Universidade Federal Fluminense

Regularidade nos espaços $L^p(\Omega)$ para a Equação do Calor

Gabriel Corrêa Cavalcanti Peçanha

Niterói

Mês Ano

Regularidade nos espaços $L^p(\Omega)$ para a Equação do Calor

Gabriel Corrêa Cavalcanti Peçanha

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal Fluminense como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Juan Bautista Límaco Ferrel
Coorientador: Laurent Marcos Prouvée

Niterói

Março 2023

*Lnnn*p *Sobrenome, Nome*

Título do trabalho, que pode ser grande / *nome do autor*; *nome do orientador*, orientador. Niterói, *ano*.
nn fl.

Tipo de trabalho (*curso*)–Universidade Federal Fluminense, Niterói, *ano*.

1. *Assunto*. 2. *Assunto*. 3. *Assunto*. 4. *Assunto*. I. *Sobrenome, Nome do orientador*. II. Universidade Federal Fluminense. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título

CDD –

Dissertação de Mestrado da Universidade Federal Fluminense

por

Gabriel Corrêa Cavalcanti Peçanha

apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática como requesito parcial para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática

Título da tese:

Título da tese: pode ser curto ou pode ser longo

Defendida publicamente em xx de Intercalare de 5781.

Diante da banca examinadora composta por:

Juan Bautista Límaco Ferrel	UFF	Orientador
Laurent Marcos Prouvée	UERJ	Coorientador
Carlos Guzman Jimenez	UFF	Examinador
André da Rocha Lopes	UERJ	Examinador
Reginaldo Demarque	UFF	Examinador

DECLARAÇÃO DE CIÊNCIA E CONCORDÂNCIA DO(A) ORIENTADOR(A)

Autor(a) da Tese/Dissertação: Gabriel Corrêa Cavalcanti Peçanha
Data da defesa: xx/xx/xxxx
Orientador(a): Juan Límaco

Para os devidos fins, declaro **estar ciente** do conteúdo desta **versão corrigida** elaborada em atenção às sugestões dos membros da banca examinadora na sessão de defesa do trabalho, manifestando-me **favoravelmente** ao seu encaminhamento e publicação no **Repositório Institucional da UFF**.

Niterói, xx/xx/xx.

Juan Bautista Límaco Ferrel

Opcional para esta e aquela pessoa
e ainda outra pessoa

AGRADECIMENTOS

Agradeço a mim mesmo (ou a mais gente). Esta parte é opcional

Agradecimento às agências de fomento — esta parte **NÃO É OPCIONAL!**

Todas as teses devem ter o seguinte agradecimento:

> O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPEsS) - Código de Financiamento 001.

No caso de bolsa CAPES, sugere-se acrescentar um agradecimento à CAPES pela bolsa. No caso de bolsas de outras agências deve ser verificada quais as regras da agência em particular. Em geral, sugere-se o seguinte: Esse trabalho foi apoiado com uma bolsa de mestrado/doutorado da/do nome da agência, número do processo da bolsa. Outra possibilidade e agradecer a agência em questão a bolsa, mencionando o número do processo ao final.

RESUMO

O objetivo principal desta dissertação é estudar a regularidade nos espaços $L^p(\Omega)$ para a equação:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(x,t) - \triangle u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \phi, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto aibitrário.

Usando a teoria de Semigrupos provaremos a estimativa:

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ||\phi||_{L^p(\Omega)}.$$

ABSTRACT

The main objective of this dissertation is to study the regularity in spaces $L^p(\Omega)$ for the equation:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(x,t) - \triangle u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = \phi, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ is an arbitrary set.

Using semigroup theory we will prove the estimate:

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ||\phi||_{L^p(\Omega)}.$$

Lista de Tabelas

Sumário

CAPÍTULO 1

Preliminares

O objetivo principal deste trabalho é estudar as propriedades de regularidade nos espaços $L^p(\Omega)$ para a equação do calor, que nós estabeleceremos, no capítulo 5. Para isto, introduzimos a teoria de semigrupos para provar a Boa Colocação para Equações Diferênciais Ordinárias num espaço de Banach X, da forma

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad \forall t \geq 0; \\ u(0) = x, \quad x \in D(A). \end{cases}$$

1.1 Operadores Lineares Limitados

Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços vetoriais normados sobre $\mathbb{K}$.

- Um operador linear $A : D(T) \subset E \to F$ é **limitado** se existe $c > 0$, tal que

$$\|A(x)\|_F \leq c\|x\|_E, \forall x \in D(A) \subset E.$$

- Um operador $A : D(A) \subset E \to F$ é **contínuo** em $x_0 \in D(A)$, se:
  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$, tal que

$$x \in D(A) \text{ e } \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow \|A(x) - A(x_0)\|_F < \varepsilon.$$

Verifica-se que as duas definições acima são equivalentes.

Observação 1. *O conjunto de todos os operadores lineares limitados de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$, isto é,*

$$\mathcal{L}(E, F) = \{A : E \to F \mid A \text{ é linear e limitado}\}.$$

Neste caso, para $A \in \mathcal{L}(E, F)$, a norma $\|A\|_{L(E,F)}$ é dada por:

$$\|A\|_{L(E,F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{\|A(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Lema 1. *Se $A \in L(E, F)$ então $\|Ax\|_F \leq \|A\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E, \forall x \in E$.*

Assim como para operadores lineares, um **funcional linear** $f : D(f) \subset E \to \mathbb{K}$ é dito **limitado** se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$.

O conjunto de todos os funcionais lineares limitados em E é um espaço normado com a norma dada por

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{\substack{x \in E \\ x \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_E}. \tag{1.1}$$

Além disso, este espaço é chamado **espaço dual** de E e denotado por E^*.

Assim, $E^* = L(E, \mathbb{K})$.

Para um operador $A : D(A) \subset X \to X$, definimos o **gráfico** de A em $X \times X$ por

$$Gr(A) = \{(x, f) : x \in D(A), f = Ax\}.$$

Um operador $A : D(A) \subset X \to X$ é dito **fechado** se $Gr(A)$ é um subconjunto fechado de $X \times X$.

Ao longo do trabalho usaremos as seguintes notações:

- O conjunto **domínio** de A será denotado por $D(A)$.
- A **imagem** de A será denotado por $Im(A)$ ou $R(A)$.
- O **núcleo** de A será $N(A) = \{u \in D(A)/Au = 0\}$.

Observação 2. *Os conjuntos $Im(A)$ e $N(A)$ são subespaços de X. E o conjunto $Gr(A)$ é um subespaço de $X \times X$. Se $Gr(A)$ é fechado em $X \times Y$, dizemos que A é um operador fechado.*

Teorema 1 (Prolongamento de aplicações lineares contínuas)**.** *Sejam X um espaço normado, $D \subset X$ um subespaço vetorial denso e Y um espaço de Banach. Se $A : D \to Y$ é uma aplicação linear contínua, então existe uma única aplicação contínua $T : X \to Y$ tal que $T|_D = A$ e esta aplicação é linear.*

Teorema 2. *Sejam E e F espaços normados. Se $T \in \mathcal{L}(E, F)$, então $Gr(T)$ é fechado.*

Demonstração. Se T é um operador linear e limitado, logo T é contínuo.

Se $(x, y) \in \overline{G(T)}$, então existe uma sequência $(x_n, y_n)_n$ em $G(T)$ tal que $(x_n, y_n)_n \longrightarrow (x, y)$ com $y_n = T(x_n) \longrightarrow T(x)$ já que T é contínuo. Por unicidade $T(x) = y$ e $(x, y) \in G(T)$.

Portanto, $G(T)$ é um conjunto fechado. □

Proposição 1. *Sejam X e Y espaços de Banach, $E \subset X$, e seja $(F_\lambda)_\lambda$ uma família limitada em $\mathcal{L}(X, Y)$. Se $\lim\limits_{\lambda \to 0} F_\lambda x = 0$, para todo $x \in E$, então o resultado vale para todo $x \in \overline{E}$, ou seja, $\lim\limits_{\lambda \to 0} F_\lambda x = 0$, para todo $x \in \overline{E}$.*

Demonstração. Seja $x \in \overline{E}$ e considere uma sequência $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \longrightarrow x$, se $n \to \infty$.

Existe $C > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, nós temos

$$\begin{aligned} \|F_\lambda x\| &= \|F_\lambda x - F_\lambda x_n + F_\lambda x_n\| \\ &= \|F_\lambda(x - x_n) + F_\lambda x_n\| \\ &\leq C\|x - x_n\| + \|F_\lambda x_n\| \end{aligned}$$

Dado $\varepsilon > 0$, nós temos $C\|x - x_{n_0}\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, para n_0 suficientemente grande.

E por hipótese, nós temos $\|F_\lambda x_{n_0}\| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$, se λ for suficientemente pequeno.

Portanto, $\lim\limits_{\lambda \to 0} F_\lambda x = 0$ para todo $x \in \overline{E}$. $\square$

1.2 Espaços L^p

Denotamos por $L^1(\Omega)$ o espaço das funções integráveis $f : \Omega \to \mathbb{R}$ com a norma

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

Seja $p \in \mathbb{R}$ com $1 < p < \infty$. Definimos

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Teorema 3 (Primeira Desigualdade de Young). *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então em quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$, a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável em $\mathbb{R}^N$ e definimos*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)g(y)\, dy.$$

Além disso, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Teorema 4 (Segunda Desigualdade de Young). *Seja N um inteiro positivo e considere $1 \leq p, q, r \leq \infty$, tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \geq 1$ e $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$, então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ e*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Teorema 5 (Teorema da Convergência Dominada em L^p). *Seja $(f_n)_n$ uma sequência de funções mensuráveis que convergem pontualmente quase sempre em E para f. Para $1 \leq p < \infty$, suponha que existe uma função $g \in L^p(E)$ tal que para todo n, $|f_n| < g$ quase sempre em E. Então $\lim\limits_{n \to \infty} f_n = f$ em $L^p(E)$.*

Definição 1. *Sejam $p \in [1, \infty]$, $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $(X, \|.\|)$ um espaço de Banach. Denotamos por $L^p(I, X)$ o conjunto de funções mensuráveis $f : I \to X$ tal que a função $t \mapsto \|f(t)\|$ pertence a $L^p(I)$. Para $f \in L^p(I, X)$, definimos*

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^p(I,X)} &= \left(\int_I \|f(t)\|^p\, dt\right)^{1/p}, \quad \text{se } p < \infty \\
\|f\|_{L^p(I,X)} &= ess\sup_{t \in I} \|f(t)\|, \quad \text{se } p = \infty
\end{aligned}$$

Além disso, denotamos por $L^p_{loc}(I, X)$ o conjunto de funções $f : I \to X$ tais que $f|_J \in L^p(J, X)$, para todo subintervalo limitado J de I.

Observação 3. *As seguintes afirmações são válidas:*

1. *$L^p(I, X)$ é um espaço de Banach.*
2. *Uma função mensurável $f : I \to X$ pertence a $L^p(I, X)$ se, e somente se, existe uma função $g \in L^P(I)$ tal que $\|f\| \leq g$ quase sempre em I.*

Definição 2. *Seja $(X, \|.\|)$ um espaço de Banach. O espaço $C([0, T]; X)$ é formado por todas as funções contínuas $u : [0, T] \to X$ com*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} = \max_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\| < \infty$$

1.3 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto qualquer, m um número inteiro positivo e $1 \leq p \leq \infty$.

Considere α um multi-índice, isto é,

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$$

com

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \quad e \quad D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

onde u é uma função.

Definição 3. *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \ para \ \ |\alpha| \leq m\}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach quando munido da norma $\|.\|_{W^{m,p}}$ definida por

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < \infty$$

e quando $p = \infty$, define-se

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

No caso particular em que $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, denotado por $H^m(\Omega)$ $(m = 0, 1, \cdots)$.

Sua norma e seu produto interno são definidos por

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Definição 4. *Para $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$.*

Quando $p = 2$, denotamos $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$

Definição 5. *Denotamos por $H^{-1}(\Omega)$ o espaço dual de $H_0^1(\Omega)$. Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, definimos a norma*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup\{\langle f, u\rangle_{H^{-1}, H_0^1} \, / \, u \in H_0^1(\Omega), \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1\}$$

Sabemos que é possível identificar $L^2(\Omega)$ com o seu espaço dual, mas não é possível identificarmos $H_0^1(\Omega)$ com o seu dual. Na verdade tem-se,

$$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$$

onde estas inclusões são densas.

1.4 Exponencial

Agora veremos importantes propriedades da exponêncial de um operador linear limitado, que serão utilizados no Capítulo Semigrupos.

Considere X um espaço de Banach e $A \in \mathcal{L}(X, X)$. Denotamos e definimos a exponencial da matriz e^A por:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n.$$

As propriedades a seguir valem:

1. $\|e^{tA}\|_{\mathcal{L}(X)} \leq e^{|t| \|A\|_{\mathcal{L}(X)}}$.
2. Se $AB = BA$, então $e^{A+B} = e^A e^B$.
3. $\dfrac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} = e^{tA} A$, para todo $t \in \mathbb{R}$.
4. Para $t, s \in \mathbb{R}$, tem-se $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$.

Proposição 2. *Suponha que $A \in \mathcal{L}(X)$. Para todo $x \in X$, existe uma única solução $u \in C(\mathbb{R}; X)$ do seguinte problema :*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au(t), & \textit{para todo}\, t \in \mathbb{R} \\ u(0) = x. \end{cases}$$

A solução é dada por $u(t) = e^{tA} x$, para $x \in \mathbb{R}$.

CAPÍTULO **2**

Operadores Acretivos e m-Acretivos

2.1 Definições e Propriedades elementares

Ao longo desta seção, assuma que X é um espaço de Banach, munido da norma $\|.\|$.

