1)\theta$. Portanto, $M = \{n\theta | n \in \mathbb{Z}\}$ e $\Gamma = \langle T_\theta(z) \rangle$.

Como em todos os casos, os grupos são cíclicos, temos o resultado. □

Lema 3.2.2. *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto não enumerável, então existe um ponto em M que é ponto de acumulação de M .*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $M = \bigcup_{j \in I} \{x_j\}$ e M não se acumula em ninguém. Temos então que existe $\delta_j > 0$ tal que

$$B(x_j, \delta_j) = \{y \in \mathbb{R}^n | |y - x_j| < \delta_j\}$$

intersecta M em x_j apenas. Agora, em cada bola $B(x_j, \frac{\delta_j}{2})$ tome $y_j \in \mathbb{Q}^2 \cap B(x_j, \frac{\delta_j}{2})$. A correspondência $x_j \rightarrow y_j$ garante que conseguimos uma enumerabilidade para o conjunto $\bigcup_{j \in I} \{y_j\}$, como este conjunto está em bijeção com M temos que M é enumerável, o que é uma contradição. □

Teorema 3.2.2. *Um grupo discreto $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é enumerável.*

Demonstração. Ora, como Γ é discreto então $\pi^{-1}(\Gamma) < \text{SL}(2, \mathbb{C})$ é discreto. E, por definição, temos que $\pi^{-1}(\Gamma)$ não possui pontos de acumulação em $\text{SL}(2, \mathbb{C})$. Portanto, aplicando o lema 3.2.2, $\pi^{-1}(\Gamma)$ é enumerável e $\Gamma = \pi(\pi^{-1}(\Gamma))$ é enumerável. \square

O próximo teorema faz a relação deste capítulo com o capítulo anterior, explicitando quais subgrupos do grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Isom}(H^2)$ agem de maneira propriamente descontínua no plano hiperbólico.

Lema 3.2.3. *Seja $G < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ e $z_0 \in H^2$. A ação de G é propriamente descontínua em H^2 se, e somente se, $\{T \in G \mid d_h(z_0, T(z_0)) \leq r\}$ é finito para todo $r > 0$.*

Demonstração. Considere $B = B_r(z_0)$ como sendo o disco hiperbólico compacto de centro $z_0 \in H^2$ e raio r .

$$\begin{aligned} T(B) \cap B \neq \emptyset &\Leftrightarrow \text{existe } w \in H^2 \text{ tal que } d_h(w, z_0) \leq r \text{ e } d_h(w, T(z_0)) \leq r \\ &\Leftrightarrow d_h(z_0, T(z_0)) \leq 2r \end{aligned}$$

Suponha primeiro que a ação de G sobre H^2 é propriamente descontínua. Então o conjunto $\{T \in G \mid B \cap T(B) \neq \emptyset\}$ é finito e portanto $\{T \in G \mid d_h(z_0, T(z_0)) \leq 2r\}$ é também finito.

Agora suponha que $\{T \in G \mid d_h(z_0, T(z_0)) \leq r\}$ é finito para todo $r < \infty$. Como qualquer compacto K de H^2 está contido em alguma bola B para algum $r > 0$. Então

$$\{T \in G \mid K \cap T(K) \neq \emptyset\} \subset \{T \in G \mid B \cap T(B) \neq \emptyset\} = \{T \in G \mid d_h(z_0, T(z_0)) \leq 2r\}.$$

Portanto a ação de G é propriamente descontínua em H^2 . \square

Teorema 3.2.3. *Dado $G < \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. A ação de G é propriamente descontínua em H^2 se, e somente se, G é discreto.*

Demonstração. Suponha primeiro que G não é um subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Então existe uma sequência de elementos, distintos dois a dois, T_n tal que $T_n \rightarrow I$ quando $n \rightarrow \infty$. Escolhendo $z_0 \in H^2$, temos $T_n(z_0) \rightarrow z_0$ quando $n \rightarrow \infty$. O lema

3.2.3 diz que G não pode ser um grupo propriamente descontínuo em H^2 , pois temos infinitos n tais que $d_h(T_n(z_0), z_0) < r$ para qualquer $r > 0$.

Suponha agora que G não é um grupo propriamente descontínuo em H^2 . Pelo lema 3.2.3, existem infinitos $T \in G$ tais que $d_h(i, T(i)) \leq r$ para algum $r < \infty$. Logo, por compacidade, existe uma sequência $T_n(i)$ que converge a $w \in \overline{B_h(i, r)}$. Se

$$[T_n] = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}),$$

temos então

$$\text{Im}(T_n(i)) = \text{Im}\left(\frac{a_n i + b_n}{c_n i + d_n}\right) = \frac{1}{d_n^2 + c_n^2},$$

e também temos

$$|T_n(i)|^2 = \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}.$$

Logo, vale que $\text{Im}(T_n(i)) \rightarrow \text{Im}(w) > 0$, $|T_n(i)|^2 \rightarrow |w|^2 > 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

As sequências $\{c_n\}$ e $\{d_n\}$ são limitadas, pois se alguma delas pudessem ir para infinito o quociente $\frac{1}{d_n^2 + c_n^2}$ tenderia para zero. As sequências $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ também são limitadas, pois existe $K > 0$ tal que $K \geq c_n^2 + d_n^2$ e $\frac{a_n^2 + b_n^2}{K} \leq \frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}$ e a sequência $\frac{a_n^2 + b_n^2}{c_n^2 + d_n^2}$ converge para um número finito.

Portanto, existe uma subsequência $\{T_{n_k}\}$ de $\{T_n\}$ tal que cada uma das sequências $\{a_{n_k}\}$, $\{b_{n_k}\}$, $\{c_{n_k}\}$ e $\{d_{n_k}\}$ sejam convergente, logo T_{n_k} converge para algum $T \in \text{SL}(2, \mathbb{C})$. Portanto, G não é discreto pelo corolário 3.2.1. \square

Definição 3.2.3 (Grupos Fuchsianos). *Um grupo fuchsiano é um subgrupo discreto Γ de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ que preserva um disco (ou semi-plano).*

Observação 3.2.1. *Como as propriedades estudadas são invariantes por conjugações, acabaremos por estudar apenas grupos fuchsianos que preservam ou o disco unitário ou o plano hiperbólico. Quando nos referirmos a grupos fuchsianos estaremos considerando um subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Quando for necessário, faremos a ressalva de estarmos trabalhando com grupos fuchsianos que preservam outros discos.*

Em resumo, um grupo fuchsianos em $PSL(2, \mathbb{R})$ é um grupo discreto, enumerável e propriamente descontínuo em H^2 .

Mais tarde, será necessário considerar grupo total de isometrias de H^2 , $\text{Isom}(H^2)$, e conhecer sua topologia.

Definição 3.2.4. *A topologia em $\text{Isom}(H^2)$ é obtida fixando $g(z) = -\bar{z}$ e uma base de abertos em $PSL(2, \mathbb{R})$. A topologia tem como base os abertos da forma $U \cup gV$, onde U, V percorrem os abertos de $PSL(2, \mathbb{R})$.*

3.3 Conjunto limite

Analisaremos agora os conjuntos limites.

Definição 3.3.1. *Diz-se que $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ é um ponto limite com respeito a um subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$, se existem $z \in \mathbb{C}_\infty$ e uma família de transformações distintas $T_n \in \Gamma$, tais que*

$$T_n(z) \mapsto \alpha,$$

quando $n \mapsto \infty$.

O conjunto de todos os pontos limites com respeito a $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$, chamado de *conjunto limite*, será denotado por $\mathbf{L}(\Gamma)$, ou simplesmente \mathbf{L} . O conjunto $\mathbb{C}_\infty \setminus \mathbf{L}$ se chama *conjunto ordinário* e será denotado por $\mathbf{O}(\Gamma)$, ou simplesmente por \mathbf{O} .

Teorema 3.3.1. *Os conjuntos limites e ordinário de um subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$ são invariantes pela ação de Γ , isto é, para todo $T \in \Gamma$ tem-se $T(\mathbf{L}) = \mathbf{L}$ e $T(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$.*

Demonstração. Dado $T \in \Gamma$, temos que para $\alpha \in \mathbf{L}$ existem $z \in \mathbb{C}_\infty$ e infinitos $T_1, T_2, \dots \in \Gamma$ distintos dois a dois tais que $T_n(z) \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$. Logo, $T \circ T_n(z) \rightarrow T(\alpha)$ quando $n \rightarrow \infty$ por continuidade. Como temos $TT_n = TT_m$ se, e somente se, $n = m$, então $T(\alpha) \in \mathbf{L}$. Portanto, $T(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}$. Por outro lado, vale ainda que $T^{-1}(\mathbf{L}) \subset \mathbf{L}$ donde é possível concluir $\mathbf{L} = TT^{-1}(\mathbf{L}) \subset T(\mathbf{L})$. Logo $\mathbf{L} = T(\mathbf{L})$.

Para o conjunto ordinário, basta apenas observar que $\mathbf{O} = \mathbb{C}_\infty - \mathbf{L}$ e que $T \in \Gamma$ é uma bijeção em \mathbb{C}_∞ . Portanto, se \mathbf{L} é invariante por T temos que $\mathbb{C}_\infty - \mathbf{L} = \mathbf{O}$ é invariante por T . Donde se conclui o resultado. \square

Teorema 3.3.2. *Seja $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e $G < \Gamma$ de índice finito, isto é, o número de classes laterais à direita é finito. Então vale $\mathbf{L}(\Gamma) = \mathbf{L}(G)$.*

Demonstração. Decompondo Γ como união de classes laterais à direita, temos que existe $m < \infty$ tal que $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m GS_i$ para $S_i \in \Gamma$. Então dado $\alpha \in \mathbf{L}(\Gamma)$ existem $z \in \mathbb{C}_\infty$ e infinitos $T_1, T_2, \dots \in \Gamma$ distintos dois a dois tais que $T_n(z) \rightarrow \alpha$ quando $n \rightarrow \infty$. Como $\Gamma = \bigcup_{i=1}^m GS_i$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existem $g_n \in G$ e $S_{m_n} \in \{S_1, \dots, S_m\}$ tal que $T_n = g_n S_{m_n}$. Assim, existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tal que S_k aparece infinitas vezes na sequência $(S_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$. Analisemos a subsequência que fixa k , denote $T_{n_k}(z) = g_{n_k} S_k(z)$. Por ser subsequência, quando $n_k \rightarrow \infty$ segue que $g_{n_k} S_k(z) \rightarrow \alpha$, denotando $w = S_k(z)$ temos que existe uma sequência de elementos distintos em G e um elemento $w \in \mathbb{C}_\infty$ tais que $g_{n_k}(w) \rightarrow \alpha$ quando $n_k \rightarrow \infty$. Donde concluí-se que $\alpha \in \mathbf{L}(G)$ portanto $\mathbf{L}(\Gamma) \subset \mathbf{L}(G)$.

Por outro lado, $\mathbf{L}(G) \subset \mathbf{L}(\Gamma)$. Pois, toda sequência $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em G é uma sequência em Γ . Portanto vale a igualdade. \square

Proposição 3.3.1. *Seja $\gamma \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Então $\mathbf{O}(\gamma\Gamma\gamma^{-1}) = \gamma(\mathbf{O}(\Gamma))$.*

Demonstração. Observe que por γ ser bijeção vale $\mathbb{C}_\infty \setminus (\gamma(\mathbf{O}(\Gamma))) = \gamma(\mathbf{L}(\Gamma))$. Além disso, a definição nos diz $\mathbf{L}(\gamma\Gamma\gamma^{-1}) = \mathbb{C}_\infty \setminus (\mathbf{O}(\gamma\Gamma\gamma^{-1}))$. Portanto, basta provar $\gamma(\mathbf{L}(\Gamma)) = \mathbf{L}(\gamma\Gamma\gamma^{-1})$.

Para isto, seja $\gamma(z) \in \gamma(\mathbf{L}(\Gamma))$. Logo existem $w \in \mathbb{C}_\infty$ e $T_1, T_2, \dots \in \Gamma$ distintos dois a dois tais que $T_n(w) \rightarrow z$ quando $n \rightarrow \infty$. Segue por continuidade que $\gamma T_n \gamma^{-1}(\gamma(w)) \rightarrow \gamma(z)$. O que concluí que $\gamma(z) \in \mathbf{L}(\gamma\Gamma\gamma^{-1})$.

Por outro lado, sendo $\gamma(z) \in \mathbf{L}(\gamma\Gamma\gamma^{-1})$ (podemos tomar assim por γ ser sobrejetivo), existem $w \in \mathbb{C}_\infty$ e $T_1, T_2, \dots \in \Gamma$ distintos dois a dois tais que

$\gamma T_n \gamma^{-1}(w) \rightarrow \gamma(z)$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto $T_n \gamma^{-1}(w) \rightarrow z \in \mathbf{L}(\Gamma)$ e $\gamma(z) \in \gamma(\mathbf{L}(\Gamma))$. Concluindo assim a igualdade. \square

Proposição 3.3.2. *Seja $G < PSL(2, \mathbb{R})$. Se G é fuchsiano então $\mathbf{L}(G) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demonstração. Observe que G se é discreto, então $h^{-1}Gh$ é discreto para $h \in PSL(2, \mathbb{R})$. Suponha que é falso, então existe $z_0 \in H^2 \cap \mathbf{L}$ e uma família $T_n \in G$, $n \in \mathbb{N}$, de elementos distintos dois a dois, tais que $T_n(z) \rightarrow z_0$, com $z \in H^2$.

Tomando $h \in PSL(2, \mathbb{R})$, tal que $h(i) = z$, se tem que $T_n h(i) \rightarrow z_0$ e $h^{-1} T_n h(i) \rightarrow h^{-1}(z_0)$. A prova do teorema 3.2.3 garante que seria possível construir uma sequência de elementos distintos e convergentes em $h^{-1}Gh$ e isto é uma contradição com o fato de G ser discreto. Logo, $\mathbf{L}(G) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. \square

Definição 3.3.2. $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ diz-se *elementar* se $\mathbf{L}(\Gamma)$ tem no máximo 2 pontos, caso contrário diz-se *não elementar*

Exemplo 3.3.1. *Todo subgrupo finito de $PSL(2, \mathbb{C})$ é elementar. De fato, por não existir infinitos elementos distintos, \mathbf{L} é vazio.*

Exemplo 3.3.2. *o grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ é um subgrupo discreto pois o conjunto dos inteiros é discreto. Além disso, esse grupo é não elementar pois pode ser mostrado que $\mathbf{L} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Existe toda uma teoria sobre grupos elementares. Para o leitor mais interessado, sugere-se que leia a seção 5.1 de [1]. Estaremos preocupados com analisar conjuntos limites. Então consideraremos grupos discretos não elementares. A menos que se diga ao contrário, os grupos serão sempre não elementares.

A próxima definição nos permite dar uma nova caracterização para os subgrupos de $PSL(2, \mathbb{C})$ que são não elementares e discretos.

Definição 3.3.3. *Seja $\Gamma < PSL(2, \mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{C}_\infty$, definimos o conjunto $\Lambda(z)$ como o conjunto de todos os pontos $w \in \mathbb{C}_\infty$ tal que existem infinitas transformações distintas $T_n \in G$ para os quais $T_n(z) \rightarrow w$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Observação 3.3.1. *É fácil ver que $\Lambda(z) \subset \mathbf{L}(\Gamma)$ para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$. Ainda mais, se $w \in \mathbf{L}(\Gamma)$ então $w \in \Lambda(z)$ para algum $z \in \mathbb{C}_\infty$. Portanto vale a igualdade $\mathbf{L}(\Gamma) = \bigcup_{z \in \mathbb{C}_\infty} \Lambda(z)$.*

Proposição 3.3.3. *Seja $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ e $z \in \mathbb{C}_\infty$. Então tem-se $T(\Lambda(z)) = \Lambda(z)$, para todo $T \in G$.*

Demonstração. Dados $T \in G$, $w \in \Lambda(z)$ e distintos $T_n \in \Gamma$ tais que $T_n(z) \rightarrow w$, temos que $TT_n(z) \rightarrow T(w)$ e portanto $T(w) \in \Lambda(z)$. Portanto $T(\Lambda(z)) \subset \Lambda(z)$. Como o mesmo vale para T^{-1} , então temos que $T^{-1}(\Lambda(z)) \subset \Lambda(z)$ e daí $\Lambda(z) \subset T(\Lambda(z))$. E assim temos o resultado. \square

Pode-se provar que $\mathbf{L}(\Gamma)$ é fechado em \mathbb{C}_∞ . De fato, denote o conjunto de pontos fixos por algum elemento loxodrômico de Γ por Λ_0 e denote por Λ_1 o conjunto de pontos fixos por algum elemento hiperbólico de Γ . Defina Λ como o fecho da união de Λ_0 e Λ_1 , isto é, $\Lambda = \overline{\Lambda_0 \cup \Lambda_1}$.

Teorema 3.3.3. *Seja $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ um subgrupo não elementar (não necessariamente discreto). Então para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$ temos $\Lambda = \Lambda(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}_\infty$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 98. \square

Corolário 3.3.1. *Seja $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ um subgrupo não elementar, temos $\mathbf{L} = \Lambda$*

Demonstração. De fato,

$$\mathbf{L} = \bigcup_{z \in \mathbb{C}_\infty} \Lambda(z) = \bigcup_{z \in \mathbb{C}_\infty} \Lambda = \Lambda.$$

\square

Tomando um grupo fuchsiano G não elementar, dizemos que G é do tipo 1 se $\mathbf{L}(G) = \partial H^2$. Do contrário, dizemos que G é do tipo 2. Observe que dado $\Gamma < \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, se um número infinito de elementos de Γ distintos fixam um elemento $\alpha \in \mathbb{C}_\infty$ então $\alpha \in \mathbf{L}$.

Exemplo 3.3.3. *O grupo não elementar $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z})$ é um grupo do tipo 1.*

Seja G um grupo Fuchsiano do segundo tipo, isto é, $L(G) \neq \partial H^2$. Um arco de descontinuidade para G é um arco aberto em ∂H^2 sobre o qual G age descontinuamente. Assim, ∂H^2 é a união de $L(G)$ com uma união enumerável de arcos abertos C_j dois a dois disjuntos. Seja L_j a geodésica em H^2 com os mesmos pontos finais de C_j . Divide-se assim o plano hiperbólico em dois semi-planos: H_j^1 o semi-plano aberto que tem bordo $C_j \cup L_j$ e H_j^2 o seu complementar em $H^2 \setminus L_j$. Dizemos que H_j^1 é o semi-plano de bordo. Como a coleção $\{C_j\}$ é G -invariante, temos $\{H_j^2\}$ também é.

Definição 3.3.4 (Região de Nielsen). *Seja G um grupo fuchsiano não elementar agindo em H^2 . A região de Nielsen N de G é tal que:*

i. *Se G é do primeiro tipo, $N = H^2$.*

ii. *Se G é do segundo tipo, $N = \cap_j H_j^2$*

Teorema 3.3.4. *N é o menor subconjunto aberto, convexo e não vazio que é G -invariante.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 202. □

Capítulo 4

Domínios fundamentais

Neste capítulo estudaremos como tesselações no plano hiperbólico se relacionam com os grupos fuchsianos.

4.1 Domínios Fundamentais

Definição 4.1.1. *Seja G um grupo Fuchsiano. Um conjunto fundamental para G é um subconjunto $F \subset H^2$ que contém exatamente um ponto de cada órbita em H^2 . Portanto, dois elementos de F distintos não são G equivalentes e $H^2 = \bigcup_{f \in G} f(F)$ é uma união disjunta.*

Exemplo 4.1.1. *Olhe para o grupo fuchsiano gerado por $g(z) = z + \lambda$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ fixo e tal que $\lambda > 0$. Então um conjunto fundamental pode ser tomado como sendo $F = \{z \in H^2 \mid 0 \leq \operatorname{Re}(z) < \lambda\}$.*

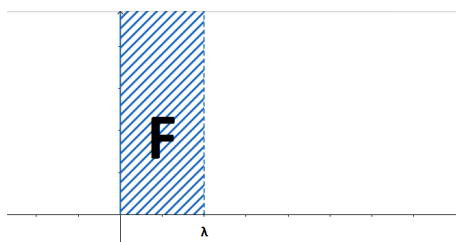


Figura 4.1: Representação de um conjunto fundamental para G

Com base no exemplo 4.1.1, podemos deduzir que o conjunto fundamental, não é único. Qualquer conjunto da forma $[z_0, z_0 + \lambda) \times (0, \infty) \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto fundamental para o grupo do exemplo.

Definição 4.1.2. *Um subconjunto D do plano hiperbólico é um domínio fundamental para o grupo Fuchsiano G se, e somente se:*

1. D é um aberto e conexo de H^2 ;
2. existe um conjunto fundamental F para G , tal que $D \subset F \subset \tilde{D}$;
3. A área hiperbólica do bordo de D é zero.

Observação 4.1.1. *Se D é um domínio fundamental, então para todo $g \in G - \{id\}$ tem-se $g(D) \cap D = \emptyset$. Além disso, vale que $\cup_{f \in G} f(\tilde{D}) = H^2$. Dizemos que D e suas imagens por G tessalam H^2 .*

Definição 4.1.3. *Um domínio fundamental D para um grupo Fuchsiano G é localmente finito se, e somente se, todo conjunto compacto de H^2 intercepta somente uma quantidade finita de elementos do conjunto $\{g(\tilde{D}) | g \in G\}$.*

Observação 4.1.2. *Suponha que D é localmente finito. Então cada $z \in H^2$ possui uma bola fechada $N := \tilde{B}_h(z, \epsilon)$ que intersecta um número finito de $G -$ imagens, digamos $g_i(\tilde{D})$ com $i = 1, \dots, t$. Diminuindo ϵ se necessário, nós podemos assumir que todas essas imagens contém z . Finalmente, se $h(D) \cap N \neq \emptyset$ então $h(D) \cap B_h(z, \epsilon)$ é um aberto não-vazio contido em*

$$h(D) \cap \cup_{i=1}^t g_i(\tilde{D}) = \cup_{i=1}^t (h(D) \cap g_i(\tilde{D})),$$

logo existe $1 \leq i \leq t$ tal que $h(D) \cap g_i(\tilde{D})$ tem área hiperbólica positiva. Como $g_i(\partial D)$ tem área hiperbólica nula, deduz-se que $h(D) \cap g_i(D)$ tem área hiperbólica positiva e em particular temos $h(D) \cap g_i(D) \neq \emptyset$. Isto implica $h = g_i$ pela definição de domínio fundamental.

Agora nós descreveremos uma construção particular de um domínio fundamental localmente finito que irá estabelecer a existência de tais domínios para qualquer grupo fuchsiano.

Seja G um grupo fuchsiano agindo em H^2 (ou no disco unitário Δ) e seja w um ponto qualquer de H^2 (ou Δ) que não é fixo em G , isto é, w é tal que $T(w) \neq w$ para todo $T \in G \setminus \{Id\}$. Defina

$$L_g(w) = \{z \in H^2 \mid d_h(z, w) = d_h(z, gw)\} \text{ e } H_g(w) = \{z \in H^2 \mid d_h(z, w) < d_h(z, gw)\}$$

onde $g \in G \setminus \{Id\}$. Note que $L_g(w)$ é uma geodésica que não contém w e que $H_g(w)$ é um semi-plano hiperbólico que contém w e com bordo $L_g(w)$. De fato, $L_g(w)$ é um bordo comum de $H_g(w)$ e $H_{g^{-1}}(gw)$.

Observação 4.1.3. *As definições já apresentadas neste capítulo são facilmente estendidas ao modelo do disco unitário para o plano hiperbólico. Basta trocar H^2 por Δ .*

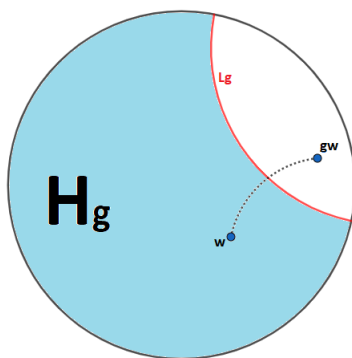


Figura 4.2: Esboço da construção no disco unitário.

Definição 4.1.4. *O polígono de Dirichlet $D_G(w)$ para G com centro w é definido por*

$$D_G(w) = \bigcap_{g \in G \setminus \{Id\}} H_g(w).$$

Dirichlet usou essa construção em 1850 para espaços euclidianos e depois Poincaré explorou tal construção para espaços hiperbólicos. Por simplicidade, denotaremos $D_G(w)$ por $D(w)$ quando for claro qual o grupo G que será tratado.

Observando que $g \in G$ é uma isometria, escrevemos

$$H_g(w) = \{z \in H^2 \mid d_h(z, w) < d_h(g^{-1}z, w)\}.$$

Com isso é possível ver $D(w)$ como o conjunto de pontos z que estão mais próximos de w do que de qualquer imagem de w ou como o conjunto de pontos z que estão, entre todas as suas imagens, mais próximos de w . Observe que

$$z \in H_g(w) \iff w \in H_{g^{-1}}(z)$$

então temos uma simetria expressa por

$$z \in D(w) \iff w \in D(z).$$

Se h é qualquer isometria do plano hiperbólico, temos

$$h(H_g(w)) = H_{hgh^{-1}}(hw)$$

e, conseqüentemente, usando $D_G(w) = D(w)$

$$h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(hw).$$

Em particular, se $h \in G$, então

$$h(D(w)) = D(hw).$$

Lema 4.1.1. *Sejam $D = D(w_0)$ um polígono de Dirichlet e $K \subset H^2$ um compacto de H^2 , então K intersecta um número finito de $L_g(w_0)$.*

Demonstração. Como os subconjuntos compactos de espaço métricos são limitados, existe um número $k > 0$ tal que K está contido em um disco hiperbólico aberto de centro w_0 e raio k . Agora, seja $z \in L_g(w_0) \cap K$ se tem que

$$d_h(w_0, gw_0) \leq d_h(w_0, z) + d_h(z, gw_0) = 2d_h(w_0, z) < 2k.$$

Se isso acontece para um número infinito de $g \in G$, obteríamos uma sequência de elementos distintos

$$(g_n(w_0))_{n \in \mathbb{N}} \subset \{z \in H^2 \mid d_h(z, w_0) \leq 2k\}$$

e portanto essa sequência admite subsequência convergente, o que não pode acontecer, pois $L(G) \subset \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Logo o número de $g \in G$ tal que $K \cap L_g(w_0) \neq \emptyset$ é finito. \square

Lema 4.1.2. *Seja $D = D(w)$ um polígono de Dirichlet então D é aberto*

Demonstração. Seja $z_0 \in D$ e $N \subset H^2$ um disco hiperbólico fechado de centro z_0 . Então do lema 4.1.1 temos que N intersecta um número finito de $L_g(w)$, digamos $L_{g_i}(w)$ com $i = 1, \dots, n$. E por isso existe $0 < k < \min\{d_h(z, L_{g_i}(w)) \mid 1 \leq i \leq n\}$ tal que o disco hiperbólico aberto $B := \{z \in H^2 \mid d_h(z, z_0) < k\} \subset N$.

Como $z \in H_g(w)$ e $B \cap L_g(w) = \emptyset$, obtemos $B \subset H_g(w)$ para todo $g \in G \setminus \{Id\}$. Logo B está contido em D e daí z_0 é ponto interior de D . \square

Teorema 4.1.1. *O polígono de Dirichlet $D = D(w)$ é um domínio fundamental localmente finito para G e é convexo.*

Demonstração. Observe que cada $H_g(w)$ contém w e é convexo então D é não vazio e convexo. Observe também que pelo lema 4.1.2, D é um aberto. Como $D \subset H_g(w)$ e $\tilde{H}_g(w) = H_g(w) \cup L_g(w)$ para todo $g \in G \setminus \{Id\}$, então deduzimos

$$\tilde{D} \subset \bigcap_{g \in G \setminus \{Id\}} (H_g(w) \cup L_g(w))$$

e daí

$$\partial D = \tilde{D} \setminus D \subset \bigcap_{g \in G \setminus \{Id\}} (H_g(w) \cup L_g(w)) \setminus \bigcap_{g \in G \setminus \{Id\}} H_g(w).$$

Logo dado $z \in \partial D$, existe $g \in G \setminus \{Id\}$ tal que $z \notin H_g(w)$ e como $z \in H_g(w) \cup L_g(w)$, obtemos $z \in L_g(w)$. Em consequência, a inclusão $\partial D \subset \bigcup_{g \in G \setminus \{Id\}} L_g(w)$ vale. Portanto ∂D tem área hiperbólica zero.

Com isso, reparamos que, para concluir que o polígono de Dirichlet é um domínio fundamental convexo falta apenas construir um conjunto fundamental F tal que $D \subset F \subset \tilde{D}$.

Para cada órbita $G(z)$, escolhamos exatamente um ponto $z^* \in H^2$ satisfazendo $d_h(w, z^*) \leq d_h(w, gz)$ para todo $g \in G$. Tal escolha é possível pois $G(z)$ não pode se acumular em H^2 vide proposição 3.3.2. Mais ainda, dada uma órbita $G(z)$ qualquer, podemos tomar $z^* \in G(z)$ tal que $d_h(w, G(z)) = d_h(w, z^*)$ já que o conjunto $\{d_h(w, z') : z' \in G(z)\}$ é fechado; caso contrário a órbita de z teria um ponto de acumulação. Seja F o conjunto formado pelos pontos z^* onde $G(z)$ percorre as órbitas

de G . Perceba que se $z \in D(w)$, então $z^* = z$ pela definição de $D(w)$, logo temos $D \subset F$. Para concluir que $F \subset \tilde{D}$. Devemos mostrar que se $z \in F$ então o segmento geodésico $[w, z)$ está também contido em D , porque essa propriedade implica

$$z \in \widetilde{[w, z)} \subset \tilde{D}.$$

Mostremos que $[w, z) \subset D$. Por definição, $w \in D$. Suponha, por contradição, que $[w, z) \not\subset D$, então existe $z' \in (w, z)$ que pertence a ∂D e em particular a $L_g(w)$ para algum $g \in G \setminus \{Id\}$. Perceba que $L_g(w)$ é uma geodésica distinta da geodésica Γ que contém a w e z já que $w \notin L_g(w)$. Como duas geodésicas distintas se intersectam no máximo em um ponto, obtemos $\Gamma \cap L_g(w) = \{z'\}$. Daí deduzimos que $[w, z') \subset H_g(w)$, $z' \in L_g(w)$ e $(z', z) \subset H^2 \setminus (H_g(w) \cup L_g(w))$. Portanto,

$$d_h(z, w) > d_h(z, g(w)) \implies d_h(z, w) > d_h(g^{-1}(z), w).$$

Como $z \in F$ temos $d_h(z, w) \leq d_h(g^{-1}(z), w)$ e obtemos então uma contradição. Logo, o polígono de Dirichlet é um domínio fundamental convexo.