Agora, vamos começar o estudo de operadores lineares que não estão definidos em todo o espaço X, mas sim num subconjunto $D(A)$ de X

Definição 6 (Operador Acretivo)**.** *Um operador A em um espaço X é chamado **acretivo** se*

$$\|x + \lambda Ax\| \geq \|x\|,$$

para todo $x \in D(A)$ e para todo $\lambda > 0$.

Definição 7. *Um operador A é dito **m-acretivo** se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *A é acretivo.*

(ii) $\forall \lambda > 0$ *e* $\forall f \in X, \exists x \in D(A) : x + \lambda Ax = f$

Lema 2. *Se operador A é m-acretivo em X, então para todo $\lambda > 0$ e para todo $f \in X$, existe uma única solução $x \in D(A)$ da equação*

$$x + \lambda Ax = f.$$

Além disso, $\|x\| \leq \|f\|$. Em particular, dado $\lambda > 0$, a aplicação $f \mapsto x$ é uma contração $X \to X$, e $X \to D(A)$ é uma aplicação injetiva.

Demonstração. Sejam $x, y \in D(A)$ duas soluções da equação. Daí, $(x - y) + \lambda A(x - y) = 0$.

Sendo A acretivo, tem-se

$$\|(x - y) + \lambda A(x - y)\| \geq \|x - y\|,$$

o que implica $x = y$.

Portanto, a solução é única. □

Definição 8. *Seja A um operador m-acretivo em X. Dado $\lambda > 0$, a aplicação $f \mapsto x$ definida no Lema 2 é denotada por J_λ e é dada explicitamente por $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$. J_λ é chamado de resolvente de A. Neste caso temos que $J_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, $\|J_\lambda\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ e $Im(J_\lambda) = D(A)$.*

Observação 4. *Segue da definição 8 que* $\lambda A J_\lambda x + J_\lambda x = x$.

Proposição 3. *Se* A *é um operador m-acretivo em* X*, então o* $Gr(A)$ *é fechado em* $X \times X$.

Demonstração. Como o operador $J_1 \in \mathcal{L}(X)$, temos pelo Teorema 2 que o gráfico abaixo é fechado:

$$Gr(J_1) = \{(f,x) \in X \times X : \quad f \in D(J_1) = X, \quad x = J_1 f = (I + \lambda A x)^{-1} f\}$$

Como $Im(J_1) = D(A)$, temos que o conjunto $\{(x,f) \in X \times X / x \in D(A), f = x + Ax\}$ é fechado em $X \times X$.

Portanto, o conjunto $\{(x,f) \in X \times X : x \in D(A), f = Ax\}$ é fechado em $X \times X$. □

Proposição 4. *Seja* E *um espaço de Banach e* $F \subset E$*. Então,* F *é fechado em* $E \iff F$ *é um espaço de Banach com a norma induzida de* E.

Demonstração. Suponha que F um espaço de Banach e tome $(x_n)_n$ uma sequência em F tal que $x_n \to x \in E$. Então $(x_n)_n$ é sequência de Cauchy em F, e portanto convergente, pois F é um espaço completo por hipótese. Então, existe então $y \in F$ tal que $x_n \to y$. Pela unicidade do limite temos $x = y \in F$, provando assim que F é fechado em E.

Reciprocamente, suponha que F é fechado em E e seja $(x_n)_n$ uma sequência de Cauchy em F. Logo $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em E, e portanto existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$. Como F é fechado resulta que $x \in F$, o que prova que F é completo. □

Corolário 1. *Seja* A *um operador m-acretivo em* X.

Para cada $x \in D(A)$*, sejam*

- $\|x\|_{D(A)} = \|x\| + \|Ax\|$
- $|||x|||_{D(A)} = \|x + Ax\|$
- $\|(x,y)\|_{X \times Y} = \|x\| + \|y\|$

Segue que:

(i) $||x||_{D(A)}$ *é uma norma em* $D(A)$ *e* $(D(A), ||x||_{D(A)})$ *é um espaço de Banach. Neste caso,* $\|x\|_{D(A)}$ *é chamada de norma do gráfico.*

(ii) $D(A) \hookrightarrow X$ *com a norma do gráfico do item anterior.*

(iii) A restrição de A *para* $D(A)$*, dada por* $D(A) \mapsto X$ *é contínua com a norma do gráfico. Além disso,* $||A||_{\mathcal{L}(D(A),X)} \leq 1$.

(iv) $|||.|||_{D(A)}$ *é uma norma equivalente em* $D(A)$.

(v) J_1 *é um isomorfismo de* X *para* $D(A)$ *(com a norma do gráfico).*

Demonstração. Verifica-se que $||x||_{D(A)}$ é uma norma em $D(A)$. Agora defina a função

$$g : D(A) \to Gr(A),$$

dada por $g(x) = (x, Ax)$. Verifica-se que g é uma bijeção linear.

Além disso, $\|g(x)\|_{X\times X} = \|x\|_{D(A)}$ implica que g e sua inversa são contínuas. Portanto, g é uma isometria (preserva a completude).

Temos que o $Gr(A)$ é um conjunto fechado pela Proposição 3.

Como $Gr(A) \subset X \times X$ e $X \times X$ é de Banach, nós temos pela Proposição 4 que $Gr(A)$ é também um espaço de Banach com a norma induzida de $X \times X$.

Sendo g uma isometria e $Gr(A)$ um espaço de Banach, então $D(A)$ é um espaço de Banach.

O item (ii) segue da desigualdade $\|x\| \leq \|x\|+\|Ax\| = \|x\|_{D(A)}$, enquanto (iii) segue da desigualdade $\|Ax\| \leq \|x\|_{D(A)}$.

Como $R(J_1) = D(A)$, podemos escrever $|||J_1x|||_{D(A)}$.

Assim, $|||J_1x|||_{D(A)} = \|J_1(x) + AJ_1x\| = \|x\|$. Portanto, J_1 é uma isometria de X sobre $D(A)$ munido da norma equivalente $|||.|||_{D(A)}$. □

Corolário 2. *Se A é um operador m-acretivo em X, então:*

1. $\|J_1x\|_{D(A)}$ *define uma norma em X, a qual é equivalente a norma original $\|.\|$.*

2. $J_\lambda \in \mathcal{L}(X, D(A))$*, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. 1. Segue do Corolário 1 que $|||J_1x|||_{D(A)} = \|x\|$ e a norma $|||.|||_{D(A)}$ é equivalente a norma do gráfico. Logo, 1 está provado.

2. Dados $\lambda > 0$ e $x \in X$, nós temos $\lambda AJ_\lambda = x - J_\lambda x$; e logo,

$$\|J_\lambda x\|_{D(A)} = \|J_\lambda x\| + \|AJ_\lambda x\| = \|J_\lambda x\| + \frac{1}{\lambda}\|x - J_\lambda x\| \leq \left(1 + \frac{2}{\lambda}\right)\|x\|.$$

□

Definição 9. *Seja A um operador m-acretivo em X, e considere J_λ . Para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, definamos $A_\lambda x \in X$ por $A_\lambda x = AJ_\lambda x$. Chamaremos A_λ de aproximação de Yosida de A.*

Lema 3. *Sejam A um operador m-acretivo em X, e considere A_λ da definição anterior. As seguintes propriedades são válidas:*

1. $A_\lambda x = \dfrac{x - J_\lambda x}{\lambda}, \quad \forall x \in X.$

2. $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ *e* $||A_\lambda||_{\mathcal{L}(X)} \leq \dfrac{2}{\lambda}, \quad \forall \lambda > 0$

3. $A_\lambda x = J_\lambda Ax, \quad \forall x \in D(A)$

4. $(J_\lambda)|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A))$ *e* $||(J_\lambda)|_{D(A)}||_{\mathcal{L}D(A)} \leq 1, \quad \forall \lambda > 0$

5. A_λ *é um operador m-acretivo.*

Demonstração. 1. Sabemos que $J_\lambda x + \lambda AJ_\lambda x = x$ e $A_\lambda x = AJ_\lambda x$, logo $A_\lambda x = \dfrac{x - J_\lambda x}{\lambda}$.

2. É imediato.

3. Se $x \in D(A)$ e $z = J_\lambda x$, então
$$z + \lambda A z = x.$$
Como x e z pertencem ao $D(A)$, segue-se que $Az \in D(A)$ e que
$$Az + \lambda A(Az) = Ax$$
Agora tome $w = J_\lambda A x$. Sendo
$$w + \lambda A w = Ax,$$
nós temos
$$(w - Az) + \lambda(w - Az) = 0.$$
Como A é um operador m-acretivo, segue-se que $w = Az$. Portanto, $AJ_\lambda x = J_\lambda A x$.

4. Se $x \in D(A)$, então
$$||J_\lambda x||_{D(A)} = ||J_\lambda x|| + ||AJ_\lambda x|| = ||J_\lambda x|| + ||J_\lambda A x|| \leq ||x|| + ||Ax|| = ||x||_{D(A)}.$$
Agora seja $\mu > 0$. Dado $x \in X$, segue do item 1 que
$$x + \mu A_\lambda x = \Big(1 + \frac{\mu}{\lambda}\Big)x - \frac{\mu}{\lambda} J_\lambda x.$$
Logo,
$$\|x + \mu A_\lambda x\| \geq \Big(1 + \frac{\mu}{\lambda}\Big)\|x\| - \frac{\mu}{\lambda}\|J_\lambda x\| \geq \Big(1 + \frac{\mu}{\lambda}\Big)\|x\| - \frac{\mu}{\lambda}\|x\| = \|x\|.$$
Portanto, A_λ é acretivo. Como $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, segue que A_λ é m-acretivo.

□

O objetivo da próxima proposição é mostrar que o operador J_λ é uma boa aproximação da identidade, e que o operador A_λ que é limitado, é uma boa aproximação para o operador não limitado A, se $\lambda \downarrow 0$.

Proposição 5. *Seja A um operador m-acretivo em X. Se $D(A)$ é denso em X, então*

(i) $||J_\lambda x - x|| \leq \lambda ||Ax||, \quad \forall \lambda > 0, \quad \forall x \in D(A)$

(ii) $||J_\lambda x - x|| \longrightarrow 0, \quad \forall x \in X.$

(iii) $||A_\lambda x - Ax|| \longrightarrow 0, \quad \forall x \in D(A).$

(iv) $||J_\lambda x - x||_{D(A)} \longrightarrow 0, \quad \forall x \in D(A).$

Demonstração. (i) Seja $x \in D(A)$. Como $J_\lambda x - x = -\lambda A_\lambda x$, então pelo Lema 3 (iii)
$$||J_\lambda x - x|| = \lambda ||A_\lambda x|| = \lambda ||J_\lambda A x|| \leq \lambda ||Ax||.$$

(ii) Note que $||J_\lambda - I||_{L(X)} \leq 2$ e $||J_\lambda x - x|| \longrightarrow 0, \forall x \in D(A)$.

Aplicando a Proposição 1 com $E = D(A)$, segue que $||J_\lambda x - x|| \longrightarrow 0, \forall x \in \overline{D(A)} = X$

(iii) Dado $x \in D(A)$, temos de (ii) que $||J_\lambda(Ax) - (Ax)|| \longrightarrow 0$. Como $J_\lambda A x = A_\lambda x$, obtemos (iii).

(iv) Se $x \in D(A)$,segue de (ii) e (iii) que

$$||J_\lambda x - x||_{D(A)} = ||J_\lambda x - x|| + ||A(J_\lambda x - x)|| = ||J_\lambda x - x|| + ||AJ_\lambda x - Ax|| \longrightarrow 0$$

□

Teorema 6 (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Seja (E, d) um espaço métrico completo e considere $f : E \to E$ uma função de Lipschtiz contínua com constante de Lipschtiz L. Se $L < 1$, então f tem um único ponto fixo.*

Proposição 6. *Se A é um operador acretivo em X, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é m-acretivo;

(ii) Existe $\lambda_0 > 0$ tal que para todo $f \in X$, existe uma solução $x \in D(A)$ da equação $x + \lambda_0 Ax = f$

Demonstração. Em particular, (i)$\Rightarrow$ (ii).

Por outro lado, suponha que (ii) é verdadeiro. Sendo A acretivo, segue da propriedade (ii) que dado $f \in X$, existe um $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda_0 Ax = f$ e $\|x\| \leq \|f\|$.

A aplicação $f \mapsto x$ é contínua $X \to X$, e sua norma é ≤ 1. Denotaremos essa aplicação linear por $J = (I + \lambda_0 Ax)^{-1}$.

Sejam $\lambda > 0$ e $f \in X$. Note que, multiplicando a equação

$$x + \lambda Ax = f \tag{2.1}$$

por $\dfrac{\lambda_0}{\lambda}$ e depois somando x em ambos os lados de (2.1), tem-se

$$x + \lambda_0 Ax = x + \frac{\lambda_0}{\lambda} f - \frac{\lambda_0}{\lambda} x.$$

Logo, a equação (2.1) é equivalente a

$$x + \lambda_0 Ax = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) x.$$

E a última equação é equivalente a

$$x = F(x),$$

onde

$$F(x) = J\Bigg(\frac{\lambda_0}{\lambda} f + \Big(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big) x\Bigg).$$

Além disso,

$$\|F(x) - F(y)\| \leq \Big|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}.\Big| \|Jx - Jy\| \leq \Big|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\Big|.\|x - y\|,$$

implica que F é uma função Lipschitz contínua $X \to X$ com constante de Lipschitz $L \leq \Big|1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda}\Big|$.

Daí, se $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$, então $L < 1$; e segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que existe $x \in X$ tal que $F(x) = x$.

Portanto, para todo $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2}$ e para todo $f \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda Ax = f$.