Vamos mostrar agora que \tilde{D} é localmente finito. Seja $K \subset H^2$ um disco compacto com centro w e raio k . Suponha que $g(\tilde{D}) \cap K \neq \emptyset$, portanto existe z em \tilde{D} tal que $d_h(gz, w) \leq k$. Como $z \in \tilde{D}$, temos

$$d_h(w, gw) \leq d_h(w, g(z)) + d_h(gz, gw) \leq k + d_h(z, w) \leq k + d_h(gz, w) \leq 2k,$$

onde a penúltima desigualdade será mostrada posteriormente. Como isso só pode ser verdade para um número finito de $g \in G$ temos que D é polígono fundamental localmente finito. A penúltima desigualdade é válida por $d_h(z, w) \leq d_h(gz, w)$ ser válida. De fato, como

$$z \in \tilde{D} \subset H_{g^{-1}}(w) \cup L_{g^{-1}}(w),$$

obtemos

$$d_h(z, w) \leq d_h(z, g^{-1}w) = d_h(gz, w) \implies k + d_h(z, w) \leq k + d_h(gz, w).$$

□

Portanto, a menos da existência de w ser garantida, conseguimos criar o polígono de Dirichlet para um grupo fuchsiano G . A última proposição deste capítulo, garante a existência de w como queremos.

Proposição 4.1.1. *Seja G um grupo fuchsiano agindo em H^2 então o conjunto de pontos fixos, isto é, $\{z \in H^2 \mid \exists T \in G \text{ tal que } T(z) = z\}$ não se acumula em H^2 .*

Demonstração. Dado qualquer $z \in H^2$ e qualquer vizinhança compacta N de z , temos que $g(N) \cap N \neq \emptyset$ apenas para um número finito de $g \in G$. Pois a ação de G em H^2 é propriamente descontínua. Portanto, apenas um número finito de pontos fixos podem ser elementos de N . Portanto, o conjunto de pontos fixos não se acumula em H^2 . \square

4.2 Polígono Fundamental Convexo

Os domínios fundamentais localmente finitos que são convexos, são de extrema importância. Então, daremos um nome a esse tipo de conjunto.

Definição 4.2.1 (Polígono Fundamental Convexo). *Um polígono fundamental convexo P para um grupo fuchsiano G é um conjunto $P \subset H^2$ que é um domínio fundamental convexo e é localmente finito.*

O teorema 4.1.1 garante a existência de um polígono fundamental convexo para qualquer grupo Fuchsiano G . Em outras palavras, o teorema garante a existência de uma tesselação do plano hiperbólico por esses polígonos. O problema inverso será tratado pelo Teorema de Poincaré, ou seja, a construção de grupos fuchsianos com polígonos fundamentais convexos prescritos. Antes de tratar do Teorema de Poincaré, vamos tratar das propriedades dos polígonos fundamentais convexos.

Definição 4.2.2. *Um lado de P será um segmento geodésico da forma $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ de comprimento positivo. Um vértice de P é um único ponto da forma $\tilde{P} \cap g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P})$ para distintos g, h e Id .*

Proposição 4.2.1. *Para todo $g \in G \setminus \{Id\}$, $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ é vazio, ou contém exatamente um ponto ou é um arco de geodésica.*

Demonstração. Se a cardinalidade de $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ é maior que uma, então ele não pode conter pontos não colineares. Pois $\tilde{P} \cap g(\tilde{P}) \subset \partial P$ e ∂P tem área hiperbólica nula. Por convexidade, $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ tem que ser um arco de geodésica. \square

Observação 4.2.1. Para um aberto convexo $P \subset H^2$, tem-se $\text{int}(\tilde{P}) = P$, onde $\text{int}(A)$ denota o interior de A . De fato, $P \subset \text{int}(\tilde{P})$. Agora, seja $z \in \text{int}(\tilde{P})$, então existem $a, b, c \in \text{int}(\tilde{P})$ tais que z está no interior do triângulo hiperbólico que contém vértices em a, b, c . Além disso, podemos tomar pontos $a', b', c' \in P$, que sejam suficientemente próximos de a, b, c respectivamente, tais que z está no interior do triângulo hiperbólico com vértices a', b', c' . Por convexidade este triângulo está inteiramente contido em P , logo $z \in P$ e $\text{int}(\tilde{P}) = P$.

Além disso, para $z \in P$ dado $\xi \in \overline{P} \setminus P$, o segmento hiperbólico $[z, \xi]$ pode ser acumulado por segmentos hiperbólicos inteiramente contidos em P . Como $[z, \xi]$ está contido no interior de $\cup_{w \in P} [w, \xi] \subset \tilde{P}$, pelo o que foi explicado temos $[z, \xi] \subset \text{int}(\tilde{P}) = P$.

Proposição 4.2.2. Todo vértice de P é formado por exatamente um ponto.

Demonstração. Suponha que existam distintos $g, h \in G \setminus \{Id\}$ tais que $g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P}) \cap \tilde{P} \neq \emptyset$. Suponha ainda que $w, z \in g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P}) \cap \tilde{P}$ com $w \neq z$, então

$$[w, z] \subset g(\tilde{P}) \cap h(\tilde{P}) \cap \tilde{P},$$

pela convexidade. Tome $z' \in (z, w)$ e tome $p \in P$, então $[p, z'] \in P$ pela observação 4.2.1. Daí o interior do triângulo hiperbólico com vértices p, z, w está em P , e será denotado por $\Delta(p, z, w)$. Construindo o triângulo $\Delta(g(p), z, w)$ em $g(P)$, temos que $V := \Delta(g(p), z, w) \cup \Delta(p, z, w) \cup (z, w)$ é uma vizinhança aberta de z' . Assim, $h(P) \cap V$ é aberto contido em (z, w) , como (z, w) possui medida nula segue $h(P) \cap V = \emptyset \implies h(\tilde{P}) \cap V = \emptyset$ e temos uma contradição, logo, todo o vértice tem exatamente um ponto. \square

Sejam G e F como no exemplo 4.1.1. Não é difícil ver que o interior de F é um polígono fundamental convexo para o grupo. Neste caso, o polígono fundamental

convexo será composto também por elementos que chamaremos de *lados livres*, *vértices próprios* e *vértices impróprios*.

Definição 4.2.3. *Um lado livre para um polígono fundamental convexo, é um arco contido em ∂H^2 que está no fecho euclidiano de P . Se dois lados distintos de P se acumulam em um mesmo ponto em ∂H^2 , esse ponto se chama vértice próprio. Caso o ponto final de um lado livre também seja um ponto final de um lado, temos que esse ponto é chamado de vértice impróprio.*

Ainda no exemplo 4.1.1, temos um vértice próprio ∞ , temos dois vértices impróprios $\{0, \lambda\}$ e temos um lado livre $(0, \lambda) \subset \mathbb{R}$.

A seguir, listaremos alguns resultados sobre polígonos fundamentais convexos.

1. Para cada $z \in \partial P$, existe algum $g \in G \setminus \{Id\}$ tal que $g(z) \in \partial P$.

De fato, pela observação 4.1.2, existem $g_1 = Id, g_2, \dots, g_k \in G$ tal que

$$B_h(z, \epsilon) \subset g_1(\tilde{P}) \cup \dots \cup g_k(\tilde{P})$$

para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mais ainda, podemos assumir $z \in g_j(\tilde{P})$ para todo $1 \leq j \leq k$. Perceba que $k \geq 2$, dado que se $B_h(z, \epsilon) \subset \tilde{P}$, a observação 4.2.1 implica que $z \in P$ e teremos uma contradição. Portanto, existe $h \neq Id$ tal que $z \in h(\tilde{P})$. Como $z \in \partial P$ temos que $z \notin h(P)$ e portanto $z \in h(\partial P)$. Daí obtemos $h^{-1}(z) \in \partial P$.

2. Apenas um número finito de lados e vértices podem intersectar um dado compacto $K \subset H^2$

Seja $K \subset H^2$ um conjunto compacto. Temos que $g(\tilde{P}) \cap K = \emptyset$ exceto para um subconjunto finito $\{g_1, \dots, g_t\}$ de G . A expressão $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ só intersecta a K se $g \in \{g_1, \dots, g_t\}$, logo o conjunto de lados que intersecta a K é finito. Analogamente só um número finito de vértices pertencem a K .

3. P tem apenas um número enumerável de lados e vértices.

Tomando $K_n = \overline{B}_h(i, n)$ para $n \in \mathbb{N}$. Temos que K_n só intersecta a \tilde{P} em um número finito de lados e vértices para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $H^2 = \cup_{i=1}^{\infty} K_n$, obtemos que os conjuntos de lados e vértices de P são enumeráveis.

4. ∂P é a união dos lados P

É obvio que os lados $\ell = \tilde{P} \cap h(\tilde{P})$ estão no bordo, dado que toda vizinhança de todo ponto de ℓ contém pontos de P e pontos que não estão em P , mais precisamente pontos de $h(P)$.

Veremos que todo ponto $z \in \partial P$ pertence a um lado de P . Sejam $g_1, \dots, g_k \in G$ como em (1).

O conjunto $\tilde{P} \cap g_j(\tilde{P})$ (para $j \geq 2$) pode ser um lado ou igual a $\{z\}$ dado que é um conjunto convexo de medida nula. De fato, existe $2 \leq l \leq k$ tal que $\tilde{P} \cap g_l(\tilde{P})$ é um lado. Pois, em $B_h(z, \epsilon)$ existe $z' \neq z$ tal que $z' \in \partial P$. Portanto, $z' \in g_j(\tilde{P})$, para algum $j \geq 2$. Assim, pela proposição 4.2.1 temos a propriedade.

5. Cada vértice mora em exatamente dois lados de P e ele é o ponto final em comum entre eles.

Um ponto z no interior de um lado $\tilde{P} \cap h(\tilde{P})$, com $h \neq Id$, não pertence a $g(\tilde{P})$ para $g \notin \{Id, h\}$ e em particular não é um vértice. Basta observar a demonstração do teorema 4.2.2.

Todo vértice de P pertence a um número finito de lados pela finitude local. Se temos segmentos geodésicos $[w, z)$ e $[w', z)$ contidos em P e formando um ângulo $\alpha < \pi$ em z , os pontos desse ângulo próximos a z também pertencem a P pela convexidade de P . Esse argumento serve para mostrar que não podemos ter só um lado de P chegando a z nem mais de 2 veja a figura 4.3.

Por exemplo se temos um único lado ℓ de P que contém a z , consideramos segmentos geodésicos $[w, z)$ e $[w', z)$ formando um ângulo pequeno com ℓ em z e percebemos que ℓ está contido no ângulo formado por esses segmentos geodésicos em particular pertence a P , o que é impossível.

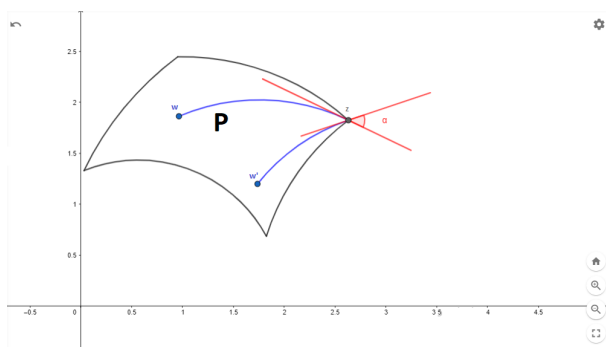


Figura 4.3: quadrilátero hiperbólico

Além disso, um extremo z de um lado $\ell = \tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ é um vértice. De fato, se $z \notin h(\tilde{P})$ para todo $h \notin \{Id, g\}$, obtemos que $\tilde{P} \cup g(\tilde{P})$ é uma vizinhança de z . Os ângulos interiores de \tilde{P} e $g(\tilde{P})$ em z são menores ou iguais a π pela conexidade e como a soma é 2π cada um é exatamente π . Daí z não é extremo do lado ℓ , uma contradição. Portanto z é um vértice.

Observação 4.2.2. Usando (4), (5) e (6), deduz-se que os pontos de ∂P que não são vértices pertencem a duas copias de \tilde{P} .

6. Qualquer dois lados que se encontram, se encontram em um vértice e este é um ponto final em comum

Se dois lados $\tilde{P} \cap g(\tilde{P})$ e $\tilde{P} \cap h(\tilde{P})$ se encontram em mais de um ponto, a interseção contém um segmento geodésico Γ . Todos os pontos de Γ salvo um número finito são pontos interiores de lados e pertencem a três copias de \tilde{P} (\tilde{P} , $g(\tilde{P})$ e $h(\tilde{P})$), o que é impossível por (5).

7. O diâmetro euclidiano de $g_n(P)$ vai para zero quando $n \rightarrow \infty$.

Esta propriedade, só vale para o modelo do disco unitário. Perceba que o diâmetro euclidiano depende obviamente da medida euclidiana, e que Δ e H^2 tem medidas euclidianas diferentes.

Pela finitude local, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_n(P) \in \cup_{z \in \partial \Delta} B(z, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$, onde estamos considerando bolas euclidianas. Se o diâmetro

euclidiano de $g_n(P)$ não converge a 0, existe uma sequência $(n_k)_{k \geq 1}$ crescente de números naturais e sequências $(z_k)_{k \geq 1}$ e $(w_k)_{k \geq 1}$ de pontos de Δ tais que

- $z_k \in g_{n_k}(P)$ e $w_k \in g_{n_k}(P)$ para todo $k \geq 1$;
- $z = \lim_{k \rightarrow \infty} z_k$ e $w = \lim_{k \rightarrow \infty} w_k$ existem, são distintos e pertencem a $\partial\Delta$.

Como $g_{n_k}(P)$ é convexo, todo ponto y do segmento geodésico (w, z) satisfaz que qualquer vizinhança de y intersecta todo $g_{n_k}(P)$ para k suficientemente grande, o que contradiz a finitude local.

Observação 4.2.3. *Se $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é e uma sequência de pontos em Δ tal que $z_n \in h_n(D)$ para $n \in \mathbb{N}$ e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos distintos do grupo fuchsiano, então z pertence ao conjunto limite.*

Seja γ um arco compacto de S^1 contido no conjunto ordinário. Então, pela propriedade (8) e o argumento anterior, existe uma vizinhança euclidiana U de γ que intersecta $h(D)$ apenas para um número finito de $h \in G$.

Apresentaremos agora uma propriedade que os lados de um polígono fundamental convexo satisfazem. Sejam

$$G^* = \{g \in G \mid \tilde{P} \cap g(\tilde{P}) \text{ é um lado de } P\}$$

o conjunto de transformações *side-pairing* de P e S denota o conjunto de lados de P . A aplicação $\Phi : G^* \rightarrow S$, definida por $\Phi(g) = \tilde{P} \cap g(\tilde{P})$, é bijetora por definição.