Repetindo esse argumento n vezes, segue que para todo $\lambda > \dfrac{\lambda_0}{2^n}$ e para todo $f \in X$, existe $x \in D(A)$ tal que $x + \lambda Ax = f$. Como n é arbitrário, o resultado segue. □

Observação 5. *Seja A um operador acretivo em X. Com o objetivo de verificar se A é m-acretivo, precisamos somente resolver a equação $x + \lambda Ax = f$ para todo $f \in X$ e algum $\lambda > 0$.*

Em particular, se $A \in \mathcal{L}(X)$ é acretivo, então A é m-acretivo

Corolário 3. *Sejam A e B dois operadores em X. Se $R(I + A) = X$, B é acretivo e $Gr(A) \subset Gr(B)$, então $A = B$ e A é m-acretivo.*

Demonstração. Sejam $(x, f) \in Gr(B)$ e $g := f + x$. Daí, $x \in D(B)$ e $g = Bx + x$. Como $R(I + A) = X$, existe $y \in D(A)$ tal que $y + Ay = g$.

Além disso, $y \in D(B)$ tal que $y + By = g$ pois $Gr(A) \subset Gr(B)$.

Em particular, $(x - y) + B(x - y) = 0$. Como B é acretivo temos

$$||(x - y) + B(x - y)|| \geq ||x - y||.$$

Portanto, $x = y$. Segue que $x \in D(A)$ e $Ax = f$, isto é, $(x, f) \in Gr(A)$. Assim, $A = B$.

Como A acretivo e $R(I + A) = X$, temos pela Proposição 6 que A é m-acretivo □

Corolário 4. *Sejam A e B dois operadores m-acretivos em X. Se $Gr(A) \subset Gr(B)$, então $A = B$.*

Demonstração. Prova similar com a anterior: Trocar $R(I + A) = X$ pela definição de A m-acretivo tomando $\lambda = 1$. □

2.2 Restrição de um operador m-acretivo

Teorema 7. *Seja A um operador m-acretivo em X com domínio denso e considere X_1 o espaço de Banach $(D(A), ||.||_{D(A)})$. O operador $A_{(1)}$ em X_1 definido por*

$$D(A_{(1)}) = \{x \in X_1 : Ax \in X_1\}, \quad A_{(1)} = Ax, \forall x \in D(A_{(1)})$$

é m-acretivo em X_1 e $D(A_{(1)}$ é denso em X_1.

Demonstração. Considere $x \in D(A_{(1)})$, $f \in X_1$ e $\lambda > 0$ tais que

$$x + \lambda A_{(1)} x = f.$$

Em particular,

$$x + \lambda Ax = f \tag{2.2}$$

Segue que $Ax \in D(A)$ e que

$$Ax + \lambda A(Ax) = f. \tag{2.3}$$

Sendo A acretivo, segue de (2.2) e (2.3) que $||x|| \leq ||f||$ e que $||Ax|| \leq ||Af||$.

Daí, $||x||_{X_1} = ||x|| + ||Ax|| \leq ||f|| + ||Af|| = ||f||_{X_1} = ||x + \lambda Ax||_{X_1}$. Portanto, $A_{(1)}$ é acretivo em X_1.

Agora sejam $\lambda > 0$ e $f \in X_1$, e tome $x = J_\lambda f$. Logo, $x + \lambda Ax = f$ e $x \in D(A)$.

Em particular, $Ax \in D(A)$, isto é, $x \in D(A_{(1)})$ e

$$x + \lambda A_{(1)} x = f.$$

Logo, $A_{(1)}$ é um operador m-acretivo.

Dado $x \in X_1$, tome $x_\lambda = J_\lambda x$. Verifica-se como acima que $x_\lambda \in D(A_{(1)})$. Além disso, segue da Proposição 5 (iv) que

$$x_\lambda \longrightarrow x, \quad \text{em} \quad X_1.$$

Assim mostramos que dado um ponto $x \in X_1$, existe uma sequencia $(x_\lambda) \subset D(A_{(1)})$ tal que $||x_\lambda - x||_{D(A)} \longrightarrow 0$, ou seja, $D(A_{(1)})$ é denso em X_1. □

Observação 6. *Algumas observações sobre o Teorema 7.*

(i) Podemos construir uma família $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de espaços de Banach, iterando o Teorema 7 tal que

$$\cdots \hookrightarrow X_{n+1} \hookrightarrow X_n \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow X_0 = X,$$

onde todas as inclusões são densas, e a família $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de operadores tais que $A_{(n)}$ é m-acretivo em X_n com domínio X_{n+1} e $A_{(n)}x = Ax$ para todo $x \in X_{n+1}$.

Observação 7. *Dado um operador A em X, podemos definir as potências de A. O operador A^2 é dado por*

$$D(A^2) = \{x \in D(A) : Ax \in D(A)\}, \quad A^2x = A(Ax), x \in D(A^2)$$

Generalizando, definimos o operador A^n, para $n \geq 2$ por

$$D(A^n) = \{x \in D(A^{n-1}) : A^{n-1}x \in D(A)\}, \quad A^n x = A(A^{n-1}x), x \in D(A^n).$$

Verifica-se que o espaço X_n definido na Observação 6 coincide com $D(A^n)$, e que as normas destes espaços são equivalentes se $D(A^n)$ está munido com a norma $||x||_{D(A^n)} = \sum_{j=0}^{n} ||A^j x||$.

2.3 Operadores m-acretivos em espaços de Hilbert

Nesta seção, assuma que X é um espaço de Hilbert, e o seu produto interno será denotado por $(.\,,\,.)$.

O seguinte lema caracteriza os operadores acretivos.

Lema 4. *Seja A um operador linear em X. As seguintes propriedades são equivalentes.*

(i) A é acretivo;

(ii) $(Ax, x) \geq 0, \quad \forall x \in D(A)$.

Demonstração. Suponha que A é acretivo, isto é, $||x + \lambda Ax|| \geq ||x||, \quad \forall x \in D(A), \quad \forall \lambda > 0$.

Assim,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{\|x+\lambda Ax\|^2 - \|x\|^2}{2\lambda} &= \frac{(x+\lambda Ax, x+\lambda Ax) - (x,x)}{2\lambda} \\ &= \frac{(x,x) + 2\lambda(Ax,x) + \lambda^2(Ax,Ax) - (x,x)}{2\lambda} \\ &= (Ax,x) + \frac{\lambda}{2}\|Ax\|^2 \end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \downarrow 0$, nós obtemos $(Ax, x) \geq 0$.

Agora, suponha que (ii) é verdadeiro. Dados $\lambda > 0$ e $x \in D(A)$, temos

$$\|x + \lambda Ax\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2\|Ax\|^2 \geq ||x||^2.$$

Portanto, A é um operador acretivo. $\square$

Corolário 5. *Se A é um operador m-acretivo em X, então $D(A)$ é denso em X.*

Demonstração. Para provar que $D(A)$ é denso em X, basta mostrar que o interior de $D(A)^\perp = \emptyset$.

Seja z um elemento do complemento ortogonal de $D(A)$ e considere $x = J_1 z \in D(A)$. Temos

$$0 = (z, x) = (x + 1.Ax, x) = (x, x) + (Ax, x) \geq \|x\|^2.$$

Logo $x = 0$. Sendo J_1 injetora e linear, temos que $z = 0$.

Portanto $D(A)^\perp = \emptyset$. $\square$

Observação 8. *Verifica-se que os espaços X_n definidos na Observação 6 são todos espaços de Hilbert. Em particular, o produto interno em X_1 é definido por*

$$(x, y)_{X_1} = (x, y) + (Ax, Ay), \quad \forall x, y \in X_1$$

2.4 Operador Adjunto

Sejam $(H_1, (.,.)_1)$ e $(H_2, (.,.)_2)$ espaços de Hilbert. Seja $A : H_1 \to H_2$ um operador linear tal que $D(A)$ é denso em H_1. Seja

$$D(A^*) = \{y \in H_2 \,/\, \exists u \in H_1 : \, (Ax, y)_2 = (x, u)_1, x \in D(A)\}.$$

Pelo Teorema de Riesz, um elemento $y \in H_2$ pertence a $D(A^*)$ se, e somente se, a aplicação $x \mapsto (Ax, y)_2$ é um funcional linear contínuo em $(D(A), ||.||)$, ou equivalentemente, existe uma constante $C_y > 0$ tal que $|(Ax, y)_2| \leq C_y ||x||_1$ para todo $x \in D(A)$.

Como $D(A)$ é denso em H_1, o elemento $u \in H_1$ satisfazendo $(Ax, y)_2 = (x, u)_1$ para todo $x \in D(A)$ é unicamente determinado por y.

Portanto, tomando $T^* y = u$, nós obtemos uma aplicação bem definida A^* de H_2 para H_1. Verifica-se que A^* é linear.

Definição 10. *O operador linear A^* é chamado de operador adjunto de A. Pela definição vista anteriormente nós temos*

$$(Ax, y)_2 = (x, A^* y)_1 \quad \forall x \in D(A), y \in D(A^*).$$

Lema 5. *Seja A um operador linear de H_1 sobre H_2 tal que $D(A)$ é denso em H_1. Então o operador A^* é fechado.*

Demonstração. Seja $(y_n) \subset D(A^*)$ uma sequência tal que $y_n \longrightarrow y$ em H_2 e $A^* y_n \longrightarrow v$ em H_1. Para $x \in D(A)$, temos

$$(Ax, y_n) = (x, A^* y_n) \longrightarrow (Ax, y) = (x, v),$$

$y \in D(A^*)$ e $v = A^* y$. Isso termina a prova. $\square$

Lema 6. *Se A é um operador em X com domínio denso e A^* é a sua adjunta, então:*

$$Gr(A^*) = \{(x, f) \in X \times X : (f, y) = (x, g), \forall (y, g) \in Gr(A)\}$$

Demonstração. Seja $Z = \{(x, f) \in X \times X : (f, y) = (x, g), \forall (y, g) \in Gr(A)\}$. Note que $g = Ay$ e $y \in D(A)$.

Se $(x, f) \in Z$, então $(f, y) = (x, Ay), \forall y \in D(A)$. Daí,

$$|(x, Ay)| \leq ||f||.||y||, \quad \forall y \in D(A).$$

Então $f = A^*x$ e pela definiçao de $D(A^*)$ tem-se que $x \in D(A^*)$. Portanto $Z \subset Gr(A^*)$.

Por outro lado, dado $x \in D(A^*)$, tome $f = A^*x$. Temos

$$(f, y) = (A^*x, y) = (x, Ay), \quad \forall x \in D(A).$$

Isto implica que

$$(f, y) = (x, g), \quad \forall (y, g) \in Gr(A).$$

Logo $Gr(A^*) \subset Z$.

Portanto, $Z = Gr(A^*)$.

□

Proposição 7. *Se A é um operador m-acretivo em X, então*

(i) A^* *é m-acretivo em* X.

(ii) $(I + \lambda A^*)^{-1} = ((I + \lambda A)^{-1})^*, \quad \forall \lambda > 0.$

(iii) $(A^*)_\lambda = (A_\lambda)^*, \quad \forall \lambda > 0.$

(iv) $\exp^{-t(A^*)_\lambda} = exp^{(-tA_\lambda)^*}, \quad \forall \lambda > 0$ *e* $\forall t \in \mathbb{R}$

Demonstração. Sejam $x \in D(A^*)$ e $\lambda > 0$. Pelo lema 3 (i) e como $(x, J_\lambda x) \leq ||x||.||x||$, nós temos

$$(A^*x, J_\lambda x) = (x, AJ_\lambda x) = (x, A_\lambda x) = \left(x, \frac{x - J_{\lambda x}}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}\{||x||^2 - (x, J_\lambda x)\} \geq 0.$$

Fazendo $\lambda \downarrow 0$, segue do lema 4 que A^* é acretivo.

Considere $\lambda > 0$ e defina $L_\lambda = ((I + \lambda A)^{-1})^* \in L(X)$. Sejam $z \in X$ e $x = L_\lambda z$. Para todo $(y, g) \in Gr(A)$, temos $g = Ay$ e

$$\begin{aligned}
(x, g) &= \frac{1}{\lambda}\{(x, y + \lambda g) - (x, y)\} = \frac{1}{\lambda}\{(L_\lambda z, (I + \lambda A)y) - (x, y)\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\{(z, L^*_\lambda (I + \lambda A)y) - (x, y))\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\{(z, (I + \lambda A)^{-1}(I + \lambda A)y) - (x, y)\} \\
&= \frac{1}{\lambda}\{(z, y) - (x, y)\} \\
&= \frac{1}{\lambda}(z - x, y)
\end{aligned}$$

Daí, e pelo Lema 6 temos que $\left(x, \dfrac{z - x}{\lambda}\right) \in Gr(A^*)$.

Consequentemente, $x \in D(A^*)$ e $\dfrac{z-x}{\lambda} = A^*x. \quad (x + \lambda A^*x = z)$

Portanto, A^* é m-acretivo em X.

Além disso, $x + \lambda A^*x = z = L_\lambda x = ((x+\lambda A)^{-1})^*x$. E isto prova (ii).

Aplicando o lema 3, tem-se

$$(A^*)_\lambda = \frac{I - (I + \lambda A^*)^{-1}}{\lambda} = \frac{I - ((I+\lambda A)^{-1})^*}{\lambda} = (A_\lambda)^*.$$

Com isso, provamos (iii).

$\square$

Proposição 8. *Seja A um operador fechado, acretivo em X e com domínio denso. Se $N(I + A^*) = \{0\}$, então A é m-acretivo. Em particulat, se A^* é acretivo, então A é m-acretivo.*

Demonstração. Temos

$$\{0\} = N(I + A^*) = N((I+A)^*) = (R(I+A))^\perp.$$

Logo, $R(I+a)$ é denso em X, isto é, $\overline{R(I+A)} = X$.

Provemos que $R(I+A)$ é fechado em X. Seja $(f_n)_n \subset R(I+A)$ uma sequência tal que $f_n \longrightarrow f$ em X. Temos $f_n = x_n + Ax_n$, onde $x_n \in D(A)$.

Como $\|x_n + \lambda Ax_n\| \geq \|x_n\|$, segue que (x_n) é uma sequencia de Cauchy em X. Tome x o seu limite. Note que (Ax_n) é uma sequencia de Cauchy em X.