Observação 4.2.4. *De fato, a sobrejetividade vem da definição. Por outro lado, a injetividade, é vista usando a proposição 4.2.2 que garante que se $g \neq h$ então $h(\tilde{P}) \cap g(\tilde{P}) \cap \tilde{P}$ é no máximo um ponto. Assim, como lados tem comprimento positivo, não pode ocorrer $\tilde{P} \cap g(\tilde{P}) = \tilde{P} \cap h(\tilde{P})$.*

O fato de ser uma bijeção garante que para cada lado $s \in S$, existe apenas um único $g_s \in G^*$ tal que $s = g_s(\tilde{P}) \cap \tilde{P}$. Mais ainda, temos que se $s' = g_s^{-1}(s) = g_s^{-1}(\tilde{P}) \cap \tilde{P}$, s' também é um lado. Além disso, $g_{s'} = g_s^{-1}$.

Observação 4.2.5. *Pode ocorrer que $s = s'$ e neste caso, $g_s^2 = Id$.*

Teorema 4.2.1. *Os elementos side-pairing de P geram G . Isto é, $\langle G^* \rangle = G$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1], na página 220. □

Um outro elemento de nosso interesse são os *ciclos de vértices*. Mais geralmente, definimos:

Definição 4.2.4. *Um ciclo C em \tilde{P} é a interseção de uma G -órbita com \tilde{P} .*

Um ciclo é necessariamente um conjunto finito pela finitude local. Além disso, vale que $z \in P$ e $z \in C$ então $C = \{z\}$. Se $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ então a *ordem* de C é definida como sendo o número $Ord(C)$ que é a cardinalidade do conjunto $\{T \in G | T(z_j) = z_j\}$ para algum $j = 1, 2, \dots, n$.

Proposição 4.2.3. *A ordem de C não depende de z_j .*

Demonstração. Sem perda de generalidade, mostremos que para $z_1, z_2 \in C$ temos que

$$G_1 = \{T \in G | T(z_1) = z_1\} \text{ e } G_2 = \{T \in G | T(z_2) = z_2\}$$

são conjugados. Como ambos pertencem ao mesmo ciclo, existe $g \in G$ tal que $g(z_2) = z_1$. Assim,

$$S \in G_1 \Leftrightarrow S(z_1) = z_1 \Leftrightarrow Sg(z_2) = g(z_2) \Leftrightarrow g^{-1}Sg \in G_2 \Leftrightarrow S \in gG_2g^{-1}.$$

□

O conjunto G_j é chamado de estabilizador de z_j em relação a G (e é facilmente generalizado para qualquer ponto $z \in \mathbb{C}_\infty$ e subgrupo Γ de $PSL(2, \mathbb{C})$). Já mostramos que a ordem independe do elemento do ciclo escolhido. Mais ainda, G_j tem um número finito de elementos. Do contrário, z_j estaria no conjunto limite, o que seria uma contradição. Os grupos estabilizadores são sempre abelianos, um resultado

Observação 4.2.6. *O teorema 3.2.1 garante que estabilizadores advindo de grupos fuchsianos são sempre cíclicos. Já que os grupos fuchsianos são discretos por definição e os estabilizadores são abelianos.*

Para cada vértice $v \in \tilde{P}$, denote por $\theta(v)$ o ângulo interno no vértice v em P . A soma dos ângulos internos em um ciclo satisfazem uma relação com a ordem, dada por

Teorema 4.2.2. *Para todo grupo fuchsiano G , todo polígono fundamental convexo P e todo ciclo $C = \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ tem-se*

$$\sum_{j=1}^n \theta(z_j) = \frac{2\pi}{\text{Ord}(C)},$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 221. □

O próximo teorema dá uma característica dos ciclos no polígono de Dirichlet.

Teorema 4.2.3. *Seja $\{z_1, \dots, z_n\}$ um ciclo no polígono de Dirichlet $D(w)$. Então $d_h(z_1, w) = d_h(z_2, w) = \dots = d_h(z_n, w)$.*

Demonstração. Para um ciclo de um ponto interior, não há nada a se provar. Para um ciclo no bordo $C = \{z_1, \dots, z_n\}$ é suficiente mostrar que $d_h(z_1, w) = d_h(z_2, w)$. Para isso, se $z_2 = h(z_1)$ usamos que $[w, z_2] \subset D(w)$ (veja a prova do Teorema 4.1.1), para mostrar $d_h(w, z_2) \leq d_h(hw, z_2)$. De fato, $d_h(w, x) < d_h(hw, x)$ para todo $x \in [w, z_2]$ fazendo então $x \rightarrow z_2$ temos $d_h(w, z_2) \leq d_h(hw, z_2)$.

Por outro lado, $[w, z_1] \subset D(w) \implies h([w, z_1]) = [hw, z_2] \in D(hw)$. De maneira análoga, concluímos que $d_h(hw, z_2) \leq d_h(w, z_2)$.

As duas desigualdades nos permite concluir que $d_h(hw, z_2) = d_h(w, z_2)$. Portanto,

$$d_h(w, z_1) = d_h(hw, hz_1) = d_h(hw, z_2) = d_h(w, z_2).$$

□

A definição de ciclos pode ser generalizada para o fecho euclidiano do polígono fundamental convexo P em Δ (ou H^2). Considere $E = \partial\Delta \cap \overline{P}$, E é a união de lados livres, vértices próprios e vértices impróprios. Neste caso, para cada $z \in E$ tem-se que um *ciclo sobre z* é dado por $G(z) \cap E$. Para mais detalhes, sugerimos ao leitor ver [1], nas páginas 223 e 224. Precisaremos para este trabalho apenas do seguinte teorema.

Teorema 4.2.4. *Seja $v \in E$ que é fixo por algum elemento não trivial de G . Então v é fixo por algum elemento parabólico de G (e não por qualquer elemento hiperbólico). Mais ainda, o ciclo C por v em E é um ciclo finito cujos pontos são vértices próprios.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 224. □

Teorema 4.2.5. *Seja G um grupo fuchsiano e seja $D(w)$ seu polígono de Dirichlet com centro em w . Então para quase todas as escolhas de w tem-se que todo vértice próprio tem comprimento igual a 1 e é um ponto fixo parabólico.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 232. □

Além disso, precisaremos de informações sobre como se relacionam os elementos de um polígono fundamental convexo com os elementos que definem a região de Nielsen. Para este trabalho, são necessárias essas duas proposições.

Proposição 4.2.4. *Seja P um polígono fundamental convexo para G com um número finito de lados. Então todo lado livre de P está contido em um arco de descontinuidade.*

Demonstração. Pontos interiores a lados livres, claramente são pontos ordinários inteiramente contidos em arcos de descontinuidade. Pois, a condição de tesselação $g(P) \cap P = \emptyset$ garante que os interiores de lados livres não podem acumular imagens de alguma órbita. Assim, basta analisar os extremos.

Seja r um lado livre de P e p um de seus extremos. Queremos mostrar que o número de lados de imagens de P que contém o ponto p como extremo é finito.

Suponha, por contradição, que seja infinito. Então existem l_1, l_2, l_3, \dots distintos que são lados de imagens de P e todos esses lados contém o ponto p como extremo. Para cada l_i , existe um lado l'_i de P (e não das imagens de P) e um elemento f_i tal que $f_i(l'_i) = l_i$ e $f_i(p_i) = p$ para um dos extremos p_i de l'_i . Para diferentes i, j pela finitude do número de lados de P tem-se $l'_i = l'_j$ e $p_i = p_j$. Assim, $f = f_j f_i^{-1}$ leva l_i em l_j e fixa p . Aplicando o teorema 4.2.4 tem-se que p é vértice próprio de P . O que é uma contradição, isso é suficiente para provar que p não pode ser um ponto limite porque na sua vizinhança só temos um número finito de imagens de P .

Portanto o lado livre r está contido inteiramente em um arco de descontinuidade. □

Proposição 4.2.5. *Seja G um grupo fuchsiano não-elementar com região de Nielsen N . Então para todo polígono fundamental convexo P de G temos que $\partial P \cap N \neq \emptyset$.*

Demonstração. A afirmação é trivial se G é do primeiro tipo. Se G é do segundo tipo, existe $g \in G$ tal que $g(P) \cap N \neq \emptyset$ e portanto $P \cap g^{-1}(N) \neq \emptyset$, mas $g^{-1}(N) = N$, portanto $P \cap N \neq \emptyset$, assim contém pontos de P . Como para todo $g \in G \setminus \{Id\}$, tem-se $g(P) \cap N = g(N \cap P) \neq \emptyset$ temos que N contém pontos de $g(P)$, logo N é um aberto com pontos no complementar de P e com pontos em P . Logo N intersecta o bordo de P . □

4.3 Teorema de Poincaré

Já vimos que para qualquer grupo fuchsiano G agindo em H^2 é possível construir um polígono fundamental convexo P . Neste caso, podemos dizer que a ação de G sob P tessela o plano hiperbólico. O *Teorema de Poincaré* tem o objetivo de reverter o processo, isto é, a partir de um conjunto $P \subset H^2$ (ou Δ) obter um subgrupo discreto G do grupo de isometrias para o qual a ação de G sob P tessela o plano hiperbólico.

Estabeleceremos agora as condições necessárias que um subconjunto $P \subset H^2$ deve satisfazer para que possamos enunciar o Teorema de Poincaré.

A1. P é um aberto, convexo tal que $\partial P = \cup_{i \in \mathbb{N}} s_i$

onde cada s_i é um segmento geodésico fechado que será chamado de lado. Além disso, todo compacto $K \subset H^2$ deve intersectar um número finito dos s_i .

A2. Existe uma coleção de mapas side-pairing de P

Isto é, para cada lado s de P , existe um único lado s' e um elemento $g_s \in \text{Isom}(H^2)$ tal que $g_s(s) = s'$. Devemos ter ainda que $g_s^{-1} = g_{s'}$. Além disso, para todo lado s de P , $g_s(P) \cap P = \emptyset$. Se existir s tal que $s' = s$ então $g_s^2 = id$. A coleção desses g_s é denotado por Φ .

Considerando (A2) definimos G como sendo o grupo gerado pelos elementos de Φ . A partir disto, entenderemos o conjunto

$$G \times \tilde{P} = \{(g, x) | g \in G \text{ e } x \in \tilde{P}\}$$

como sendo a união disjunta de G -imagens de \tilde{P} , isto é, $G \times \tilde{P} = \bigcup_g (g, \tilde{P})$, onde $(g, \tilde{P}) = \{(g, x) | x \in \tilde{P}\}$. Assim, podemos pensar em (g, x) como sendo $g(x) \in g(\tilde{P})$. A condição (A2) garante que se $x \in P$, $g(x) \notin \tilde{P}$ para os elementos side-pairings. Como faz parte do nosso objetivo construir uma tesselação de H^2 por G -imagens, devemos nos preocupar em como colar adequadamente os bordos.

Podemos colar (g_s, \tilde{P}) com (Id, \tilde{P}) identificando (g_s, s) com $(Id, g_s(s))$, em outras palavras, (Id, \tilde{P}) seria identificado com \tilde{P} , (g_s, \tilde{P}) com $g_s(\tilde{P})$ e ambos polígonos teriam um lado comum $g_s(s) = s'$ que estamos identificando (como em um quebra-cabeça, o que separa as "peças" $g_s(\tilde{P})$ e \tilde{P} é um lado, a saber s').

Precisamos agora colar também as suas cópias (hg_s, \tilde{P}) e (h, \tilde{P}) para $h \in G$. Observe que o mapa $hg_s h^{-1}$ pode ser visto como um side-pairing para o conjunto $h(P)$ e este mapa associa o lado $h(s)$ com o lado $h(g_s(s))$ de $h(P)$. Como $g_s \neq Id$, o conjunto $hg_s(P)$ contém o lado $h(g_s(s))$ e é um polígono distinto de $h(P)$. Para que essa colagem ocorra, de maneira análoga ao parágrafo anterior devemos identificar (hg_s, s) com $(h, g_s(s))$. Podemos definir uma relação, denotada por \sim , que satisfaz essas colagens em $G \times \tilde{P}$ da seguinte forma:

$$(g, x) \sim (h, y)$$

se, e somente se,

1. $g = h$ e $x = y$; ou
2. $x \in s, y = g_s(x)$ e $g = hg_s$.

Essa relação \sim é simétrica e reflexiva, como mostraremos mais a frente. Estenderemos ela a uma relação de equivalência $*$ em $G \times \tilde{P}$ da seguinte forma:

$$(g, x) * (h, y)$$

se, e somente se, existem $(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n) \in G \times \tilde{P}$ tais que

$$(g, x) = (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y).$$

De fato $*$ é uma relação de equivalência, pois satisfaz as propriedades:

Reflexiva $(g, x) * (g, x)$.

É claro pela definição de \sim .

Transitiva $(g, x) * (h, y)$ e $(h, y) * (f, w) \Rightarrow (g, x) * (f, w)$

Usando a extensão,

$$\begin{aligned} (g, x) &= (g_1, x_1) \sim (g_2, x_2) \sim \dots \sim (g_n, x_n) = (h, y) \\ &= (h, y) = (h_1, y_1) \sim \dots \sim (h_m, y_m) = (f, w), \end{aligned}$$

temos o resultado.

Simétrica $(g, x) * (h, y) \Rightarrow (h, y) * (g, x)$.

De fato, basta ver que \sim também o é. Se $(g, x) \sim (h, y)$, então $x \in s, y = g_s(x)$ e $g = hg_s$. Aplicando, $g_{s'} = g_s^{-1}$ e tomando o lado s' . Temos $y \in s' = g_s(s), x = g_{s'}(y)$ e $gg_{s'} = h$. Donde $(h, y) \sim (g, x)$.

A classe de equivalência de um ponto (g, x) será denotada por $\langle g, x \rangle$ e o espaço quociente será denotado por $(H^2, *)$. Note ainda, que $\langle g, x \rangle = \langle h, y \rangle$ então $g(x) = h(y)$ e $\langle fg, x \rangle = \langle fh, y \rangle$ para todo $f \in G$. Além disso, se $x \in P$, então $g = h$ e $x = y$.

Cada $f \in G$ induz um mapa $f^* : (H^2, *) \rightarrow (H^2, *)$ dado por

$$f^*(\langle g, x \rangle) = \langle fg, x \rangle$$

que está bem definido. Não é difícil ver que $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ e que $(fh)^* = f^*h^*$.

Assim, $f^* : (H^2, *) \rightarrow (H^2, *)$ é uma bijeção.

Considere $(G, *) = \{f^* | f \in G\}$. Então, $f \mapsto f^*$ é um homomorfismo de G em $(G, *)$. De fato, este homomorfismo é um isomorfismo de grupos, pois se $f^* = h^*$, dado $x \in P$ temos que

$$\langle f, x \rangle = f^*(\langle Id, x \rangle) = h^*(\langle Id, x \rangle) = \langle h, x \rangle$$

e como $x \in P$, decorre que $f = h$.

Considere os conjuntos $\langle A \rangle = \{\langle I, x \rangle | x \in A\}$, onde $A = P, \tilde{P}$. A ação de $(G, *)$ em $\langle P \rangle$ tem as seguintes propriedades:

a. $\bigcup_{g^*} g^*(\langle \tilde{P} \rangle) = (H^2, *)$.

De fato, temos

$$\begin{aligned} \bigcup_{g^*} g^*(\langle \tilde{P} \rangle) &= \bigcup_{g^*} g^*(\{\langle I, x \rangle | x \in \tilde{P}\}) = \bigcup_{g^*} \{g^*(\langle I, x \rangle) | x \in \tilde{P}\} = \\ &= \bigcup_g \{\langle g, x \rangle | x \in \tilde{P}\} = (H^2, *); \end{aligned}$$

b. Se $g^* \neq h^*$, então $g^*(\langle P \rangle) \cap h^*(\langle P \rangle) = \emptyset$.