Sendo $Gr(A)$ um conjunto fechado, segue que $x \in D(A)$ e que $f = (I+A)x$, logo $R(I+A)$ é fechado em X, isto é, $\overline{R(I+A)} = R(I+A)$.

Portanto, $R(I+A) = X$. Segue da Proposição 6 que A é m-acretivo.

Agora, suponha que A^* é acretivo em X, isto é, $||x + 1A^*x|| \geq ||x||, \forall x \in D(A^*)$.

Daí, $(I + A^*)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, logo $N(I + A^*) = \{0\}$.

Como A é um operador fechado e $N(I + A^*) = \{0\}$, prova-se de modo análogo, que A é m-acretivo. $\square$

Definição 11. *Um operador A em X densamente definido é autoadjunto se $A = A^*$.*

Corolário 6. *Seja A um operador densamente definido em X.*

(i) Se $A = -A^*$, então A e $-A$ são m-acretivos e $(Ax, x) = 0$ para todo $x \in D(A)$.

(ii) Se A é auto-adjunto e acretivo, então A é m-acretivo.

Demonstração. (i) Se $x \in D(A)$, então $(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, -Ax)$. Logo, $(Ax, x) = 0$. Em particular, segue do Lema 4 que A e $-A$ são acretivos. Como $-Gr(A) = Gr(A^*)$ é fechado pelo Lema 6, propriedade (i) segue da Proposição 8.

(ii) Por hipótese temos $A^* = A$ é acretivo. Além disso, $Gr(A) = Gr(A^*)$ é fechado pelo Lema 5. Aplicando a Proposição 8, segue que A é m-acretivo. $\square$

Corolário 7. *Se A é um operador m-acretivo em X, então as seguintes propriedades são equivalentes:*

(i) A é auto-adjunto;

(ii) $(Ax, y) = (x, Ay), \quad \forall x \in D(A)$.

Demonstração. Suponha que A é autoadjunto. Então, $Gr(A) = Gr(A^*)$. Pelo Lema 6, obtemos (ii).

Agora, assuma que (ii) é verdadeiro. Isso implica que $Gr(A) \subset Gr(A^*)$. Seja $(x, f) \in Gr(A^*)$, e tome $g = x + f = x + A^*x$.

Como A é um operador m-acretivo, existe $y \in D(A)$ tal que $g = y + Ay$.

Assim $Gr(A) \subset Gr(A^*) \Longrightarrow y \in D(A^*)$ e $g = y + A^*y$.

Além disso, $0 = (x - y) + A^*(x - y)$ e A^* é acretivo pela Proposição 7 (i). E consequentemente, $x = y$. Daí, $Gr(A^*) \subset Gr(A)$.

Portanto, $A = A^*$. $\square$

Corolário 8. *Seja A um operador m-acretivo, e considere os operadores $A_{(n)}$ definidos na Observação 6. Se A é autoadjunto, então $A_{(n)}$ é autoadjunto.*

Demonstração. Suponha que A é autoadjunto. Basta mostrar que $A_{(1)}$ é autoadjunto.

Dados $x, y \in D(A_{(1)})$, temos que

$$(A_{(1)}x, y)_{X_1} = (Ax, y) + (A(Ax), Ay).$$

Como A é autoadjunto, logo

$$(A_{(1)}y, x)_{X_1} = (Ay, x) + (A(Ay), Ax) = (y, Ax) + (Ay, A(Ax)).$$

Portanto, $(A_{(1)}y, x)_{X_1} = (A_{(1)}x, y)_{X_1}$. Como $A_{(1)}$ é m-acretivo em X_1, segue do Corolário 7 que $A_{(1)}$ é autoadjunto. $\square$

CAPÍTULO **3**

Semigrupos

Nesta seção, assuma que X é um espaço de Banach munido da norma $||.||$.

Lema 7. *Se A é um operador m-acretivo em X com um domínio denso, então para todo $\lambda > 0$, o operador $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $||e^{-tA_\lambda}||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$*, para todo* $t \geq 0$ *e para todo* $\lambda > 0$.

(ii) $||e^{-tA_\lambda}x - e^{-tA_\mu}x|| \leq t||A_\lambda x - A_\mu x||$, $\forall x \in X$, $\forall t \geq 0$ *e* $\forall \lambda, \mu > 0$.

Demonstração. Considere o operador J_λ (Definição 8), e seja $x \in X$. Pelo lema 3, tem-se

$$A_\lambda x = \frac{x - J_\lambda x}{\lambda}, \quad \forall x \in X.$$

Daí,

$$e^{-tA_\lambda}x = e^{\frac{-tI}{\lambda} + \frac{tJ_\lambda}{\lambda}}x = e^{\frac{-t}{\lambda}}e^{\frac{tJ_\lambda}{\lambda}}x,$$

e logo,

$$||e^{-tA_\lambda}x|| \leq e^{\frac{-t}{\lambda}}||e^{\frac{tJ_\lambda}{\lambda}}x|| \leq e^{\frac{-t}{\lambda}}e^{\frac{t||J_\lambda||_{\mathcal{L}(X)}}{\lambda}}||x|| \underbrace{\leq}_{||J_\lambda||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1} e^{\frac{-t}{\lambda}}e^{\frac{t}{\lambda}}||x|| \leq ||x||.$$

Assim, demonstramos o item (i).
Agora, consideremos $\lambda, \mu > 0$. Segue da definição e do Lema 3 que A_λ e A_μ comutam.
Então,

$$e^{-stA_\lambda}e^{-(1-s)tA_\mu}x = e^{-stA_\mu}e^{-st(A_\lambda - A_\mu)}x,$$

para todo $x \in X$, $t \geq 0$ e $s \in [0,1]$. Derivando a igualdade acima com relação a s, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\Big(e^{-stA_\lambda}e^{-(1-s)tA_\mu}x\Big) &= -te^{-tA_\lambda}e^{-st(A_\lambda - A_\mu)}(A_\lambda x - A_\mu x) \\ &= -te^{-stA_\lambda}e^{-(1-s)tA_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x). \end{aligned}$$

Além disso, segue da propriedade (i) que

$$\Big\|\frac{d}{ds}\Big(e^{-stA_\lambda}e^{-(1-s)tA_\mu}x\Big)\Big\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|e^{-tA_\lambda}x - e^{-tA_\mu}x\| &= \Big\| \int_0^1 \frac{d}{ds}\Big(e^{-stA_\lambda}e^{-(1-s)tA_\mu}x\Big)ds\Big\| \\
&\leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|,
\end{aligned}$$

e isto completa a prova. □

Corolário 9. *Seja A um operador m-acretivo em X, com o domínio denso. Dado $\lambda > 0$, considere o operador $A_\lambda \in \mathcal{L}(X)$. Então existe uma família $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ tal que*

(i) $||T(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0.$

(ii) $\lim\limits_{\lambda\downarrow 0} e^{-tA_\lambda}x = T(t)x$*, para todo $x \in X$, uniformemente em subconjuntos limitados de* $[0, \infty)$.

Demonstração. Seja $T_\lambda(t) = e^{-tA_\lambda}$. Pelo Lema 7 (i), temos

$$||T_\lambda(t)||_{\mathcal{L}(X)} \leq 1, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Se $x \in D(A)$, segue do Corolário 7 (ii) que

$$||e^{-tA_\lambda}x - e^{-tA_\mu}x|| \leq t||A_\lambda x - A_\mu x|| \leq t||A_\lambda x - Ax|| + t||Ax - A_\mu x||.$$

Além disso, pela Proposição 5 (iii) tem-se

$$||A_\lambda x - Ax|| \xrightarrow[\lambda\downarrow 0]{} 0$$

Fixado $T > 0$, temos que $T_\lambda(t)x$ é uma sequência de Cauchy em $C([0, T]; X)$, que é um espaço de Banach. Consequentemente, $T_\lambda(t)x$ converge uniformemente se $\lambda \downarrow 0$.

Defina $T(t)x = \lim\limits_{\lambda\downarrow 0} T_\lambda(t)x$. Verifica-se que $T(t)$ é uma aplicação linear $D(A) \to X$, pois $T_\lambda(t)$ e o limite são lineares. Além disso, segue de (3.1) que $||T(t)x|| \leq ||x||, \forall x \in D(A)$.

Como $D(A)$ é denso em X, temos que $T(t)$ pode ser prolongado a um operador de $\mathcal{L}(X)$, o qual nós também denotaremos por $T(t)$.

A propriedade (ii) segue da Proposição 1 (se tomarmos $F_\lambda = T_\lambda(t) - T(t)$ e $E = D(A)$) , e a propriedade (i) segue de (3.1) . □

Observação 9. *Note que a aplicação $t \mapsto T(t)x$ pertence a $C([0, \infty); X)$ pois é o limite uniforme de funções contínuas.*

Proposição 9. *Seja A um operador m-acretivo em X, com domínio denso, e considere a família $(T(t))_{t\geq 0}$ construída no corolário anterior. Para cada $x \in D(A)$ e para todo $t \geq 0$, as seguintes propriedades são válidas:*

(i) $\dfrac{||T(t)x - x||}{t} \leq ||Ax||$*, para todo $t > 0$.*

(ii) A aplicação $t \mapsto T(t)x$ pertence a $C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); X)$

(iii) $AT(t)x = T(t)Ax$, *para todo* $t \geq 0$.

Além disso, $u(t) = T(t)x$ *é a única solução do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad \forall t \geq 0; \\ u(0) = x \end{cases}$$

no espaço $C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X)$.

Demonstração. Seja $x \in D(A)$. Com a notação vista no Corolário 9 , sejam $u(t) = T(t)x$, $u_\lambda(t) = T_\lambda(t)x$ e $v_\lambda(t) = -u'_\lambda(t) = A_\lambda u_\lambda(t) = T_\lambda(t)A_\lambda x$.

Temos,

$$\begin{aligned} v_\lambda(t) - T(t)Ax &= T_\lambda(t)A_\lambda x - T_\lambda(t)Ax + T_\lambda(t)Ax - T(t)Ax \\ &= T_\lambda(t)(A_\lambda x - Ax) + (T_\lambda(t)Ax - T(t)Ax) \end{aligned}$$

Pelo Corolário 9 e pela Proposição 5 (iii), tem-se

$$||v_\lambda(t) - T(t)Ax|| \leq ||A_\lambda x - Ax|| + ||T(t)Ax - T_\lambda(t)Ax|| \underset{\lambda \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

uniformemente em intervalos limitados.

Pela identidade $v_\lambda(t) = -u'_\lambda(t)$ temos que

$$u_\lambda(t) = x - \int_0^t v_\lambda(s)ds.$$

Fazendo $\lambda \downarrow 0$, obtemos

$$u(t) = x - \int_0^t T(s)Axds.$$

Consequentemente, $u \in C^1([0,\infty), X)$ e que

$$\frac{du}{dt} = -T(t)Ax \tag{3.2}$$

Segue também que,

$$\frac{T(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\,ds,$$

$$\frac{||T(t)x - x||}{t} \leq \frac{1}{t}(t-0)||T||.||Ax|| \leq ||Ax||.$$

Agora, seja $w_\lambda(t) = J_\lambda u_\lambda(t)$. Segue do Corolário 2 e da Proposição 5 (ii) que $w_\lambda(t) \in D(A)$ e

$$w_\lambda(t) \underset{\lambda \downarrow 0}{\longrightarrow} u(t), \quad \forall t \geq 0,$$

respectivamente. Note também que $Aw_\lambda(t) = v_\lambda(t)$. Logo,

$$(w_\lambda(t), Aw_\lambda(t)) \underset{\lambda \downarrow 0}{\longrightarrow} (u(t), T(t)Ax)$$

em $X \times X$. Como o $Gr(A)$ é fechado (Proposição 3), segue que $u(t) \in D(A)$, e que

$$Au(t) = T(t)Ax. \tag{3.3}$$

Assim nós obtemos as propriedades $u \in C([0,\infty); D(A))$ e $AT(t)x = T(t)Ax$.

Também pelas identidades (3.2) e (3.3) temos que u é solução do problema.

Falta apenas provar a unicidade da solução.

Seja $u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), X)$ uma solução do problema.

Dado $t > 0$, seja

$$z(s) = T(t-s)u(s)$$

para $s \in [0,t]$. Segue que $z \in C([0,t]; D(A)) \cap C^1([0,t]; X)$ e que

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{ds} = -\frac{dT(t-s)}{ds}u(s) + T(t-s)\frac{du}{ds} &= T(t-s)Au(s) + T(t-s)\frac{du}{ds} && (3.4)\\
&= T(t-s)\Big(\frac{du}{ds} + Au\Big) = 0 && (3.5)
\end{aligned}$$

Daí, $z(t) = z(0)$. Isto implica que $u(t) = T(t)x$. Como $t > 0$ é arbitrário, o resultado segue.

□

Definição 12 (Semigrupos das Contrações)**.** *Seja X um espaço de Banach. Uma família $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é dito um semigrupo de contrações se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $T(0) = I$.

(ii) $T(t+s) = T(t)T(s)$.

(iii) a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua $[0,\infty) \to X$ para todo $x \in X$.

(iv) $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$*, para todo $t \geq 0$.*

Proposição 10. *Sejam X um espaço de Banach e $(T(t))_{t\geq 0}$ é uma família de operadores lineares limitados em X que satisfazem as propriedades (i) e (ii) da definição anterior. Se*

$$\lim_{t\downarrow 0} T(t)x = x, \forall x \in X,$$

então a aplicação $t \mapsto T(t)x$ é contínua $[0,\infty) \to X$ para todo $x \in X$.