Observe que se $\langle f, x \rangle \in g^*(\langle P \rangle) \cap h^*(\langle P \rangle)$ então $\langle f, x \rangle = \langle g, y \rangle = \langle h, z \rangle$, e isso só ocorre em P se $f = g = h$ e $x = y = z$.

Em certo sentido, como valem (a) e (b), podemos dizer que a ação de $(G, *)$ em $\langle P \rangle$ tessela $(H^2, *)$. Queremos agora conduzir essa tesselação para o problema original.

Considere agora o mapa $\alpha : (H^2, *) \rightarrow H^2$ dado por $\alpha(\langle g, x \rangle) = g(x)$. Para estudá-lo introduziremos os mapas naturais:

$$\beta : G \times \tilde{P} \rightarrow (H^2, *)$$

e

$$\gamma : G \times \tilde{P} \rightarrow H^2$$

definidos por $\beta(g, x) = \langle g, x \rangle$ e $\gamma(g, x) = g(x)$. Note que $\gamma = \alpha\beta$.

Precisaremos discutir a continuidade dessas aplicações. Para isso, em G tomaremos a topologia discreta, em \tilde{P} a topologia induzida por H^2 , em $G \times \tilde{P}$

consideraremos a topologia produto e em $(H^2, *)$ a topologia quociente. O mapa quociente β é sempre contínuo pela definição da topologia quociente. O mapa γ é contínuo, pois, se $A \subset H^2$ é um aberto, então $\gamma^{-1}(A) = \bigcup_g \{g\} \times (g^{-1}(A) \cap \tilde{P})$, e isto é um aberto em $G \times \tilde{P}$. Finalmente, como γ é contínuo, então α também é contínuo, uma vez que $\alpha^{-1}(A)$ é aberto em $(H^2, *)$ se, e somente se, $\beta^{-1}\alpha^{-1}(A)$ é aberto em $G \times \tilde{P}$.

Cada $f \in G$ induz um homeomorfismo $\bar{f} : G \times \tilde{P} \rightarrow G \times \tilde{P}$ dado por

$$\bar{f}(g, x) = (fg, x).$$

Para que \bar{f} como acima seja um homeomorfismo, basta ver que \bar{f} é contínua. Como a topologia considerada em G é a topologia discreta. Tem-se que uma base de abertos de $G \times \tilde{P}$ está formada pelos conjuntos da forma $\{g\} \times U$, onde U é um aberto de \tilde{P} , pelas propriedades da topologia produto. Temos que

$$\bar{f}^{-1}(\{g\} \times U) = \{f^{-1}g\} \times U$$

que é também aberto, logo f é contínua.

Por construção o grupo formado pelas aplicações \bar{f} é isomorfo a G e vale:

- $\beta\bar{f} = f^*\beta$,
- $\gamma\bar{f} = f\gamma$ e
- $\alpha f^*\beta = \gamma\bar{f} = f\gamma$

Além disso, para um aberto A de $(H^2, *)$ tem-se $\beta^{-1}(f^*)^{-1}(A) = \bar{f}^{-1}\beta^{-1}(A)$, que é um aberto em $G \times \tilde{P}$. Nós deduzimos que $(f^*)^{-1}(A)$ é aberto em $(H^2, *)$ então $f^* \in (G, *)$ é contínuo. Sabendo que $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$, vemos que os mapas f^* são homeomorfismos de $(H^2, *)$ sobre si.

Para conseguir construir a tesselação como queremos, precisamos de mais uma condição sob o conjunto P . Suponha que

$$\langle Id, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}, \text{ onde } g_1 = I, x_1 = x$$

e $x \in \partial P$. Assim algum $(g_i, x_i) = (I, x)$ e vale $g_j(x_j) = x$ para todo $j = 1, \dots, n$. Definimos N_j por $\{y \in \tilde{P} \mid d_h(y, x_j) < \epsilon\}$, isto é, N_j é o disco hiperbólico de centro x_j e raio ϵ em \tilde{P} . A condição que precisamos é:

A3. Para cada $x \in \tilde{P}$, a classe de equivalência $\langle Id, x \rangle$ é finita, isto é,

$$\langle Id, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Além disso, para $\epsilon := \epsilon_x > 0$ suficientemente pequeno, $\bigcup_{j=1}^n g_j(N_j) = B_h(x, \epsilon)$ e, mais ainda, para cada $w \in B_h(x, \epsilon)$ o conjunto de pontos em $\bigcup_{j=1}^n (g_j, N_j)$ que são mapeados por γ em w é uma classe de equivalência.

Os conjuntos $g_j(N_j)$ são subconjuntos de $g_j(\tilde{P})$ tais que $x \in \bigcap_{j=1}^n g_j(N_j)$. Como cada g_j é uma isometria de H^2 , vale que

$$g_j(N_j) \subset \{y \in H^2 \mid d_h(y, x) < \epsilon\} =: B_h(x, \epsilon).$$

Além disso, como $\langle I, x \rangle$ é uma classe finita, dado $f \in G$, temos que $\langle f, x \rangle$ também é uma classe finita.

Defina $W = \bigcup_j (g_j, N_j)$ e $V = \beta(W)$. A condição (A3) implica que $\gamma(W) = B_h(x, \epsilon)$ e também que W é uma união de classes de equivalências. Em outras palavras, $\beta^{-1}(V) = W$ e deduzimos que V é aberto em $(H^2, *)$ pela propriedade do quociente.

Para completar os detalhes que faltam precisamos dos seguintes resultados

Proposição 4.3.1. *Os conjuntos $f^*(V)$ são uma base para a topologia de $(H^2, *)$.*

Demonstração. A demonstração em [1] na página 246. □

Teorema 4.3.1. *α é um homeomorfismo local. Além disso, $(H^2, *)$ é Hausdorff e conexo.*

Demonstração. Primeiro, lembre que dado $f \in G$, vale $\alpha f^* \beta = \gamma \bar{f} = f \gamma$. Assim,

$$\alpha(f^*(V)) = \alpha(f^*(\beta(W))) = f(\gamma(W)) = f(B_h(x, \epsilon)) = B_h(f(x), \epsilon).$$

Portanto, α envia $f^*(V)$ em $B_h(f(x), \epsilon)$. Como todo aberto U de X^* é da forma $\cup_i f_i^*(V_i)$, temos que $\alpha(U) = \cup_i \alpha(f_i^*(V_i))$ é um conjunto aberto. Logo, α é uma aplicação aberta.

Considere agora $u, v \in f^*(V) = \beta \bar{f}(W)$. Sejam $u', v' \in \bar{f}(W)$ tais que $\beta(u') = u$ e $\beta(v') = v$. Se $\alpha(u) = \alpha(v)$, então

$$\gamma(u') = \alpha\beta(u') = \alpha\beta(v') = \gamma(v')$$

e por (A3) temos $u' * v'$ e isso implica que $u = v$. Donde α é localmente injetiva, portanto $\alpha|_{f^*(V)} : f^*(V) \rightarrow \alpha(f^*(V))$ é um homeomorfismo. Logo, α é um homeomorfismo local.

Segundo, para ver que $(H^2, *)$ é Hausdorff. Pegue dois pontos distintos

$$\langle g, x \rangle = \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\} \text{ e } \langle h, y \rangle = \{(h_1, y_1), \dots, (h_m, y_m)\}$$

em $(H^2, *)$. Olhando para tais conjuntos em $G \times \tilde{P}$, por representarem classes distintas, temos

$$\{(h_1, y_1), \dots, (h_m, y_m)\} \cap \{(g_1, x_1), \dots, (g_n, x_n)\} = \emptyset.$$

Agora, escolha N_i e M_j correspondendo a $\langle I, x \rangle$ e a $\langle I, y \rangle$ respectivamente como em (A3). Nós podemos escolher $\epsilon > 0$ tal que N_i e M_j são disjuntos dois a dois, assim

$$\bigcup_i (f_i, N_i) \cap \bigcup_j (g_j, M_j) = \emptyset$$

em $G \times \tilde{P}$. Como esses conjuntos são disjuntos e cada um é uma união de classes de equivalências, segue que suas β -imagens são disjuntas (e abertas). Portanto $(H^2, *)$ é Hausdorff.

Finalmente, $(H^2, *)$ é conexo. De fato, como \tilde{P} , $\langle g, \tilde{P} \rangle$ e $\langle g, P \rangle$ são conexos. Observe que se $x \in s'$, considere $y = g_s^{-1}(x)$ então $\langle g, x \rangle = \langle gg_s, y \rangle$. Pois, por construção, temos

$$(g, x) \sim (gg_s, g_{s'}(x)) = (gg_s, y)$$

já que, $x \in s'$, $y = g_{s'}(x) = g_s^{-1}(x)$ e $gg_s g_{s'} = g$ pois $g_{s'} = g_s^{-1}$. Assim, obtemos

$$\langle g, x \rangle \in \langle g, \tilde{P} \rangle \cap \langle gg_s, \tilde{P} \rangle \neq \emptyset.$$

Como $\langle g, \tilde{P} \rangle$ e $\langle gg_s, \tilde{P} \rangle$ são conexos com um ponto comum, então

$$\langle g, \tilde{P} \rangle \cup \langle gg_s, \tilde{P} \rangle$$

é conexo. Portanto $(H^2, *) = \bigcup_g g^* \langle \tilde{P} \rangle = \bigcup_g \langle g, \tilde{P} \rangle$ também é, pois cada g é um produto dos g_s . \square

Queremos que α seja uma bijeção, pois se tivermos isso terminamos o problema aplicando o seguinte lema.

Lema 4.3.1.

i. Se α é sobrejetiva, então $\bigcup_{g \in G} g(\tilde{P}) = H^2$

ii. Se α é injetiva, então para distintos $g, h \in G$, $g(P) \cap h(P) = \emptyset$

Demonstração. Para provar (i). Dado $y \in H^2$, como α é sobrejetiva, existem $g \in G$ e $x \in \tilde{P}$ tais que $y = \alpha \langle g, x \rangle = g(x)$ e portanto $y \in \bigcup_{g \in G} g(\tilde{P})$. Assim a igualdade é clara.

Para provar (ii) basta mostrar que $g(P) \cap h(P) \neq \emptyset$ implica $g = h$. Assim, se $g(x) = h(y)$ para algum par $x, y \in P$. Pela definição de α , $\alpha \langle g, x \rangle = \alpha \langle h, y \rangle$, pela injetividade $\langle g, x \rangle = \langle h, y \rangle$. Como $x \in P$, vale $x = y$ e $g = h$. \square

Queremos condições o suficiente para que α levante caminhos. A condição (A3), em como está escrito, não garante que uma sequência $\{g_n(\tilde{P})\}_{n \geq 1}$ de polígonos não possa se acumular em um determinado ponto. Para isso, precisamos pedir uma condição mais forte.

A4. Existe um subconjunto $C \subset \tilde{P}$ existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $x \in C$ tenha-se:

- $\left(\bigcup_{x \in C} B_h \left(x, \frac{\epsilon}{2} \right) \right) \cap \tilde{P} = \tilde{P}$
- Em (A3) tem-se $\epsilon_x = \epsilon$ para todo $x \in C$.

A propriedade (A4) garante que α tem a propriedade de levantamento de caminhos. Uma vez que, dado $p \in \tilde{P}$ temos $p \in B_h(x, \frac{\epsilon}{2}) \implies B_h(p, \frac{\epsilon}{2}) \subset B_h(x, \epsilon)$ todo caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow H^2$ com $\gamma(0) = p$ tal que seu diâmetro seja menor que $\frac{\epsilon}{2}$ pode ser levantado por (A3). Além disso, como todo caminho é uma união finita de caminhos de diâmetro menor que $\frac{\epsilon}{2}$, todo caminho pode ser levantado.

A propriedade de levantamento de caminhos implica que α é sobrejetiva. Com efeito, fixemos u em $(H^2, *)$ e seja v em H^2 qualquer. Consideremos um caminho γ conectando $\alpha(u)$ e v . Se $\tilde{\gamma}$ é um levantamento de γ com ponto inicial u , obtemos $\alpha(\tilde{\gamma}(1)) = \gamma(1) = v$, logo v pertence à imagem.

Precisaremos ainda do seguinte lema sobre levantamento de homotopias:

Lema 4.3.2. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo local com a propriedade de levantamento único de caminhos. Se um caminho fechado $a : [0, 1] \rightarrow Y$ é homotópico a uma constante então qualquer levantamento $\tilde{a} : [0, 1] \rightarrow X$ é fechado e homotópico a uma constante. Se a homotopia de a mantém fixo o ponto básico, o mesmo ocorre com \tilde{a} .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [2] na página 152. □

Mas, se α é sobrejetivo, tem-se que α é injetivo. Pois, se $\alpha(u) = \alpha(v)$, considere γ um caminho entre u e v em $(H^2, *)$, assim $\alpha\gamma$ é um caminho fechado, que é homotópico a um caminho trivial por H^2 ser simplesmente conexo. Aplicando o lema 4.3.2, temos que $\alpha\gamma$ é levantado a um caminho cujo o ponto inicial é igual ao final. Se a escolha do ponto inicial for u então esse levantamento é γ e portanto $u = v$. Assim, α é injetiva.

Aplicando então o lema 4.3.1, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.3.2 (Teorema de Poincaré). *Seja P um polígono hiperbólico em H^2 tal que P satisfaça (A1), (A2), (A3) e (A4). Então G é discreto e P é um polígono fundamental convexo para G .*

Observação 4.3.1. *Vale mencionar que G é discreto na topologia de $\text{Isom}(H^2)$ pois nenhuma orbita possui pontos de acumulação.*

Exemplo 4.3.1. Seja P um polígono compacto com r lados e ângulo $\frac{\pi}{n_j}$ no vértice v_j , $j = 1, \dots, r$. Para cada lado s , denote por g_s a reflexão sobre a geodésica s (inversão em círculos), chame tais mapas de g_1, \dots, g_r . Então (A4) é satisfeito pelas escolhas de elementos side-pairing e por P ser compacto. Logo, P é polígono fundamental para o grupo discreto $G = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$.

4.4 Grupos triangulares

Nesta breve seção, falaremos dos grupos triangulares. Nosso objetivo é apenas apresentar este objeto e fazer as devidas relações com o que já foi aqui apresentado, mas estes assuntos aparecem em diversos contextos da física teórica à combinatória, teoria dos grupos finitos, formas automórficas, funções hipergeométricas e Teoria dos Números, como afirmam os autores no artigo *Fuchsian Triangle Groups and Grothendieck Dessins. Variations on a Theme of Belyi* em sua introdução.

Seja $m_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, com $i = 1, 2, 3$, tais que $m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_3^{-1} < 1$ e seja $\delta(v_1, v_2, v_3)$ um triângulo hiperbólico com vértices $v_1, v_2, v_3 \in \overline{H^2}$ tais que seus ângulos internos são $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}, \frac{\pi}{m_3}$ respectivamente. Denote ainda por M_j o lado oposto ao vértice v_j para todo $j = 1, 2, 3$ veja a figura 4.4.