Demonstração. Sejam $t, h \geq 0$. A continuidade de $t \mapsto T(t)x$ segue de

$$\|T(t+h)x - T(t)\| \leq \|T(t)\|\|T(h)x - x\| \leq C\|T(h)x - x\| \longrightarrow 0$$

e para $t \geq h \geq 0$ tem-se

$$\|T(t-h)x - T(t)x\| \leq \|T(t-h)\|\|x - T(h)x\| \leq C\|x - T(h)x\| \longrightarrow 0.$$

□

Exemplo 1. *Considere $C_u(\mathbb{R})$ o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Neste espaço defina a norma*

$$\|u\| = \sup_{t\in\mathbb{R}} |u(t)|.$$

Verifica-se que com esta norma que $C_u(\mathbb{R})$ é um espaço de Banach.

Em $C_u(\mathbb{R})$ defina, para cada $t \geq 0$ a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} T(t) : C_u(\mathbb{R}) & \to & C_u(\mathbb{R}) \\ u & \mapsto & T(t)u(x) = u(t+x). \end{array}$$

Para cada $t \geq 0$, $T(t)$ é um operador linear. Além disso, $T(t)$ é limitado pois,

$$\|T(t)u\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t+x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x)| = \|u\|.$$

Logo $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(C_u(\mathbb{R}))} = 1$. Isto verifica (iv).

Se $t = 0$, tem-se

$$T(0)u(x) = u(0+x) = u(x) \Rightarrow T(0) = I$$

Dados $t, s \geq 0$ nós temos,

$$T(t)T(s)u(x) = T(t)u(s+x) = u(t+s+x) = T(t+s)u(x).$$

Portanto, $T(t)T(s) = T(t+s)$. Segue (ii).

Para verificar a proprieade (iii), basta provar que $\|T(t)u - u\| \to 0$.

Dado $u \in C_u(\mathbb{R})$, tem-se

$$\|T(t)u - u\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t+x) - u(x)| \to 0,$$

pois u é uniformemente contínua, obtendo assim a propriedade (iii).

Definição 13. *Seja $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de contrações. O gerador G de $(T(t))_{t\geq 0}$ é um operador linear em X definido por*

- $D(G) = \left\{x \in X : \dfrac{T(t)x - x}{t}, \quad \text{tem um limite em } X \text{se } t \downarrow 0\right\}$
- $Gx = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{T(t)x - x}{t}, \quad \forall x \in D(A).$

Observação 10. *Decorre da Definição 12 que, para todo $x \in X$, a aplicação $t \mapsto ||T(t)x||$ é não crescente em $[0, \infty)$.*

De fato, dados $t, s \in [0, \infty)$ tem-se

$$s < t + s \Longrightarrow \|T(t+s)x\| = \|T(t)T(s)x\| \leq 1\|T(s)x\|.$$

Lema 8. *Se $f : [0, h] \to \mathbb{R}$ é conínua, então $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^h f(t)\, dt = f(0)$.*

Demonstração. Sendo f contínua, temos pelo Teorema do Valor Médio para integrais, que existe $c \in (0, h)$ tal que $\displaystyle\int_0^h f(t)dt = f(c)h$.

Fazendo $h \downarrow 0$, tem-se $c \downarrow 0$ e como f é contínua temos $f(c) \to f(0)$.

Portanto, $\lim\limits_{h\downarrow 0} \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^h f(t)\, dt = f(0)$. $\square$

Lema 9. *Seja* $(T(t))_{t\geq 0} \subset L(X)$ *um semigrupo de contrações . Se* $x \in X$ *e* $h > 0$*, então*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds = T(t)x.$$

Em particular,

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^{h} T(s)xds = x.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (T(s)x - T(t)x)ds \right\| \\
&\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \left\| (T(s)x - T(t)x) \right\| ds
\end{aligned}$$

Sendo $s \mapsto T(s)x$ conínua tem-se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists h > 0 : |s - t| < h \Rightarrow \|T(s)x - T(t)x\| < \epsilon$$

Assim, para h suficientemente pequeno temos

$$\left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)xds - T(t)x \right\| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \epsilon ds \leq \epsilon$$

□

Lema 10. $\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-t} T(t)xdt = x$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{h} \int_0^h e^{-t} T(t)xdt - x \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_0^h e^{-t} T(t)xdt - \frac{1}{h} \int_0^h T(t)xdt + \frac{1}{h} \int_0^h T(t)xdt - x \right\| \\
&\leq \left\| \frac{1}{h} \int_0^h (e^{-t} - 1) T(t)xdt \right\| + \left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(t)xdt - x \right\| \\
&\leq \|x\| \frac{1}{h} \int_0^h |(e^{-t} - 1)| dt + \left\| \frac{1}{h} \int_0^h T(t)xdt - x \right\|
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 8 e o Lema 9 no lado direito da desigualdade, obtemos o resultado. □

O próximo resultado será usado na demonstração da Proposição 11.

Lema 11. *Se* $(T(t))_{t\geq 0}$ *é um semigrupo de contrações em* X *e se* G *é o seu gerador, então as seguintes propriedades são válidas.*

(i) Dados $x \in X$ *e* $t > 0$*, seja* $I(t, x) = \int_0^t T(s)xds$*. Então,* $I(t, x) \in D(G)$ *e* $GI(t, x) = T(t)x - x$*.*

(ii) Dado $x \in X$*, seja* $Jx = \int_0^\infty e^{-t} T(t)xdt$*. Então,* $Jx \in D(G)$ *e* $Jx - GJx = x$*.*

Demonstração. Fixe $h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}I(t,x) &= \frac{T(h)I(t,x)}{h} - \frac{I(t,x)}{h} \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(h)T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t T(h+s)xds - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^t T(s)xds \\
&= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} T(u)xdu - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)xds
\end{aligned}$$

Fazendo $\lambda \downarrow 0$, pelo Lema 9 obtemos $GI(t,x) = T(t)x - x$ e $I(t,x) \in D(G)$.

Agora, resta provarmos o item (ii).

Dado $h > 0$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}Jx &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t}(T(h)T(t)x - T(t)x)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t}(T(t+h)x - T(t)x)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-(s-h)}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t}T(t)xdt \\
&= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-s+h}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-t}T(t)xdt
\end{aligned}$$

Para facilitar as contas, troquemos a variável de integração da última integral do lado direito por s. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{T(h)-I}{h}Jx &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-s+h}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds \\
&= \frac{e^h}{h}\int_h^\infty e^{-s}T(s)xds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds \\
&= \frac{e^h}{h}\Big(\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds - \int_0^h e^{-s}T(s)xds\Big) - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds \\
&= \frac{e^h-1}{h}\int_0^\infty e^{-s}T(s)xds - \frac{e^h}{h}\int_0^h e^{-s}T(s)xds
\end{aligned}$$

Fazendo $h \downarrow 0$, tem-se $\dfrac{e^h-1}{h} \to 1$ e $\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h e^{-s}T(s)xds \to x$.

Portanto, $GJx = Jx - x$ e $Jx \in D(G)$. □

Proposição 11. *Se $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de contrações em X e se G é o seu gerador, então $-G$ é m-acretivo e tem o domínio denso.*

Demonstração. Sejam $x \in D(G)$ e $\lambda, h > 0$. Temos

$$x - \lambda\frac{T(h)x - x}{h} = \Big(1 + \frac{\lambda}{h}\Big)x - \frac{\lambda}{h}T(h)x.$$

Assim,
$$\Big\|x-\lambda\frac{T(h)x-x}{h}\Big\| \geq \Big(1+\frac{\lambda}{h}\Big)\|x\|-\frac{\lambda}{h}\|x\| = \|x\|.$$

Fazendo $h \downarrow 0$, obtemos $\|x-\lambda Gx\| \geq \|x\|$.

Portanto, o operador $-G$ é acretivo.

Além disso, dado $f \in X$, seja $x = Jf$, onde J foi definido no Lema 11. Segue que $x \in D(G)$ e que $x - Gx = f$, isto é, $-G$ é m-acretivo.

Dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$, considere $x_\epsilon = \dfrac{1}{\epsilon}I(\epsilon, x)$ onde $I(\epsilon, x)$ também foi definido no Lema 11. Pelo Lema 9 temos $\lim\limits_{\epsilon\downarrow 0} x_\epsilon = x$ e pelo Lema 11 (i), tem-se $x_\epsilon \in D(G)$. Isto implica que $D(G)$ é denso em X. $\square$

Teorema 8. *Sejam X um espaço de Banach, $f \in C([0,T), X)$ com $T > 0$. Suponha que f é diferenciável pela direita para todo $t \in [0,T)$. Se $\dfrac{d^+f}{dt} \in C([0,T), X)$, então $f \in C^1([0,t), X)$ e $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{d^+f}{dt}$.*

Demonstração. Defina
$$g(t) = f(t) - f(0) - \int_0^t \frac{d^+f}{dt}\, ds,$$
para todo $t \in [0,T)$.

Verifica-se, que $g \in C([0,T); X)$, $g(0) = 0$, g é diferenciável pela direita para todo $t \in [0,T)$ e $\dfrac{d^+g}{dt} = 0$.

Agora, dado $\psi \in X^*$, defina $h(t) = \langle \psi, g(t)\rangle_{X^*,X}$. Nós temos, $h \in C([0,T))$, $h(0) = 0$, h é diferenciável pela direita para todo $t \in [0,T)$ e $\dfrac{d^+h}{dt} = 0$.

Afirmação: $h \equiv 0$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, seja $h_\varepsilon(t) = h(t) - \varepsilon t$. Veremos que $h_\varepsilon(t) \leq 0$. Caso contrário, existe $t \in [0,T)$ tal que $h_\varepsilon(t) > 0$.

Seja $\tau = \inf\{t \in [0,T) \,/\, h_\varepsilon(t) > 0\}$. Nós temos $h_\varepsilon(\tau) = 0$, e existe sequência $t_n \downarrow \tau$ tal que $h_\varepsilon(t_n) > 0$.

Desta forma, segue que
$$\limsup_{t\downarrow\tau} \frac{h_\varepsilon(t) - h_\varepsilon(\tau)}{t-\tau} \geq 0.$$

Por outro lado, temos $\dfrac{d^+h_\varepsilon}{dt} = -\varepsilon$, o que é uma contradição.

Portanto, $h_\varepsilon(t) \leq 0$. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, nós temos $h(t) \leq 0$.

Aplicando o mesmo argumento para $-h$, nós obtemos que $h \geq 0$, o que implica $h \equiv 0$.

Portanto, dado $t \in [0,T)$, tem-se $\langle \psi, g(t)\rangle_{X^*,X} = 0$ para todo $\psi \in X^*$; e assim $g(t) \equiv 0$.

Com isso o resultado é válido. $\square$

Proposição 12. *Seja A um operador m-acretivo em X com domínio denso. A família $(T(t))_{t\geq 0} \subset \mathcal{L}(X)$ introduzida no Corolário 9 satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $(T(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

(ii) O gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$ é $-A$.

(iii) Se um semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$ admite $-A$ como o seu gerador, então $S(t) = T(t)$ para todo $t \geq 0$.

Demonstração. Pela definição de $T(t)$ temos $T(0) = I$.

Segue do Corolário 9 que $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq 1$ e $t \mapsto T(t)x$ é contínua $[0, \infty) \to X$, para todo $x \in X$.

Além disso, pela unicidade da solução do problema visto no Proposição 9 tem-se $T(t + s)x = T(t)T(s)x$, para todo $x \in D(A)$ e todo $s, t \geq 0$. ($u(t) = T(t)z$ com $z = T(s)x$ e $v(t) = T(t + s)x$ são 2 soluções). Sendo o $D(A)$ um conjunto denso, obtemos $T(t + s) = T(t)T(s)$. Logo (i).

Seja G o gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$, e considere $x \in D(A)$. Aplicando a Proposição 9, nós obtemos

$$T(t)x = x - \int_0^t T(s)Axds.$$

Daí,

$$\frac{T(t)x - x}{t} = -\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Axds.$$

Fazendo $t \downarrow 0$, segue do Lema 9 que $Gx = -Ax$ e $x \in D(G)$. Isto prova que $Gr(A) \subset Gr(-G)$.

Pela Proposição 11, temos que $-G$ é um operador m-acretivo. E como A é m-acretivo por definição, segue do Corolário 4 que $A = -G$. Portanto, o gerador de $(T(t))_{t\geq 0}$ é $-A$.

Agora, assuma que outro semigrupo de contrações $(S(t))_{t\geq 0}$ admite $-A$ como o seu gerador. Considere $x \in D(A)$, e tome $u(t) = S(t)x$.

Dados $t \geq 0$ e $h > 0$, temos

$$\frac{u(t + h) - u(t)}{h} = \frac{S(h) - I}{h}u(t) = S(t)\frac{S(h)x - x}{h} \xrightarrow[h\downarrow 0]{} -S(t)Ax$$

.

Segue que $u(t) \in D(A)$ e que $\dfrac{d^+u}{dt}$ existe, para todo $t \geq 0$ e que

$$-Au(t) = -S(t)Ax = \frac{d^+u}{dt}.$$

Note que podemos aplicar o Teorema 8 na função u.

Portanto, $\dfrac{d^+u}{dt} = \dfrac{du}{dt}$ e $u \in C([0, \infty), D(A)) \cap C^1([0, \infty), X)$, isto é, u é solução do problema visto na Proposição 9. Pela unicidade de solução temos que $T(t)x = S(t)x$, para todo $t \geq 0$. Usando um argumento de densidade, $T(t) = S(t)$. Isto completa a demonstração.

□

Aplicando as Proposições 11 e 12, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 9 (Teorema de Hille-Yosida)**.** *Um operador linear A em X é o gerador de um semigrupo de contrações em X se, e somente se, $-A$ é um operador m-acretivo com domínio denso.*

Proposição 13. *Seja A um operador m-acretivo em X, e considere $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado por $-A$. Se $T_{(1)}(t) = T(t)|_{D(A)}$ e se $A_{(1)}$ é o operador definido no então $(T_{(1)}(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações no $D(A)$ e o seu gerador é $-A_{(1)}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 9 que $T(t)$ é uma aplicação de $D(A)$ sobre o próprio $D(A)$. Além disso, se $t \geq 0$ e $x \in D(A)$, temos

$$\|T(t)x\|_{D(A)} = \|T(t)x\| + \|AT(t)x\| = \|T(t)x\| + \|T(t)Ax\| \leq \|x\| + \|Ax\| = \|x\|_{D(A)}.$$

Portanto, $T(t)|_{D(A)} \in \mathcal{L}(D(A))$ e $\|T(t)|_{D(A)}\|_{\mathcal{L}(D(A))} \leq 1$. Em particular, a definição de $(T_{(1)}(t))_{t\geq 0}$ faz sentido. Segue da Proposição 9 que $(T_{(1)}(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações em $D(A)$.

Seja L o seu gerador, e considere $x \in D(A_{(1)}) = D(A^2)$. Temos

$$\frac{T_{(1)}(h)x - x}{h} = \frac{T(h)x - x}{h} \xrightarrow[h\downarrow 0]{} -Ax,$$

em X. Além disso, $Ax \in D(A)$. Logo, pela Proposição 9 (iii)

$$A\frac{T_{(1)}(h)x - x}{h} = \frac{T_{(1)}(h)Ax - Ax}{h} \xrightarrow[h\downarrow 0]{} -A(Ax),$$

em X. Portanto,

$$\frac{T_{(1)}(h)x - x}{h} = \frac{T(h)x - x}{h} \xrightarrow[h\downarrow 0]{} -Ax,$$

em $D(A)$. Então, $x \in D(L)$ e $Lx = -Ax$, ou seja, $Gr(A_{(1)}) \subset Gr(-L)$. Como $-L$ e $A_{(1)}$ são m-acretivos no $D(A)$, segue do Corolário 4 que $A_{(1)} = -L$. □

Corolário 10. *Seja A um operador m-acretivo em X, e considere $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado por $-A$. Dado $n \in \mathbb{N}$, considere o espaço X_n e o operador $A_{(n)}$. Se $T_{(n)}(t) = T(t)|_{X_n}$ para $t \geq 0$, então $(T_{(n)}(t))_{t\geq 0})$ é um semigrupo de contrações em X_n e o seu gerador é $-A_{(n)}$.*

Demonstração. Segue da Proposição 6 e 13 . □

Corolário 11. *Seja A um operador m-acretivo em X, e considere os espaços $(X_n)_{n\geq 0}$ definidos na observação 6. Dado $x \in D(A)$, considere $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1([0,\infty); X)$ a solução do problema visto na Proposição 9. Se $x \in X_n$ para algum $n \geq 1$, então*

$$u \in \bigcap_{j=0}^{n} C_b^j([0,\infty); X_{n-j}). \tag{3.6}$$

Além disso,

$$\frac{d^j u}{dt^j} = (-1)^j T(t) A^j x = (-1)^j A^j u(t), \tag{3.7}$$

para todo $t \geq 0$ e para todo $0 \leq j \leq n$, e

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{d^j u}{dt^j}\Big) + A\Big(\frac{d^j u}{dt^j}\Big) = 0, \tag{3.8}$$

para todo $t \geq 0$ e todo $0 \leq j \leq n-1$.
Em particular, se $x \in \bigcap_{n\geq 0} D(A^n)$, nós temos $u \in C^\infty([0,\infty); X_n)$, para todo $n \geq 0$.

Observação 11. *Seja A um operador fechado em X, e suponha que X é reflexivo. Considere uma família $(x_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset D(A)$. Se $x_\varepsilon \rightharpoonup x$ em X se $\varepsilon \downarrow 0$, e se Ax_ε é limitada em X, então $x \in D(A)$ e $Ax_\varepsilon \rightharpoonup Ax$ se $\varepsilon \downarrow 0$.*

Demonstração. Do Teorema de Banach-Eberlein–Šmulian, existe uma sequência $\varepsilon_n \downarrow 0$ e $y \in X$ tal que $Ax_{\varepsilon_n} \rightharpoonup y$ em X, se $n \to \infty$.
Em particular, $(x_{\varepsilon_n}, Ax_{\varepsilon_n}) \rightharpoonup (x, y)$ em $X \times X$, se $n \to \infty$.
Por outro lado, como $Gr(A)$ é fechado em $X \times X$, este é também fechado para a topologia fraca de $X \times X$; e logo, $x \in D(A)$ e $y = Ax$. E mostra-se com o mesmo argumento que toda família $(Ax_\varepsilon)_\varepsilon \rightharpoonup Ax$. □

Teorema 10. *Seja A um operador autoadjunto e acretivo em X (Hilbert), e seja $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo das contrações gerado por $-A$. Para todo $x \in X$, a função $u(t) = T(t)x$ tem as seguintes propriedades:*

(i) $u \in C([0,\infty); X) \cap C((0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$ *e u é a única solução do problema*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

(ii) $\|Au(t)\| \leq \dfrac{1}{t\sqrt{2}}\|x\|$, *para todo $t > 0$.*

(iii) $(Au(t), u(t)) \leq \dfrac{1}{2t}\|x\|^2$ *para todo $t > 0$.*

(iv) Se $x \in D(A)$, então $\|Au(t)\|^2 \leq \dfrac{1}{2t}(Ax, x)$, *para todo $t > 0$.*

Demonstração. Seja $x \in X$, e tome $u(t) = T(t)x$. Dado $\lambda > 0$, considere o operador A_λ (aproximação de Yosida), e defina $u_\lambda(t) = e^{-tA_\lambda}x$. Segue da Proposição 7 e do Lema 3 que A_λ é autoadjunto e acretivo. Verifica-se que $(e^{-tA_\lambda})_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações para cada $\lambda > 0$ fixado. Da Observação 10, nós obtemos que a aplicação

$$t \mapsto \|u'_\lambda(t)\| = \|e^{-tA_\lambda}A_\lambda x\| \tag{3.9}$$

é não crescente.
Derivando a identidade $\|u_\lambda(t)\|^2 = (e^{-tA_\lambda}x, e^{-tA_\lambda}x)$ tem-se

$$\frac{d}{dt}\|u_\lambda(t)\|^2 = 2(-A_\lambda e^{-tA_\lambda}x, e^{-tA_\lambda}) = -2(A_\lambda u_\lambda, u_\lambda), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.10}$$

E derivado o lado direito da igualdade acima,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) &= (A_\lambda u'_\lambda(t), u_\lambda)(t) + (A_\lambda u_\lambda(t), u'_\lambda(t)) \\ &= (u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t)) + (A_\lambda u'_\lambda(t), u_\lambda(t)) \\ &= 2(u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t)) \\ &= 2(u'_\lambda(t), -u'_\lambda(t)) \\ &= -2\|u'_\lambda(t)\|^2. \end{aligned}$$

Assim, temos

$$\frac{d}{dt}(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) = 2(u'_\lambda(t), A_\lambda u_\lambda(t)) = -2\|u'_\lambda(t)\|^2, \quad \forall t \geq 0 \tag{3.11}$$

Segue de (3.11) que $(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))$ é uma função não crescente de variável t.
Inregrando (3.10) entre 0 e $t > 0$, nós obtemos

$$\int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds = -\frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u_\lambda(s)\|^2 ds = -\frac{1}{2}\Big(\|u_\lambda(t)\|^2 - \|u_\lambda(0)\|^2\Big) \leq \frac{\|x\|^2}{2}.$$

Sendo $(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))$ não crescente, temos

$$s < t \Longrightarrow \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds \geq \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))ds = t(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t))$$

Portanto,
$$t(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) \leq \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds \leq \frac{\|x\|^2}{2} \tag{3.12}$$
Aplicando (3.9) e integrando (3.11) entre 0 e t tem-se
$$s < t \Longleftrightarrow \int_0^t \|u'_\lambda(s)\|^2 ds \geq \int_0^t \|u'_\lambda(t)\|^2 ds = t\|u'_\lambda(t)\|^2$$
e
$$\begin{aligned}
\int_0^t 2\|u'_\lambda(s)\|^2 ds &= \int_0^t -\frac{d}{ds}(A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds \\
&= -\Big((A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) - (A_\lambda x, x)\Big) \\
&\leq (A_\lambda x, x),
\end{aligned}$$
onde a última desigualdade vem do Lema 4 (A_λ é acretivo $\Leftrightarrow (A_\lambda x, x) \geq 0.$)
Assim obtemos,
$$2t\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq \int_0^t 2\|u'_\lambda(s)\|^2 ds \leq (A_\lambda x, x). \tag{3.13}$$
Agora, multiplicando (3.11) por s e integrando,
$$\int_0^t s\frac{d}{ds}(A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds = \int_0^t 2s(u'_\lambda(s), A_\lambda u_\lambda(s))ds = -\int_0^t 2s\|u'_\lambda(s)\|^2 ds.$$
Daí,
$$\int_0^t s\|u'_\lambda(s)\|^2 ds = \|u'_\lambda(t)\|^2\frac{t^2}{2} - \int_0^t \frac{s^2}{2}\frac{d}{ds}\|u'_\lambda(s)\|^2 ds \geq \|u'_\lambda(t)\|^2\frac{t^2}{2}$$
e
$$\begin{aligned}
\int_0^t 2s\|u'_\lambda(s)\|^2 ds &= -\int_0^t s\frac{d}{ds}(A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds \\
&= -\Big(t(A_\lambda u_\lambda(t), u_\lambda(t)) - \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s)ds\Big) \\
&\leq \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds
\end{aligned}$$
Portanto,
$$t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq 2\int_0^t s\|u'_\lambda(s)\|^2 ds \leq \int_0^t (A_\lambda u_\lambda(s), u_\lambda(s))ds$$
Comparando a desigualdade acima com (3.12), nós obtemos
$$t^2\|u'_\lambda(t)\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x\|^2 \tag{3.14}$$
Considere $t > 0$. Segue do Corolário 9 e da Proposição 5 que
$$\lim_{\lambda\downarrow 0} J_\lambda u_\lambda(t) = u(t),$$
em X. Por outro lado, segue de (3.14) que $A(J_\lambda u_\lambda(t)) = -u'_\lambda(t)$ é limitada em X.
Aplicando a observação 11 (tomando $x_\epsilon = J_\lambda u_\lambda(t)$ e $x = u(t)$), encontramos $u(t) \in D(A)$ e $A_\lambda u_\lambda(t) \rightharpoonup Au(t)$, se $\lambda \downarrow 0$.

Aplicando a Proposição 9 com o valor inicial $u(\epsilon) \in D(A)$, para $\epsilon > 0$ arbitrário, e fazendo $\epsilon \downarrow 0$ tem-se $u(t) = T(t)x$ e

$$u \in C((0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$$

é a única solução do problema do valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

Em adição, se $(T(t))_{t\geq 0}$ um semigrupo, então $u \in C([0,\infty); X)$. Logo, (i) está provado.
Fazendo $\lambda \downarrow 0$ e usando a semicontinuidade fraca inferior da norma na desigualdade (3.14), nós temos

$$\begin{aligned} \|u'_\lambda(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2t^2}\|x\|^2 \\ \|Au(t)\|^2 \leq \liminf_{\lambda\downarrow 0} \|A_\lambda u_\lambda(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2t^2}\|x\|^2 \\ \|Au(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2t^2}\|x\|^2 \\ \|Au(t)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}t}\|x\|. \end{aligned}$$

Assim, obtemos (ii). O item (iii) segue da desigualdade (3.12) e da convergência fraca $A_\lambda u_\lambda(t) \rightharpoonup Au(t)$

$$(Au(t), u(t)) \leq \frac{1}{2t}\|x\|^2$$

Finalmente, se $x \in D(A)$, da desigualdade (3.13) obtemos o item (iv).

□

Observação 12. *Note que o Teorema 10 nos garante a existência e unicidade da solução para um $x \in X$, onde X é um espaço de Hilbert.*
Por outro lado, a Proposição 9 prova apenas para $x \in D(A)$.

Corolário 12. *Seja A um operador autoadjunto e acretivo em X. Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo das contrações gerado por $-A$, e considere os espaços $(X_n)_{n\geq 0}$. Dado $x \in X$ e tome $u(t) = T(t)x$. Então, $u \in C^\infty((0,\infty); X_n)$, para todo $n \geq 0$.*
Em adição,

$$\|A^n u(t)\| \leq \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{t^n}\|x\|. \tag{3.15}$$

Demonstração. Considere os operadores $A_{(n)}$ definidos na Observação 6. Segue do Corolário 8 e da Obs 6 que $A_{(n)}$ é um operador autoadjunto e acretivo em X_n. Suponha que $t > 0$. Segue do Teorema 10 que $u(\frac{t}{n}) \in X_1$ e

$$\left\|Au\left(\frac{t}{n}\right)\right\| \leq \frac{1}{\frac{t}{n}\sqrt{2}}\|x\| = \frac{n}{t\sqrt{2}}\|x\|$$

Agora, aplicaremos o Teorema 10 a cada operador da família $A_{(n)}$.
Segue da Proposição 13 que $(T_{(1)}(t))_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações no $D(A)$ gerado por $-A_{(1)}$. (lembe-se que $T_{(1)}(t) = T(t)|_{D(A)}$).
Sendo $A_{(1)}$ autoadjunto e acretivo em X_1 tem-se $u(2t/n) = T_{(1)}(t/n)u(t/n) \in D(A_{(1)}) = X_2$ e

$$\|A^2u(2t/n)\| = \|AT(t/n)Au(t/n)\| \leq \frac{n}{t\sqrt{2}}\|Au(t/n)\| \leq \frac{n}{t\sqrt{2}}\left(\frac{n}{t\sqrt{2}}\right)\|x\| = \left(\frac{n}{t\sqrt{2}}\right)^2\|x\|.$$

Por indução, nós obtemos $u(t) = u(nt/n) \in X_n$ e

$$\|A^n u(t)\| \leq \left(\frac{n}{\sqrt{2}}\right)^n \frac{1}{t^n} \|x\|.$$

Como $t > 0$ e n são arbitrários, o resultado segue do Corolário 11 aplicado a $u(t+\epsilon)$. (tome $x = u(t+\epsilon) \in \bigcap_{n\geq 0} D(A^n)$.) $\square$

CAPÍTULO 4

O Operador Laplaciano

Neste capítulo veremos importantes propriedades do operador Laplaciano. Os resultados a seguir são cruciais para o entendimento do último capítulo.