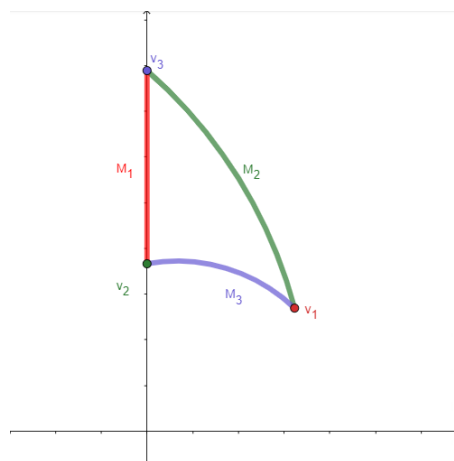


Figura 4.4: Triângulo $\Delta(v_1, v_2, v_3)$

Seja R_i a reflexão hiperbólica na geodésica que contém M_i , $i = 1, 2, 3$ e seja Γ^* o grupo gerado pelas reflexões R_1, R_2, R_3 . Repare que estamos nas hipóteses do Teorema de Poincaré, então $\langle R_1, R_2, R_3 \rangle$ é um subgrupo discreto de $\text{Isom}(H^2)$ mas não é um subgrupo de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, já que cada R_i não preserva a orientação. Contudo, se considerarmos $\Gamma := \Gamma^* \cap \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, teremos que $\Gamma^* = \Gamma \cup \Gamma R_1$. De fato, seja $S \in \Gamma^* \setminus \Gamma$ então $S \circ R_1$ é uma composição de duas isometrias que invertem orientações, assim $S \circ R_1$ é uma isometria que não inverte orientação, portanto $S \circ R_1 \in \Gamma \subset \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Assim, $S = (S \circ R_1) \circ R_1 \in \Gamma R_1$.

Considere agora o quadrilátero hiperbólico

$$\square(v_1, v_2, v_3, R_1 v_1) := R_1(\Delta(v_1, v_2, v_3)) \cup (v_3, v_2) \cup \Delta(v_1, v_2, v_3),$$

de vértices $v_1, v_2, v_3, R_1 v_1$ como na figura 4.5.

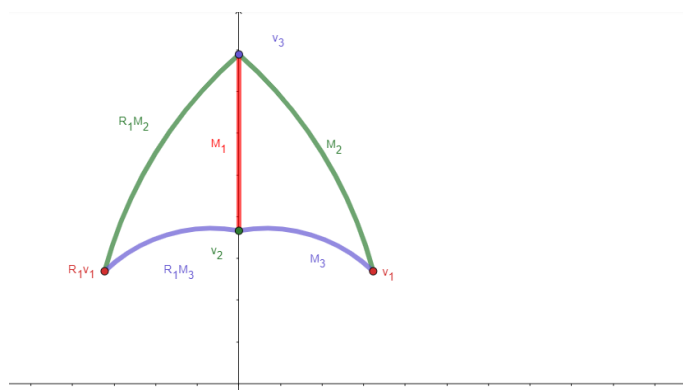


Figura 4.5: Quadrilátero $\square(v_1, v_2, v_3, R_1 v_1)$

Repare que $R_1 \circ R_j(M_j) = R_1(M_j)$ para $j = 2, 3$, além disso $R_1 \circ R_j \in \Gamma$. Aplicando o teorema de Poincaré em $\square(v_1, v_2, v_3, R_1 v_1)$ temos que o grupo $\langle R_1 R_2, R_1 R_3 \rangle$ é um grupo fuchsiano. E além disso, o próximo teorema permitirá relacionar Γ e $\langle R_1 R_2, R_1 R_3 \rangle$.

Teorema 4.4.1. *Sejam F_1 e F_2 conjuntos fundamentais para G mensuráveis. Então $h\text{-área}(F_1) = h\text{-área}(F_2)$. Seja F_0 um conjunto fundamental para um subgrupo G_0 de G de índice k . Então $A_h(F_0) = k \cdot A_h(F_1)$. Onde A_h indica a área hiperbólica.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [1] na página 206. □

Uma vez que a área do quadrilátero $\square(v_1, v_2, v_3, R_1v_1)$ é o dobro da área do triângulo $\Delta(v_1, v_2, v_3)$, aplicando o teorema 4.4.1 temos que o índice de $\langle R_1R_2, R_1R_3 \rangle$ em Γ^* é 2. Como o índice de Γ em Γ^* é 2 e vale $\langle R_1R_2, R_1R_3 \rangle \subset \Gamma$ temos $\langle R_1R_2, R_1R_3 \rangle = \Gamma$. Portanto, Γ é um grupo fuchsiano tal que $\square(v_1, v_2, v_3, R_1v_1)$ é um dos seus polígonos fundamentais convexos.

Definição 4.4.1. *Um grupo de isometrias G do plano hiperbólico é dito um grupo triangular se G é gerado por reflexões sobre lados de algum triângulo de ângulos $\frac{\pi}{m_1}, \frac{\pi}{m_2}$ e $\frac{\pi}{m_3}$, com $m_1^{-1} + m_2^{-1} + m_3^{-1} < 1$. Um grupo triangular é denotado por $G(m_1, m_2, m_3)$.*

Capítulo 5

Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados

5.1 Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados

No exemplo 4.3.1 vemos que, pelo teorema de Poincaré, um polígono compacto com um número de lados r se associa a um grupo discreto gerado por r elementos pertencentes a $\text{Isom}(H^2)$. O objetivo deste último capítulo será provar que um grupo fuchsiano G é finitamente gerado se, e somente se, todo polígono fundamental convexo tem um número finito de lados. A caracterização da propriedade de geração finita para um grupo será dada em termos de propriedades de seu conjunto limite.

Considere um grupo fuchsiano G agindo em Δ . Seja ξ um ponto limite de G , pelo Corolário 3.3.1, existem distintos $g_n \in G$ com $g_n(0) \rightarrow \xi$ quando $n \rightarrow \infty$. Temos então

$$|\xi - g_n(0)| \geq |\xi| - |g_n(0)| = 1 - |g_n(0)|.$$

Uma vez que a proposição 3.3.2 garante que $\xi \in \partial\Delta$. Podemos assim dizer, em termos euclidianos, que a convergência mais rápida ocorre quando

$$|\xi - g_n(0)| = O(1 - |g_n(0)|)$$

com $n \rightarrow \infty$. Vamos provar que os termos $\|g_n\|^2$ e $\frac{2}{1 - |g_n(0)|}$, são assintoticamente equivalentes. De fato, basta ver que o quociente das duas sequências converge a 1 quando $n \rightarrow \infty$.

Ora, por G ser discreto, tem-se $\|g_n\|^2 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Escrevendo

$$g_n(z) = \frac{a_n z + \bar{c}_n}{c_n z + \bar{a}_n},$$

com $|a_n|^2 - |c_n|^2 = 1$ segue que $\|g_n\|^2 = 4|c_n|^2 + 2$, assim $|c_n|^2 \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$.

Por outro lado, $|g_n(0)| = |c_n||a_n|^{-1}$ e daí

$$\frac{2}{1 - |g_n(0)|} = \frac{2|a_n|}{|a_n| - |c_n|}.$$

Usando $|a_n|^2 - |c_n|^2 = 1$, temos

$$\frac{2|a_n|}{|a_n| - |c_n|} = \frac{2|a_n|(|a_n| + |c_n|)}{|a_n|^2 - |c_n|^2} = 2(|a_n|^2 + |a_n||c_n|)$$

e como

$$2(|a_n|^2 + |a_n||c_n|) = |c_n|^2 \left(\frac{2}{|c_n|^2} + 2 + 2\sqrt{\frac{1 + |c_n|^2}{|c_n|^2}} \right)$$

temos que a sequências $\|g_n\|^{-2} \cdot \frac{2}{1 - |g_n(0)|} \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Usando que esses termos são assintóticos e o corolário 2.2.2 garantem que essa convergência mais rápida é equivalente a pedir

- $|\xi - g_n(0)| = O\left(\frac{1}{\cosh \rho(0, g_n(0))}\right)$, ou;
- $|\xi - g_n(0)| = O(\|g_n\|^{-2})$.

Ainda mais, pode-se trocar a origem por qualquer $z \in \Delta$. Isto está implícito no próximo resultado.

Teorema 5.1.1. *Seja G um grupo fuchsiano agindo em Δ , seja ξ um ponto limite de G e sejam g_1, g_2, \dots elementos distintos de G . As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) *Para cada $w \in \Delta$, tem-se $|\xi - g_n(w)| = O(\|g_n\|^{-2})$.*

(2) *Para cada $w \in \Delta$ e cada semi-raio geodésico L terminando em ξ , tem-se $\rho(g_n(w), L) = O(1)$;*

(3) Para cada semi-raio geodésico L terminando em ξ existe um compacto K de Δ tal que para todo n , tem-se $g_n^{-1}(L) \cap K \neq \emptyset$.

Demonstração. De maneira geral, sejam $g \in G, w \in \Delta$ e $m > 0$, seja ainda L um semi-raio geodésico terminando em ξ . Então

$$\rho(g(w), L) \leq m \Leftrightarrow \rho(w, g^{-1}(L)) \leq m \Leftrightarrow g^{-1}(L) \cap \tilde{B}_h(w, m) \neq \emptyset. \quad (5.1)$$

Assim, (2) e (3) são equivalentes quando fixado um L . Mais ainda, (2) não depende da escolha de L nem de $w \in \Delta$ como veremos a seguir. De fato, fixado L , sejam w e w' em Δ . Se $\rho(g_n(w), L) \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $g_n^{-1}(L) \cap \tilde{B}_h(w, C) \neq \emptyset$ para todo n . Então, existe C' tal que $\tilde{B}_h(w, C) \subset \tilde{B}_h(w', C')$. Pela Equação (5.1), temos que (2) independe de w . Agora, considere L_1 e L_2 semi-raios geodésicos terminando em ξ , existe m_1 tal que $L_2 \subset \{z \mid \rho(z, L_1) \leq m_1\}$, portanto independe de L também.

Agora, basta mostrar que (1) \Leftrightarrow (2). Para o restante da prova, fixaremos $w = 0$, $L = [0, \xi)$ e $L' = (-\xi, \xi)$ e mostraremos tal equivalência para este caso particular.

Suponha que (1) vale (para $w = 0$), então existe $m > 0$ tal que

$$|\xi - g_n(0)| \leq m \|g_n\|^{-2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\| = \infty \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n\|^{-2} = 0$, temos $g_n(0) \rightarrow \xi$ quando $n \rightarrow \infty$. Portanto, $\rho(g_n(0), L) = \rho(g_n(0), L')$ vale para n suficientemente grande.

Dado $z \in \Delta$, podemos aplicar a proposição 2.2.4.

$$\sinh(\rho(z, L')) = \frac{2|\operatorname{Im}(\bar{\xi}z)|}{1 - |\bar{\xi}z|^2} \leq \frac{2|z - \xi|}{1 - |z|}.$$

Colocando $z = g_n(0)$ e aplicando (1), temos que $\sinh(\rho(g_n(0), L))$ para n suficientemente grande é limitada. Assim, $\rho(g_n(0), L)$ está limitada por uma constante $m > 0$ para todo n . Logo, $\rho(g_n(0), L) = O(1)$. Como (2) vale para $w = 0$ segue que (2) vale para todo $w \in \Delta$.

Vejamos agora que se (2) é verdadeiro, vale (1) para $w = 0$. Seja $z \in \Delta$ um ponto que esteja mais próximo de ξ do que de $-\xi$. E seja $v \in L'$ o ponto dado pela interseção $L' \cap L''$ onde L'' é a perpendicular euclidiana a L' que passa por z . Temos assim,

$$|z - \xi| \leq |z - v| + |v - \xi| \leq |z - v| + \left|v - \frac{z}{|z|}\right| \leq 2|z - v| + \left|z - \frac{z}{|z|}\right|$$

Como

$$\left|z - \frac{z}{|z|}\right| = (1 - |z|)$$

e $|z - v| = |Im(\bar{\xi}z)|$, deduzimos

$$|z - \xi| \leq 2|z - v| + (1 - |z|) \implies \frac{|z - \xi|}{1 - |z|} \leq \frac{2|Im(\bar{\xi}z)|}{1 - |z|} + 1.$$

Usando a proposição 2.2.4 novamente,

$$\frac{2|Im(\bar{\xi}z)|}{1 - |z|^2} = \sinh(\rho(z, L))$$

e que $1 + |z| \leq 2$, temos

$$\frac{|z - \xi|}{1 - |z|} \leq 2\sinh(\rho(z, L)) + 1.$$

Colocando $z = g_n(0)$ para n suficientemente grande, temos que $\sinh(\rho(g_n(0), L))$ é limitado por (2) e portanto $|\xi - g_n(0)| = O(1 - |g_n(0)|)$, concluindo assim o resultado.

Até o momento, concluímos que (1) vale para $w = 0$, se e somente se, vale (2). Para finalizar, basta mostrar que (1) independe da escolha de w . Seja $w \in \Delta$ qualquer e escrevamos

$$g_n(z) = \frac{a_n z + \bar{c}_n}{c_n z + \bar{a}_n},$$

com $|a_n|^2 - |c_n|^2 = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostraremos que

$$|\xi - g_n(w)| = O(\|g_n\|^{-2}) \Leftrightarrow |\xi - g_n(0)| = O(\|g_n\|^{-2}).$$

Para ver isso, observe que valem as desigualdades

$$|\xi - g_n(w)| \leq |\xi - g_n(0)| + |g_n(0) - g_n(w)| \text{ e}$$

$$|\xi - g_n(0)| \leq |\xi - g_n(w)| + |g_n(0) - g_n(w)|.$$

Se ocorrer $|g_n(0) - g_n(w)| = O(\|g_n\|^{-2})$ acabou. Assim, analisemos o termo $|g_n(0) - g_n(w)|$. Nós obtemos:

$$|g_n(w) - g_n(0)| = \left| \frac{w}{\frac{1}{a_n^2} \left(\frac{c_n w}{a_n} + 1 \right)} \right| \leq \frac{1}{|a_n|^2 \left| \frac{c_n w}{a_n} + 1 \right|} \leq \frac{1}{|a_n|^2 (1 - |w|)} \leq \frac{2\|g_n\|^{-2}}{1 - |w|}.$$

Assim, quociente é limitado e portanto temos o resultado. Logo, (1) vale para $w = 0 \Leftrightarrow$ (1) vale para w . \square

Definição 5.1.1. *Um ponto limite ξ de um grupo fuchsiano G é um ponto de aproximação de G se para cada $w \in \Delta$ existe uma sequência de $g_n \in G$ distintos tais que*

$$|\xi - g_n(w)| = O(\|g_n\|^{-2}).$$

Teorema 5.1.2. *Um ponto de aproximação para um grupo fuchsiano G não pode pertencer ao bordo de qualquer polígono fundamental convexo.*

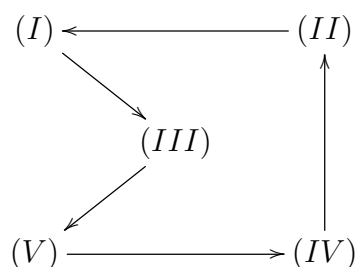
Demonstração. Suponha que para um ponto de aproximação ξ exista $P \subset \Delta$ tal que P é um polígono fundamental convexo para G e $\xi \in \overline{P}$. Pela observação 4.2.1, podemos construir um semi-raio geodésico $L \subset P$ cujo seu ponto final é ξ . Pela condição (3) do teorema 5.1.1, temos que $g_n^{-1}(L) \subset g_n^{-1}(P)$ implica que $g_n^{-1}(P) \cap K \neq \emptyset$, para algum compacto K e todo $n \in \mathbb{N}$. Isso contradiz a finitude local de P . Logo ξ não está no bordo de nenhum polígono fundamental convexo. \square

Se o conjunto limite L é composto apenas de pontos fixos de elementos parabólicos ou de pontos de aproximação de G , dizemos que o conjunto L Splits. A noção de ponto de aproximação será usada para provar que se existe um polígono fundamental convexo com um número finito de lados então todo polígono fundamental convexo tem um número finito de lados. Assim, podemos enunciar o teorema que nos descreve como são os polígonos fundamentais convexos de grupos fuchsianos não-elementares finitamente gerados.