Lema 12. *Se $u \in H_0^1(\Omega)$ e $v \in L^2(\Omega)$, então*

$$\langle u, v\rangle_{H_0^1, H^{-1}} = \int_\Omega u(x) \cdot v(x) dx. \tag{4.1}$$

Além disso,

$$\|u\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_{L^2}, \tag{4.2}$$

para todo $u \in L^2(\Omega)$.
O $\triangle$ define um operador linear contínuo de $H^1(\Omega)$ para $H^{-1}(\Omega)$. Note que para $u \in H^1(\Omega)$, o $\triangle u \in H^{-1}(\Omega)$ sobre $H_0^1(\Omega)$ é definido por

$$\langle \triangle u, v\rangle_{H^{-1}, H_0^1} = -\int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx, \tag{4.3}$$

para $v \in H_0^1(\Omega)$.

O resultado a seguir é consequência do Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 11 (Lax-Milgram)**.** *Seja H um espaço de Hilbert munido da norma $\|.\|$ e considere o funcional bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$. Se existe $C < \infty$ e $\alpha > 0$ tais que*

(i) $|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|,$ *para todo* $(u,v) \in H \times H,$

(ii) $|a(u,u)| \geq \alpha\|u\|^2,$ *para todo* $u \in H.$

então, para todo $f \in H^*$ (espaço dual de H), a equação

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{H^*,H}, \text{ para todo } v \in H,$$

possui uma única solução $u \in H$.

Lema 13. *Dado $f \in H^{-1}(\Omega)$, existe uma única solução $u \in H_0^1(\Omega)$ da equação*

$$-\triangle u + u = f, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Além disso,

$$\|f\|_{H^{-1}} = \|u\|_{H^1}. \tag{4.4}$$

Em particular,

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{L^2}, \tag{4.5}$$

sempre que $f \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Utilizando a notação do Teorema de Lax-Milgram, considere $a(u,v) = (u,v)_{H^1}$ e $H = H_0^1(\Omega)$. Note que, $(u,v)_{H^1}$ satisfaz os itens (i) e (ii) do Teorema de Lax Milgram.
Agora, aplicando o Teorema tem-se, para todo $f \in H^{-1}(\Omega)$ existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(u,v)_{H^1} = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \tag{4.6}$$

E (4.6) é quivalente, por densidade, a equação

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv = \langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1}, \text{ para todo } v \in \mathcal{D}(\Omega),$$

que é equivalente a

$$-\triangle u + u = f, \text{ em } H^{-1}(\Omega).$$

Além disso, tomando $v = u$ em (4.6), temos

$$\|u\|_{H^1}^2 = (u,u)_{H^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}\|u\|_{H^1},$$

logo,

$$\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}.$$

Por outro lado, segue de (4.6) que

$$\langle f, v\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq \|u\|_{H^1}\|v\|_{H^1}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Daí,

$$\left\langle f, \frac{v}{\|v\|_{H^1}}\right\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq \|u\|_{H^1}, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Tomando o supremo nós obtemos, $\|f\|_{H^{-1}} \leq \|u\|_{H^1}$.
Portanto, $\|u\|_{H^1} = \|f\|_{H^{-1}}$.
E por fim, (4.5) é consequência de (4.2) e (4.4)

$$\|u\|_{H^1} = \|f\|_{H^{-1}} \leq \|f\|_{L^2}, \quad \forall f \in L^2(\Omega).$$

□

Observação 13. *Segue do Lema 13 que o operador* $-\triangle + I$ *define uma isometria de* $H_0^1(\Omega)$ *sobre* $H^{-1}(\Omega)$.

Os exemplos a seguir são importantes no estudo da equação do calor.

Exemplo 2. *Sejam* Ω *um subconjunto de* $\mathbb{R}^N$ *e* $X = H^{-1}(\Omega)$. *Defina o operador* A *sobre* X *como*

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(\Omega) \\ Au = -\triangle u, \quad \forall u \in D(A) \end{cases} \tag{4.7}$$

O espaço $H_0^1(\Omega)$ *é munido da norma usual* $\|u\|_{H_0^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}$.

Proposição 14. *O operador A definido em* (4.7) *é autoadjunto, acretivo, e $\|.\|_{D(A)}$ é equivalente a $\|.\|_{H^1}$. Em particular, A é m-acretivo com o domínio denso.*

Demonstração. Segue-se do Lema 13 que para todo $f \in X$, existe um único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$-\triangle u + u = f,$$

em X. Denotemos por J o operador $f \mapsto u$. Segue da Observação 13 que J é uma isometria de X sobre $H_0^1(\Omega)$. Em particular,

$$(u, v)_{H^{-1}} = (Ju, Jv)_{H_0^1}. \tag{4.8}$$

Sejam $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Segue das identidades (4.1) e (4.3) que

$$\begin{aligned}
(u, Jv)_{H_0^1} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (Jv) dx + (u, Jv)_{L^2} \\
&= \langle u, -\triangle (Jv) \rangle_{H_0^1, H^{-1}} + \langle u, Jv \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = \langle u, v \rangle_{H_0^1, H^{-1}} = (u, v)_{L^2}.
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (4.8) que

$$\begin{aligned}
(-\triangle u, v)_{H^{-1}} &= (-\triangle u + u, v)_{H^{-1}} - (u, v)_{H^{-1}} \\
&= (J(-\triangle u + u), J(v))_{H_0^1} - (u, v)_{H^{-1}} \\
&= (-\triangle (Ju) + Ju, Jv)_{H_0^1} - (u, v)_{H^{-1}} = (u, Jv)_{H_0^1} - (u, v)_{H^{-1}}
\end{aligned}$$

Como $(u, Jv)_{H_0^1} = (u, v)_{L^2}$, então

$$(-\triangle u, v)_{H^{-1}} = (u, Jv)_{H_0^1} - (u, v)_{H^{-1}} = (u, v)_{L^2} - (u, v)_{H^{-1}}. \tag{4.9}$$

Em particular, para cada $u \in H_0^1(\Omega)$, nós temos

$$(Au, u)_{H^{-1}} = (u, u)_{L^2} - (u, u)_{H^{-1}} = \|u\|_{L^2}^2 - \|u\|_{H^{-1}}^2 \geq 0,$$

devido a desigualdade (4.2); e logo, A é acretivo, pelo Lema 4.

Dado $f \in X$, segue das observações anteriores que $u = Jf \in D(A)$ e que $u + Au = f$. Portanto, A é m-acretivo (Proposição 6). Consequentemente, o $D(A)$ é denso pelo Corolário 5.
Agora, segue da identidade (4.9) que $(Au, v)_{H^{-1}} = (u, Av)_{H^{-1}}$, para todos $u, v \in D(A)$. Aplicando o Corolário 7, segue que A é autoadjunto.
Finalmente, segue do Corolário 1 que $\|u\|_{D(A)} \approx \|u + Au\|_{H^{-1}}$, em $D(A)$. E pela Observação 13, nós obtemos $\|u\|_{D(A)} \approx \|u\|_{H_0^1}$, em $D(A)$. □

Observação 14. *Segue da Proposição 14 e do Teorema 9 (Hille-Yosida) que, $-A$ é o gerador de um semigrupo de contrações em $H^{-1}(\Omega)$, o qual nós denotaremos por $(T(t))_{t \geq 0}$.*

Em geral o semigrupo é desconhecido. Apenas o seu gerador está disponível para que possamos estudar as suas propriedades.

Exemplo 3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $X = L^2(\Omega)$.*
Defina o operador B em X por

$$\begin{cases} D(B) = \{u \in H_0^1(\Omega); \triangle u \in L^2(\Omega)\} \\ Bu = -\triangle u \end{cases} \tag{4.10}$$

Proposição 15. *O operador* B *definido em* (4.10) *é autoadjunto e acretivo. Em particular,* B *é m-acretivo com o domínio denso. Em adição,* $D(B) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Sejam $u, v \in D(B)$. Segue das identidades (4.1) e (4.3) que

$$(Bu, v)_{L^2} = (-\triangle u, v)_{L^2} = -\langle v, \triangle u\rangle_{H_0^1, H^{-1}} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v. \tag{4.11}$$

Em particular, $(Bu, u)_{L^2} \geq 0, \forall u \in D(B)$. Portanto, B é acretivo pelo Lema 4.
Dado $f \in L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$, temos pelo Lema 13 que existe $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$u - \triangle u = f, \quad \text{em } H^{-1}.$$

Em particular, $\triangle u = u - f \in L^2(\Omega)$; e logo, $u \in D(B)$ e $u + Bu = f$. Portanto, B é m-acretivo pela Proposição 6.
Além disso, segue de (4.11) que

$$(Bu, v)_{L^2} = (u, Bv)_{L^2}, \quad \forall u, v \in D(B).$$

Do Corolário 7, nós temos que B é autoadjunto.
Dado $u \in D(B)$, segue-se de (4.11) que

$$\|u\|_{H_0^1}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u\|_{L^2}^2 + (Au, u)_{L^2} \leq \|u\|_{D(B)}\|u\|_{L^2} \leq 4\|u\|_{D(B)}^2.$$

Portanto, $D(B) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$. □

Observação 15. *Segue da Proposição 15 e do Teorema de Hille-Yosida que,* $-B$ *é o gerador de um semigrupo de contrações em* $L^2(\Omega)$*, o qual denotaremos por* $(S(t))_{t\geq 0}$.

Observação 16.

Lema 14. *Com as notações acima,* $T(t)x = S(t)x$ *para todo* $t \geq 0$ *e todo* $x \in L^2(\Omega)$.

Demonstração. Por definição, $T(t) : H^{-1}(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ e $S(t) : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ são contínuas. Em particular, são contínuas $L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$.
Como $D(B) \subset D(A)$ tem-se,

$$\begin{aligned} Gr(B) &= \{(u, Bu) = (u, -\triangle u) \,: u \in D(B)\} \\ &\subset \{(u, Au) = (u, -\triangle u) \,: u \in D(B)\} \\ &\subset \{(u, Au) = (u, -\triangle u) : u \in D(A)\} \\ &\subset Gr(A). \end{aligned}$$

Além disso, como $T(t)$ e $S(t)$ coincidem em $D(B)$, e este é denso em $L^2(\Omega)$, o resultado segue.

□

CAPÍTULO 5

A Equação do Calor

Iniciamos com a equação do calor homogênea, estudando a existência, unicidade e regularidade da solução.

Neste capítulo, Ω é um aberto arbitrário de $\mathbb{R}^N$. Em alguns resultados, nós especificaremos as caracteristicas de Ω. Nós aplicaremos resultados dos capítulos anteriores para obter informações sobre o problema do valor inicial para a equação do calor $u_t - \triangle u = 0$.

Teorema 12. *Sejam A e $(T(t))_{t\geq 0}$ como no Exemplo 2 e na Observação 14. Dado $\phi \in H^{-1}(\Omega)$, seja $u(t) = T(t)\phi$ para $t \geq 0$. Então, as seguintes propriedades são válidas:*

1. *$u \in C([0,\infty); H^{-1}(\Omega)) \cap C((0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); H^{-1}(\Omega))$, e u é a única solução do problema*
$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} - \triangle u = 0, \quad \forall t > 0 \\ u(0) = \phi \end{cases}$$
Além disso, $\triangle^n u \in C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ para todo n não negativo.

2. *Se $\phi \in L^2(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega))$.*
Se $\phi \in H_0^1(\Omega)$, então $u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(\Omega))$. Se além disso, $\triangle\phi \in L^2(\Omega)$, então $\triangle u \in C([0,\infty); L^2(\Omega))$ e $u \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$.

Demonstração. Nesta prova usaremos resultados do Capítulo de Semigrupos e do Operador Laplaciano.

1. A primeira parte segue do Teorema 10, com $D(A) = H_0^1(\Omega)$ e $X = H^{-1}(\Omega)$.
Em adição, aplicando o Corolário 12 com $n = 1$, tem-se
$$u \in C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega)).$$
Daí, $\triangle u = u_t \in C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ e $\triangle^2 u = \triangle(u_t) = u_{tt} \in C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$.
Indutivamente nós temos, $\triangle^n u \in C^\infty((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ para todo n não negativo.
Assim, 1 está provado.

2. Dado $\phi \in L^2(\Omega)$, segue do Teorema 10 que,
$$t \mapsto S(t)\phi \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C((0,\infty); D(B)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega))$$
E do Lema 14 tem-se, $u \in C([0,\infty); L^2(\Omega)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\Omega))$.

Além disso, $u \in C((0,\infty); H_0^1(\Omega))$ pois $D(B) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$.

Dado $\phi \in H_0^1(\Omega)$, segue da Proposição 9 que $u \in C([0,\infty); H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(\Omega))$.

Finalmente, se $\phi \in D(B)$, então $t \mapsto S(t)\phi \in C([0,\infty); D(B)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\Omega))$. Logo,

$$u \in C^1([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\triangle u = u_t \in C([0,\infty); L^2(\Omega)).$$

□

Teorema 13. *Sejam A e $(T(t))$ como no Teorema 12. Dado $\phi \in L^2(\Omega)$, seja $u(t) = T(t)\phi$ para $t \geq 0$. Então as propriedades a seguir são válidas:*

(i) $\|\triangle u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{1}{t\sqrt{2}}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}$ *para todo* $t > 0$.

(ii) $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2t}}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}$ *para todo* $t > 0$.