Teorema 5.1.3. *Seja G um grupo fuchsiano não elementar com região de Nielsen N . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (I) G é finitamente gerado;
- (II) Para qualquer polígono fundamental convexo P de G temos que $h\text{-área}(P \cap N)$ é finita;
- (III) Todo polígono de Dirichlet de G tem um número finito de lados;
- (IV) Todo polígono fundamental convexo de G tem um número finito de lados.
- (V) O conjunto limite de G splits.

Demonstração. A estrutura da demonstração está ilustrada no diagrama abaixo ($A \rightarrow B$ indica A implica B).



- (V) implica (IV).

Primeiro suponha que L splits e seja P um qualquer polígono fundamental convexo para G . Se P possui um número infinito de lados, os lados de P se acumulam em algum ponto $\xi \in \partial\Delta$. Como o diâmetro euclidiano das imagens de P tende a zero, ξ é um ponto limite em ∂P . O teorema 5.1.2 garante que ξ não é um ponto de aproximação. Já o teorema 4.2.4 garante que ξ não pode ser ponto fixo de algum elemento parabólico (do contrário, seria o ponto final de dois lados). Essas conclusões contradizem que L splits, portanto P tem um número finito de lados. Como P era qualquer, vale (IV).

- (IV) implica (II).

Para provar que (IV) \implies (II) tome P um polígono fundamental convexo. Por hipótese, P tem um número finito de lados. Assim, P tem um número finito de

lados livres λ_i com $i = 1, \dots, m$. Cada λ_i está contido no interior de um arco de descontinuidade γ_i , pela proposição 4.2.4. Além disso, cada γ_i determina um semi-plano H_i^2 que contém N pela definição 3.3.4.

Então $P_1 = P \cap H_1^2 \cap \dots \cap H_m^2$ é um polígono com um número finito de lados que não possui lados livres e portanto tem área hiperbólica finita, vide teorema 2.3.1. Assim, como $H_1^2 \cap \dots \cap H_m^2 \supset N \implies P_1 \supset P \cap N$, temos que a área de $P \cap N$ é finita, como queríamos.

- (II) implica (I).

Valendo (II). Primeiro escreva $Q = P \cap N$. Pela proposição 4.2.5, N encontra o bordo de P e como N é G -invariante, cada ciclo que intersecta \tilde{Q} está inteiramente contido em \tilde{Q} .

Suponha que \tilde{Q} contenha ciclos de vértices C_1, \dots, C_t em $\Delta \cap \partial P$ e vértices w_1, \dots, w_n sobre $\partial\Delta$. Seja Q_0 o fecho convexo do subconjunto

$$C_1 \cup \dots \cup C_t \cup \{w_1, \dots, w_n\},$$

de ∂P . Assim, pela convexidade de Q , temos $Q_0 \subset \tilde{Q}$ e a soma dos ângulos interiores de Q_0 em seus vértices são menores ou iguais a soma dos ângulos internos de Q . O que queremos mostrar é que $t < \infty$ e $n < \infty$. Para isso, se C_j tem comprimento ℓ_j e ordem q_j , deduzimos pelo teorema 2.3.1 que

$$h - \text{área}(Q) \geq h - \text{área}(Q_0) \geq \pi[n + \ell_1 + \dots + \ell_t - 2] - 2\pi[q_1^{-1} + \dots + q_t^{-1}], \quad (5.2)$$

uma vez que, $n + \ell_1 + \dots + \ell_t$ é a soma do número de lados de Q_0 e a soma dos ângulos interiores a um ciclo em Q_0 é no máximo a soma dos ângulos interiores a esse ciclo em Q . Podemos reescrever a equação 5.2 como

$$\pi(n - 2) + \pi \sum_j \left(\ell_j - \frac{2}{q_j} \right). \quad (5.3)$$

Cada ciclo C_j possui $\ell_j q_j \geq 3$. De fato, como $\ell_j, q_j \geq 1$ basta ver dois casos:

caso 1 Se $q_j = 1$ então $\ell_j \geq 3$. De fato, como a soma dos ângulos interiores ao ciclo C_j é 2π , pelo teorema 4.2.2, e cada ângulo deve ser menor ou igual que π por convexidade, tem-se que $\ell_j \geq 3$. Pois, se $\ell_j = 2$ temos que os pontos em C_j seriam pontos interiores de lados e não seriam vértices, o que é uma contradição.

caso 2 Se $q_j = 2$ então $\ell_j \geq 2$. Pois se $\ell_j = 1$, teríamos $\{z\} = C_j$ para algum z . Além disso, se $\theta(z)$ denota o ângulo interno a P em z então $2\pi = q_j\theta(z)$ e teríamos $\theta(z) = \pi$, uma contradição com o fato de z ser vértice.

Então para qualquer par q_j, ℓ_j vale $q_j\ell_j \geq 3$ assim para qualquer possibilidade temos:

$$q_j\ell_j \geq 3 \implies \ell_j \geq \frac{3}{q_j} \implies \frac{2\ell_j}{3} \geq \frac{2}{q_j}.$$

E portanto,

$$\ell_j - \frac{2}{q_j} \geq \frac{\ell_j}{3} \geq \frac{1}{3}.$$

Assim, aplicando na equação (5.3) temos que

$$3n + t < 6 + \frac{3}{\pi} h\text{-área}(Q) < \infty.$$

Portanto, apenas um número finito de imagens de lados de P encontram \tilde{Q} .

Agora, sejam g_s uma escolha de elemento side-pairing de P cujo lado s encontra \tilde{Q} . A coleção dessas possíveis escolhas é finita, denotemos a coleção por S , queremos mostrar que $G = \langle S \rangle$. Seleccionemos $g \in G$, por convexidade e pela invariância de N podemos ligar dois pontos, um em Q e outro em $g(Q)$ por um segmento geodésico γ no conjunto convexo N . Podemos ainda, assumir que γ não intersecta nenhum ciclo de vértices. Por tesselação, γ cruza um número finito de imagens $P, g_1(P), \dots, g_n(P)$, com $g_n = g$. Como $g_{j+1}(\tilde{P}) \cap g_j(\tilde{P}) \cap N$ é um segmento geodésico, temos $\tilde{P} \cap g_{j+1}^{-1}g_j(\tilde{P}) \cap N$ também o é (repare que usamos a invariância de N). Portanto, cada $g_{j+1}^{-1}g_j$ é igual a algum g_s e como $g = g_1(g_1^{-1}g_2) \dots (g_{n-1}^{-1}g_n)$ temos o resultado.

- (I) implica (III).

Suponha que vale (I). Seja $D = D(w)$ um polígono de Dirichlet. A menos de conjugação, podemos supor que $w = 0$. Assim, considere o polígono de Dirichlet

de G centrado na origem, denotado por D . Mostraremos primeiro que D possui um número finito de lados livres. Para isso, tentaremos escrever $D = K \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$, onde K é convexo e cada D_j é aberto, conexo e tal que seu bordo sobre $\partial\Delta$ é conexo.

O teorema 4.2.1 garante que G é gerado por elementos side-pairing. A hipótese (I), diz que G é gerado por uma quantidade finita de elementos. Combinando ambas afirmações, podemos escolher uma quantidade finita de elementos side-pairings para gerar G . Então suponha que G é gerado pelo conjunto $\{g_1, \dots, g_t\}$, onde cada g_i é um elemento side-pairing.

Escolha algum $r \in (0, 1)$ tal que $B = \{z \in \Delta : |z| \leq r\}$ intersekte arcos de comprimento positivo dos lados da forma $\tilde{D} \cap g_i(\tilde{D})$, para todo $i = 1, \dots, t$. Definimos $K = \tilde{D} \cap \{z \in \Delta : |z| < r\}$. Claramente, K é convexo (pois é interseção de convexos).

Além disso, pode-se provar que $G(K) = \bigcup_{g \in G} g(K)$ é conexo. De fato, observe que para cada $j \in \{1, 2, \dots, t\}$, o conjunto $K \cup g_j(K)$ é conexo e portanto para $i \in \{1, 2, \dots, t\}$ o conjunto $g_i(K \cup g_j(K)) = g_i(K) \cup g_i g_j(K)$ é conexo e por fim

$$K \cup g_i(K) \cup g_i g_j(K) = (K \cup g_i(K)) \cup (g_i(K) \cup g_i g_j(K))$$

é conexo (por ser uma união de conjuntos conexos não disjuntos). De maneira análoga, se concluí que dado $g := g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_q} \in G$ com $j_1, \dots, j_q \in \{1, 2, \dots, t\}$, o conjunto

$$K_g := K \cup g_{j_1}(K) \cup g_{j_1} g_{j_2}(K) \cup \dots \cup g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_q}(K)$$

é conexo. Como todo $g \in G$ pode ser escrito como $g_{j_1} \circ \dots \circ g_{j_q}$ segue que $G(K)$ é conexo dado que $G(K) = \bigcup_{g \in G} K_g$ é uma união de conjuntos conexos com interseção não vazia. Pela propriedade (3) dos polígonos fundamentais convexos, podemos escolher $r \in (0, 1)$ tal que $\{z \in \Delta : |z| = r\}$ não seja tangente a nenhum lado de D e que não contenha vértice algum. Então, se considerarmos a interseção

$$\tilde{D} \cap \{z \in \Delta : |z| = r\},$$

obtemos uma coleção finita $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ de arcos fechados, disjuntos e contidos em $\{z \in \Delta : |z| = r\}$. Cada arco σ_i é tal que seus pontos finais estão no bordo hiperbólico de

D e o restante de seus pontos estão em D . Denote por $a_i, b_i \in \Delta$ os pontos finais de σ_i , para todo $i = 1, \dots, s$. O teorema 4.2.3 garante que o ciclo de qualquer $a \in \bigcup_{i=1}^s \{a_i, b_i\}$ está contido em $\bigcup_{i=1}^s \{a_i, b_i\}$. Ainda mais, nossa construção garante que $G(a) \cap \tilde{D}$, possui no máximo dois pontos (já que todos os pontos são pontos interiores de lados).

Para cada curva σ_i , queremos criar uma curva simples Γ_i que contém σ_i e é obtida anexando G -imagens de $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_s$. Por exemplo, considere σ_1 e um de seus extremos, digamos a_1 . Sendo a_1 um ponto interior de um lado s' , existe um único elemento $h_1 \in G \setminus \{Id\}$ e um lado s de D tal que $h_1(s) = s'$. Assim, existe $b_2 \in s$ tal que $h_1(b_2) = a_1$ e portanto $h_1^{-1}(a_1)$ é o ponto final de algum σ_{j_2} pois é um ponto no ciclo de a_1 . Considere agora o outro ponto final de σ_{j_2} sendo a_2 . Para a_2 , repetimos o processo que fizemos para a_1 . Logo, existe um único $h_2 \in G$, um único ponto final $b_3 \in \sigma_{j_3}$ tal que $h_2(b_3) = a_2$. Seguindo este processo, define-se a curva

$$\Sigma_1 := \sigma_1 \cup h_1(\sigma_{j_2}) \cup h_1 h_2(\sigma_{j_3}) \cup \dots$$

De maneira análoga, defina Σ'_1 como sendo a curva obtida a partir do outro extremo de σ_1 , isto quer dizer que

$$\Sigma'_1 := \sigma_1 \cup h'_1(\sigma_{k_2}) \cup h'_1 h'_2(\sigma_{k_3}) \cup \dots,$$

Seja $\Gamma_1 = \Sigma_1 \cup \Sigma'_1$. Como existem apenas um número finito de σ_i , o caminho Γ_1 contém a imagem de um mesmo σ_j , isso garante que Γ_1 é invariante por algum elemento não trivial $g_1 \in G$; para encontrá-lo, basta escolher $1 \leq a < b$ tais que $j_a = j_b$. Uma transformação de G na qual Γ_1 é invariante é a transformação $g_1 := gk^{-1}$ onde $g = h_1 \dots h_{j_b}$ e $k = h_1 \dots h_{j_a}$. Note que Γ_j pode ser obtido por imagens iteradas de uma curva compacta C por g_1 .

Se g_1 for parabólica, Γ_1 é uma curva simples em Δ que ao acrescentarmos o ponto fixo v de g_1 em $\partial\Delta$ é uma curva fechada e simples. De fato, $x \in \Gamma_1 \implies g_1^n(x) \in \Gamma_1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e quando $n \rightarrow \infty$ tem-se $g_1^n(x) \rightarrow z$. Além disso, construção garante que se ela intersecta em algum momento, a curva Γ_1 seria fechada em algumas das direções, suponha Σ_1 por exemplo, mas isso contradiz o fluxo de iterados positivos e negativos de g_1 aproximarem um ponto qualquer de seu ponto fixo. Se g_1 é um

elemento hiperbólico, Γ_1 é a curva em Δ tal que seu ponto inicial e final são os pontos fixos de g_1 em $\partial\Delta$ e o motivo é análogo. Se g_1 for elíptica, ou a identidade, temos que Γ_1 é uma curva de Jordan em Δ , isso é consequência do interior de σ_1 estar no interior de um polígono fundamental.

Para cada $j = 1, 2, \dots, s$ é possível construir um Γ_j como acima. Além disso, por construção, dado um ponto z em $G(K)$ não existe $h \in G$ tal que $h(z) \in \cup_{i=1}^s \Gamma_i$, pois D é um polígono fundamental convexo para G e vale o teorema 4.2.3.

Agora, seja D_j a união de σ_j e a componente conexa de $D \setminus \sigma_j$ que não contém a origem. Afirmamos que Γ_j separa D_j e $G(K)$ em Δ . De fato, como $G(K)$ é conexo e nenhum ponto de K pode ser G -equivalente a algum ponto de $\cup_{i=1}^s \sigma_i$, $G(K)$ está contido inteiramente na componente conexa de $\Delta \setminus \Gamma_j$ que contém K que é claramente a componente conexa cuja interseção com D_j é vazia já que $0 \in K$.

Não é difícil ver que $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ é conexo. De fato, sendo u e v pontos neste conjunto, considere os segmentos de u a ru , o segmento de v a rv e a curva em σ_j de ru a rv denotada por $\sigma_{(u,v)}$ (lembre-se que $1 > r > 0$). Defina por τ_j essa curva, tem-se $\tau_j \subset D$ pois $\sigma_{(u,v)}, [ru, u], [rv, v] \subset D$ e temos ainda que $\tau_j \cap G(K) = \emptyset$. Seja $h \in G \setminus \{Id\}$, então $h(D) \cap \tau_j = \emptyset$ e como $h(K) \subset G(K) \cap h(\tilde{D})$ temos que $h(D)$ pertence a mesma componente conexa de $\Delta \setminus \tau_j$ que $G(K)$. Denote por Σ_j a componente conexa de $\Delta \setminus \tau_j$ que não contém a origem. Deduzimos que $\Sigma_j \cap h(D) = \emptyset$ para qualquer $h \neq Id$ e portanto $\Sigma_j \subset D$. Assim, concluímos que $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ é conexo.

Se concluirmos que cada D_j tem um número finito de lados, acabou. Para isso, voltamos nossa atenção a Γ_j e os h_j . Se h_j é elíptico ou a aplicação identidade, temos que Γ_j divide o espaço em duas componentes conexas, uma limitada e outra não. Mas, se D_j está na componente conexa que é limitada de $\Delta \setminus \Gamma_j$, ele tem um número finito de lados (propriedade de polígono fundamental convexo) e se $G(K)$ está na componente conexa limitada, então G é finito e isto é suficiente para concluir o resultado.

Suponha agora que h_j é parabólico. Neste caso, $\overline{D_j} \cap \partial\Delta$ consiste em no máximo um único ponto e, se for o caso, este ponto é o único ponto fixo de h_j . Contudo, é sabido que em um ponto fixo parabólico chegam exatamente dois lados de D e, usando

a finitude local, D_j tem um número finito de lados. Caso $\overline{D_j} \cap \partial\Delta = \emptyset$ é resolvido de maneira análoga ao caso elíptico.

Por fim, sendo h_j é hiperbólico, Γ_j separa Δ em duas componentes conexas. Uma componente de $\Delta \setminus \Gamma_j$ contém $G(K)$ (e portanto a órbita da origem) e portanto todo ponto limite de G é um elemento do fecho, em \mathbb{C}_∞ , desta componente. A outra componente, a que contém D_j , não possui pontos limites no seu bordo, exceto os que pertencem ao fecho de Γ_j . Pela construção do polígono de Dirichlet, D_j está entre as geodésicas $L_{h_j}(0)$ e $L_{h_j^{-1}}(0)$. Elas separam D_j dos pontos fixos de h_j . Assim, o fecho euclidiano de D_j é contido no conjunto ordinário de G e como os diâmetros euclidianos de D tendem a zero, vemos que \tilde{D}_j podem intersectar apenas um número finito de imagens de \tilde{D} . Assim, D_j tem apenas um número finito de lados e portanto D tem um número finito de lados. Logo (I) \implies (III).

- (III) implica (V)

Suponha que vale (III). Seja $D_G(w)$ o polígono de Dirichlet com um número finito de lados, Podemos supor que estamos na condição do teorema 4.2.5. Além disso, podemos supor $w = 0$ modulo substituir G por hGh^{-1} . Já que para todo $w \in \Delta$ existe $h \in PSL(2, \mathbb{C})$ tal que $h(w) = 0$, $h(\Delta) = \Delta$, em particular, vale

$$h(D_G(w)) = D_{hGh^{-1}}(h(w)) = D_{hGh^{-1}}(0).$$

Assim, defina $P := D_G(0)$.

Se dois lados de P , denotados por s e s' , terminam em $v \in \partial\Delta$, então v é um vértice próprio. Portanto v é um ponto fixo parabólico (vide teorema 4.2.5). Usando também a observação 4.2.6, o estabilizador de v é gerado por um elemento parabólico p de G . Considere uma circunferência euclidiana Q tangente a $\partial\Delta$ em v e que tenha raio suficientemente pequeno para cortar s e s' em pontos que não sejam vértices. Existe um arco compacto q em Q tal que $Q = \cup_{n \in \mathbb{Z}} p^n(q)$. Uma circunferência, como Q , que é tangente a um ponto do bordo é conhecida como *horociclo*.

Agora, consideremos lados livres. Cada extremo de um lado livre é o extremo da imagem de algum lado livre, pela observação 4.2.4. O intervalo de descontinuidade

σ que detém este lado é uma união de imagens de um número finito de lados livres de P , onde essas imagens não se sobrepõem e se acumulam nos extremos de σ . Isso mostra que existe $h \in G$ que mapeia um lado livre em σ em outra imagem desse lado em σ . Assim, $h(\sigma) = \sigma$. Assim, h fixa os extremos de σ e portanto h é hiperbólico. A geodésica $L \subset \Delta$ que tem extremos nos pontos fixos de h é o eixo de h e podemos assumir que h gera o estabilizador de L , modulo substituir h por um gerador do estabilizador de L em G . Note que existe um segmento geodésico ℓ contido em L tal que L é obtido através da união das imagens $h^n(\ell)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Como P tem um número finito de lados, estamos considerando um número finito de geodésicas L e horociclos Q . Eles separam os lados livres e os vértices no infinito de uma parte limitada $P_0 \subset \tilde{P}$. Seja K o compacto obtido fazendo a união de \tilde{P}_0 com os arcos q e ℓ construídos.

Agora, seja $\xi \in \mathbf{L}$ um ponto que não é fixo por elementos parabólicos de G e seja um semi-raio geodésico L_0 terminando em ξ . O ponto inicial de L_0 pode ser mapeado para um ponto em \tilde{P} e a imagem correspondente de L_0 não pode estar inteiramente contida no interior das regiões limitadas por Q e por L produzidas acima, uma vez que estão construídas sobre pontos fixos parabólicos ou pontos ordinários. Assim, P fica dividida em três partes:

- 1) a parte limitada P_0 ;
- 2) a parte de P que mora na união dos Q 's e os L 's;
- 3) a parte no interior dos Q 's e os L 's.

Nosso argumento garante que existe uma imagem L'_0 de L_0 que não está contida em 3). Se além disso, L'_0 não intersecta P_0 ela está contida na união dos Q 's e os L 's e portanto nas órbitas dos q 's e os ℓ 's. Logo existe uma imagem de L'_0 intersectando a união dos q 's e os ℓ 's, mas uma imagem de L'_0 é uma imagem de L_0 .

Segue-se que ou L_0 intersecta P_0 ou, alternativamente, L_0 encontra algumas dessas regiões em que alguma imagem de L_0 encontra um dos arcos q ou ℓ . Em ambos os casos a imagem de L_0 encontra K e portanto existe algum z_0 e g_0 tal que $g_0(z_0) \in K$.

Agora, seja L_n obtida de L_0 por tirar o segmento de comprimento n a partir do ponto inicial de L_0 . Exatamente como em L_0 , existem $z_n \in L_n$ e $g_n \in G$ com $g_n(z_n) \in K$. Logo, $g_n(z_n) \rightarrow \xi$ e o conjunto $\{g_1, g_2, \dots\}$ é infinito, logo pelo teorema 5.1.1, ξ é um ponto de aproximação e L splits. Assim, vale (V). \square

Apresentaremos agora o espaço quociente. Que além de ser um método para construir superfícies de Riemann será usado para concluir se existe um polígono P com um número finito de lados para um grupo fuchsiano G não elementar então todo polígono fundamental convexo tem um número finito de lados. Antes de prosseguir com a relação entre esses objetos, vale a pena lembrar o significado de espaço quociente.

Definição 5.1.2. *Dado um grupo G de homeomorfismos de H^2 . Indicamos por $\frac{H^2}{G}$ o espaço quociente de H^2 pela relação de equivalência cujas classes são as órbitas $G(x)$, onde $x \in H^2$ (Apresentada no capítulo 3).*

Teorema 5.1.4. *Seja $D \subset \mathbb{C}_\infty$ um conjunto aberto e conexo. Seja G um grupo de transformações de Möbius que deixa D invariante e age de maneira propriamente descontínua em D . Então $\frac{D}{G}$ é uma superfície de Riemann com singularidades nos pontos elípticos de G em D .*

Demonstração. A demonstração pode se encontrada em [1] na página 118. \square

Exemplo 5.1.1. *Seja $G(m_1, m_2, m_3)$ um grupo triangular. Denote por G o seu subgrupo de isometrias conformes. Já vimos que G é um grupo fuchsiano. O teorema 5.1.4 garante que a ação de G em H^2 tem o quociente $\frac{H^2}{G}$ homeomorfo a uma esfera tirando três pontos remetentes as singularidades.*

Entendemos um elemento de $\frac{\tilde{D}}{G}$ como sendo a interseção de uma órbita $G(x)$, onde $x \in H^2$ com \tilde{D} .

Uma vez que a área do quociente é induzida pela área hiperbólica (ver [1][Cap. 6]), o teorema 4.4.1 afirma que, em particular, para qualquer domínio fundamental localmente finito, tem-se

$$h - \text{área}(D) = h - \text{área}\left(\frac{H^2}{G}\right).$$

Seja G um grupo fuchsiano não elementar com região de Nielsen N . Uma vez que $N \subset H^2$ e N é G invariante, a métrica induzida no quociente garante que

$$h - \text{área}\left(\frac{N}{G}\right) \leq h - \text{área}\left(\frac{H^2}{G}\right).$$

Além disso, dado qualquer polígono fundamental convexo P tem-se $P \cap N \neq \emptyset$ e, pela invariância de N pela ação de G tem-se que $P \cap N$ e suas G imagens tessalam N . Respeitando ainda que $h - \text{área}(P \cap N) = h - \text{área}\left(\frac{N}{G}\right)$ pela métrica induzida. Assim, dados dois polígonos fundamentais convexos P_1 e P_2 de G tem-se

$$h - \text{área}(P_1 \cap N) = h - \text{área}\left(\frac{N}{G}\right) = h - \text{área}(P_2 \cap N) \quad (5.4)$$

então podemos enunciar o seguinte corolário do teorema 5.1.3.

Corolário 5.1.1. *Suponha que existe um polígono P com um número finito de lados para um grupo fuchsiano G não elementar com região de Nielsen N . Então vale que para qualquer polígono fundamental convexo D de G tem um número finito de lados.*

Demonstração. Pela demonstração de (IV) \implies (II) na prova do teorema 5.1.3, tem-se que para o polígono P com número finito de lados vale $h - \text{área}(P \cap N) < \infty$. Agora, dado qualquer outro polígono fundamental convexo D tem-se pela equação (5.4) que

$$h - \text{área}(P \cap N) = h - \text{área}(D \cap N).$$

Assim, nosso grupo G satisfaz a hipótese (II) do teorema 5.1.3. E sabendo que (II) \implies (IV), o polígono fundamental convexo D possui um número finito de lados. □

Vamos agora tentar relacionar os grupos fuchsianos com as transformações de recobrimento. Vamos lembrar sua definição

Definição 5.1.3. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um recobrimento. Um automorfismo $f : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ de π é chamado de transformação de recobrimento. Denotamos por $G(\pi)$ o grupo das transformações de recobrimento*

Observamos que, como um automorfismo $f \in G(\pi)$ se define como um homeomorfismo de \tilde{X} em si mesmo que satisfaz $\pi \circ f = \pi$. Agora, seja G um grupo fuchsiano agindo em H^2 que não possua elementos elípticos. Então para todo $z \in H^2$ existe uma vizinhança aberta, a saber o polígono de Dirichlet centrado em z , tal que $g(D(z)) \cap D(z) = \emptyset$ para todo $g \in G \setminus \{Id\}$. Assim, é possível concluir algumas informações sobre grupos fuchsianos advindas do estudo de grupos fundamentais.

Proposição 5.1.1. *Seja G um grupo agindo sobre um espaço topológico X tal que para cada $x \in X$ exista uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x tal que toda imagem $g(U)$ para $g \in G \setminus \{Id\}$ são disjuntas de U . Então:*

- a *O mapa quociente $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$, $\pi(z) = G(z)$ é um espaço de recobrimento normal.*
- b *O grupo G é um grupo de transformações de deck do espaço de recobrimento $p : X \rightarrow \frac{X}{G}$, se X é conexo por caminhos.*
- c *Se X é conexo por caminhos e localmente conexo então grupo G é isomorfo ao quociente do grupo fundamental de $\frac{X}{G}$ por $p_*(\pi_1(X))$, onde $p_*(\pi_1(X))$ é a imagem do homomorfismo induzido $p_* : \pi_1(X, x) \rightarrow \pi_1\left(\frac{X}{G}, G(x)\right)$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5] na página 72. □

No parágrafo antes da proposição, já vimos que os grupos fuchsianos G sem elementos elípticos satisfazem as hipóteses da proposição 5.1.1. Considerando $X = H^2$ que é um conjunto simplesmente conexo, podemos aplicar a proposição. Vejamos os exemplos

Exemplo 5.1.2. *Considere o grupo fuchsianos agindo em H^2 gerado por $\langle f \rangle$, onde f é um elemento parabólico ou hiperbólico. O grupo fundamental de $\frac{H^2}{G}$ é isomorfo*

a \mathbb{Z} pois como H^2 é simplesmente conexo temos que $\pi_1(H^2)$ é sempre trivial então o item (c) da proposição 5.1.1 diz que $\langle f \rangle \simeq \pi_1\left(\frac{H^2}{G}\right)$. Como $\langle f \rangle \simeq \mathbb{Z}$, tem-se $\mathbb{Z} \simeq \pi_1\left(\frac{H^2}{G}\right)$.

Considerações Finais

Este trabalho teve por fim apresentar um estudo sobre a geometria de grupos fuchsianos. Para isso, foi usado como base para a construção do trabalho o livro *The Geometry of Discrete Groups* de Allan Beardon que conta com um grau de generalidade dos resultados que permite ir além do que aqui será apresentado.

Demostramos aqui, através do teorema de Poincaré, que no plano hiperbólico sempre é possível construir uma tesselação com um polígono com r lados. Além disso, fizemos um estudo aprofundado sobre as propriedades geométricas que possuem os polígonos fundamentais convexos.

O primeiro capítulo apresenta os conceitos gerais por trás das transformações de Möbius e o plano complexo estendido para no capítulo seguinte sermos capazes de entender os dois modelos da geometria hiperbólica que trabalhamos e suas isometrias. Apresentamos que os grupos fuchsianos como subgrupos discretos dos grupos de isometrias desses modelos e finalmente estudamos seus polígonos fundamentais. Encerramos o trabalho estudando a relação entre o número de lados de um polígono fundamental e a quantidade de geradores de um grupo fuchsiano.

Um dos objetivos deste trabalho foi preparar o autor para estudar no futuro o Teorema de Rigidez de Mostow que essencialmente afirma que a geometria de uma variedade hiperbólica completa de volume finito de dimensão maior que dois é determinada pelo grupo fundamental e, portanto, única. Um próximo passo possível é estender os resultados aqui apresentados a dimensões maiores que dois, através dos grupos Kleinianos e relacionar este conteúdo com grupos fundamentais e superfícies de Riemann.

Referências Bibliográficas

- [1] Beardon, Alan F.[1983 - Springer-Verlag] The Geometry of Discrete Groups.
- [2] Lima, Elon L [1977 - IMPA]. Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento.
- [3] Neto, Alcides L [2016 - IMPA]. Funções de uma variável complexa.
- [4] Cohen, Paula B; Itzykson, Claude; e Wolfart, Jürgen [1994 - Communications in mathematical physics - Pg. 605:627]. Fuchsian triangle groups and Grothendieck dessins. Variations on a theme of Belyi.
- [5] Hatcher, Allen. <https://pi.math.cornell.edu/hatcher/AT/AT.pdf>Algebraic Topology[2001]. Algebraic Topology.
- [6] Nunes, Euderley de Castro. <https://tede.ufam.edu.br/handle/tede/4247A> ESFERA DE RIEMANN: PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA E APLICAÇÕES, UMA ABORDAGEM PARA O ENSINO MÉDIO. Dissertação de Mestrado [2015 - UFAM].
- [7] Stahl, Saul. [1993 - Jones & Bartlett Learning] The Poincare Half-Plane: A Gateway to Modern Geometry.