(iii) Se $\phi \in H_0^1(\Omega)$, *então* $\|\triangle u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2t}}\|\nabla\phi\|_{L^2(\Omega)}$ *para todo* $t > 0$.

Demonstração. Consideraremos somente o caso em que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Para obter o resultado para $l^2(\Omega)$, basta usar argumentos de densidade.

(i) Consequência direta do Teorema 10 (ii) e do Lema 14.

(ii) Segue do Teorema 10 (iii) e Lema 14 que

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u(x) \cdot \nabla u(x)\, dx &= \langle -\triangle u, u\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\
&= (-\triangle u, u)_{L^2} \\
&= (Au, u)_{L^2} \leq \frac{1}{2t}\|\phi\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|\nabla u(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \dfrac{1}{\sqrt{2t}}\|\phi\|_{L^2(\Omega)}$.

(iii) Pelo item (iv) do Teorema 10 tem-se,

$$\|\triangle u\|^2_{L^2} \leq \frac{1}{2t}(-\triangle\phi, \phi)_{L^2} = \frac{1}{2t}\int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\phi\, dx = \frac{1}{2t}\|\nabla\phi\|^2_{L^2}$$

□

Teorema 14. *Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua tal que $F(0) = 0$. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$, então $F \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla F(u) = F'(u)\nabla u$ quase sempre em Ω.*
Em adição, se $1 \leq p < \infty$, então a aplicação $u \mapsto F(u)$ é contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ para $W^{1,p}(\Omega)$.

Corolário 13. *Seja* $p \in [1, \infty]$. *Se* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *então* $u^+, u^-, |u| \in W^{1,p}(\Omega)$ *e*

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, \text{ se } u > 0 \\ 0, \text{ se } u \leq 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

quase sempre em Ω.
Se p é finito, então $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ *e* $u \mapsto |u|$ *são contínuas em* $W^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Provemos o caso u^+.
Definamos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \begin{cases} x, \text{se } x > 0 \\ 0, \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Note que F é Lipschitz contínua e $F(0) = 0$. Aplicando o Teorema 14 tem-se, $u^+ = F(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u, \text{ se } u > 0 \\ 0, \text{ se } u \leq 0 \end{cases}$$

q.s. em Ω. □

Proposição 16. *Sejam* $1 \leq p < \infty$ *e* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tal que* u *é nula fora de um conjunto compacto contido em* Ω. *Então* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Ver Brézis, Functional Analysis, Lema 9.5. □

Corolário 14. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Lipschitz contínua tal que* $F(0) = 0$, *e seja* $1 \leq p < \infty$. *Então, a aplicação* $u \mapsto F(u)$ *é contínua de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *para* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Então existe $(\phi_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\phi_n \to u$ em $W^{1,p}(\Omega)$.
Pela Proposição 16, nós temos $F(\phi_n) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Por outro lado, segue-se do Teorema 14 que $F(\phi_n) \to F(u)$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Assim, segue o resultado. □

Aplicando o Corolário 14, nós obtemos o seguinte resultado.

Corolário 15. *Seja* $1 \leq p < \infty$. *Se* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *então* $u^+, u^-, |u| \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Além disso, as aplicações $u \mapsto u^+$, $u \mapsto u^-$ *e* $u \mapsto |u|$ *são contínuas em* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposição 17. *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e considere* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Se existe* $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *tal que* $|u| \leq |v|$ *q.s., então* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Demonstração. Seja $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Segue do Corolário 15 que $|v| \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Seja $(w_n)_n \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $w_n \to |v|$ em $W^{1,p}(\Omega)$. Segue do Corolário 13 que $(w_n - u^+)^+ \to (|v| - u^+)^+$ em $W^{1,p}(\Omega)$.
Por outro lado, $supp(w_n - u^+)^+ \subset supp(w_n)$. Pela Proposição 16, $(w_n - u^+)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Isto implica, $(|v| - u^+)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$,
Como $|v| \geq |u| \geq u^+$, nós temos $(|v| - u^+)^+ \equiv |v| - u^+$; e logo, $|v| - u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
Assim, obtemos $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. E utilizando o mesmo argumento prova-se que $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Portanto, $u = u^+ - u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Corolário 16. *Seja* $1 < p < \infty$ *e considere* $u \in L^p(I, H^1(\Omega)) \cap W^{1,p'}(I, H^{-1}(\Omega))$. *Se existe* $v \in L^p(I, H_0^1(\Omega))$ *tal que* $u(t) \leq v(t)$ *q.s. em* Ω *para quase todo* $t \in I$ *e se* $u \in C(I, L^2(\Omega))$, *então a função* $f(t) = \int_\Omega u^+(t)^2 \, dx$ *pertence a* $W^{1,1}(\Omega)$, *e*

$$f'(t) = 2\langle u_t(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

para quase todo $t \in I$.

Lema 15 (Gronwall). *Seja* $T > 0$, $A \geq 0$ *e considere* $f \in L^1(0,T)$ *uma função não negativa. Suponha que* $\phi \in C([0,T])$ *é uma função não negativa tal que*

$$\phi(t) \leq A + \int_0^t f(s)\phi(s)\, ds,$$

para todo $t \in [0,T]$. *Então,*

$$\phi(t) \leq A \exp\Big(\int_0^t f(s)\, ds\Big),$$

para todo $t \in [0,T]$.
Em particular, com $A = 0$, *então* $\phi \equiv 0$.

Demonstração. Defina $u(t) = A + \int_0^t f(s)\phi(s)\, ds$.
Derivando nós obtemos, $u'(t) = f(t)\phi(t)$.
E da hipótese, $\phi(t) \leq u(t)$ tem-se

$$\frac{u'(t)}{u(t)} \leq f(t).$$

Agora, integrando ambos os lados entre 0 e t tem-se

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{u'(s)}{u(s)}\, ds &\leq \int_0^t f(s)\, ds \\
\log u(t) - \log u(0) &\leq \int_0^t f(s)\, ds \\
e^{\log u(t) - \log u(0)} &\leq \exp(\int_0^t f(s)\, ds) \\
u(t) &\leq u(0) \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right) \\
u(t) &\leq A \exp\left(\int_0^t f(s)\, ds\right)
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado é conhecido como o princípio do máximo fraco para a equação do calor.

Teorema 15. *Sejam* $T > 0$, $1 < p < \infty$ *e* $f \in L^1_{loc}((0,T); H^{-1}(\Omega))$. *Suponha que* $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap L^p((0,T); H^1(\Omega)) \cap W^{1,p'}((0,T); H^{-1}(\Omega))$ *é solução da equação*

$$u_t - \triangle u = f, \text{ para quase todo } t \in (0,T),$$

e que

(i) existe $v \in L^p((0,T);H_0^1(\Omega))$ tal que $u(t) \leq v(t)$ q.s. em Ω para quase todo $t \in (0,T)$.

(ii) $f = g + h$, com $g \in L^1_{loc}((0,T);H^{-1}(\Omega))$, $g(t) \leq 0$ para quase todo $t \in (0,T)$, e $h \in L^1_{loc}((0,T);L^2(\Omega))$, $h(t) \leq C|u(t)|$ q.s. em Ω para quase todo $t \in (0,T)$ onde C independe do t.

(iii) $u(0) \leq 0$ q.s. em Ω.

Segue que $u(t) \leq 0$ q.s. em Ω para todo $t \in (0,T)$.

Demonstração. Aplicando a Proposição 17 com $p = 2$ tem-se $u^+(t) \in H_0^1(\Omega)$ para quase todo $t \in (0,T)$. Daí,

$$\langle u_t(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} - \langle \triangle u(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} = \langle f(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1},$$

para quase todo $t \in (0,T)$. Segue do Corolário 13 e da identidade (4.3) que

$$\langle \triangle u(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq 0,$$

e segue da hipótese (ii) e da identidade (4.1) que

$$\begin{aligned}\langle u_t(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \leq \langle f(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} &\leq \langle h(t), u^+(t)\rangle_{H^{-1},H_0^1} \\ &\leq C\int_\Omega |u(t)|u^+(t)\,dx \\ &= C\int_\Omega u^+(t)^2\,dx.\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Corolário 16, nós obtemos

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u^+(t)^2\,dx \leq K\int_\Omega u^+(t)\,dx,$$

para quase todo $t \in (0,T)$. Integrando ambos os lados da desigualdade e usando a hipótese (iii), nós obtemos

$$\int_\Omega u^+(t)^2\,dx \leq K\int_0^t\int_\Omega u^+(s)\,dx\,ds,$$

para quase todo $t \in (0,T)$. E pelo Lema de Gronwall, nós concluímos que $u^+(t) \equiv 0$. $\square$

Lema 16. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} e^{-|x|^2}\,dx = \pi^{\frac{N}{2}}$.

Agora vamos caracterizar a solução da equação do calor quando $\Omega = \mathbb{R}^N$.
Além disso, nós obteremos uma importante estimativa.

Proposição 18. *Suponha que $\Omega = \mathbb{R}^N$ e considere $(T(t))_{t\geq 0}$ como no Teorema 12. Para cada $t > 0$, defina a função $S_t \in S(\mathbb{R}^N)$ por $S_t(x) = (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Se $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e se $u(t) = T(t)\phi$ para $t \geq 0$, então as seguintes propriedades valem:*

(i) $T(t)\phi = S_t * \phi$ para todo $t > 0$;

(ii) Se $\phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $u(t) \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $p \leq q \leq \infty$, e

$$||u(t)||_{L^q(\Omega)} \leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}||\phi||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Seja $\phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e defina $u(t) = S_t * \phi$.

Para provar a propriedade (i), precisamos verificar que $u(t)$ também é solução do Problema de Cauchy, isto é, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$, $u \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N)) \cap C^1((0,\infty); L^2(\mathbb{R}^N))$, $u(0) = \phi$ e $u_t = \triangle u$.

E pela unicidade da solução do Problema de Cauchy, concluiremos que $T(t)\phi = S_t * \phi$ para todo $t > 0$.

Verifica-se que $\partial_t S_t - \triangle S_t = 0$. Daí, $\partial_t(S_t * \phi) - \triangle(S_t * \phi) = (\partial_t S_t - \triangle S_t) * \phi = 0$.

Assim, $u = S_t * \phi$ satisfaz $u_t - \triangle u = 0$.

Vejamos que $u(0) = \phi$. Tem-se

$$\begin{aligned}
\|S_t\|_{L^1} &= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-|x|^2}{4t}}\, dx \\
&= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} (4t)^{N/2}\, dy \quad (y = x/(4t)^{\frac{1}{2}},\, dy = (4t)^{\frac{-N}{2}} dx) \\
&= \pi^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2}\, dy \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Também tem-se pela Desigualdade de Young,

$$\|S_t * \phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} \leq \|S_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)} = \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R}^N)}.$$

Precisamos somente provar o resultado para $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. Para o caso em que $\phi \in L^2(\Omega)$, usa-se o Lema 1 e argumentos de densidade.

Suponha que $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$.

$$\begin{aligned}
(S_t * \phi)(x) &= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} \phi(x-y) e^{\frac{-|y|^2}{4t}}\, dy \\
&= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \phi(x - z\sqrt{4t}) (4t)^{N/2}\, dz \\
&= \pi^{-N/2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2} \phi(x - 2\sqrt{t}z)\, dz \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Note que o integrando de (5.2) é limitado e converge pontualmente para $\phi(x)$ quando $t \downarrow 0$.

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada tem-se, $S_t * \phi(x) \longrightarrow \phi(x)$ quando $t \downarrow 0$.

Seja $R > 0$ tal que $supp \subset B = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq R\}$. Se $|x| \geq 2R$ e $|y| \leq R$, temos que

$$|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - R = \frac{|x|}{2} + \frac{|x|}{2} - R = \Big(\frac{|x|}{2} - R\Big) + \frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{2}.$$

Logo $-|x-y|^2 \leq \dfrac{-|x|^2}{4}$. Segue que

$$\begin{aligned}
|(S_t * \phi)(x)| &= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \int_{|y|\leq R} \phi(y) e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}\, dy \\
&\leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} \Big| \int_{|y|\leq R} e^{\frac{-|x|^2}{16t}} \phi(y)\, dy \Big| \\
&\leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{16t}} \int_{|y|\leq R} |\phi(y)|\, dy \\
&= c t^{\frac{-N}{2}} e^{\frac{-|x|^2}{16t}}
\end{aligned}$$

Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que $|(S_t * \phi)(x)| \leq c\varepsilon^{-\epsilon|x|^2}$ se $|x| \geq 2R$.

Como $\|S_t * \phi\|_{L^\infty} \leq \|\phi\|_{L^\infty}$, então $|S_t * \phi(x)| \leq c\varepsilon^{-\epsilon|x|^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^N$.

Pelo Teorema da Convergência Dominada, tem-se

$$\lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} |S_t * \phi - \phi|^2 \underbrace{=}_{(5.2)} \int_{\mathbb{R}^N} \lim_{t\to 0} |S_t * \phi - \phi|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\phi - \phi|^2 = 0. \quad (5.3)$$

Assim, $S_t * \phi \longrightarrow \phi$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ quando $t \downarrow 0$. Como $\mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$, então $u(0) = \phi, \forall \phi \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Provamos que $u(t) = S_t * \phi$ é solução do Problema de Cauchy. Mas, a solução também é dada por $T(t)\phi$. Pela unicidade, temos $S_t * \phi = T(t)\phi$, o que demonstra o item (i).

Seja $\phi \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Também pela Desigualdade de Young, $\|S_t * \phi\|_{L^q} \leq \|S_t\|_{L^r} \|\phi\|_{L^p}$.

$$\begin{aligned}
\|S_t\|_{L^r}^r &= \int_{\mathbb{R}^N} (4\pi t)^{\frac{-Nr}{2}} e^{\frac{-|x|^2 r}{4t}}\, dx \\
&= (4\pi t)^{\frac{-Nr}{2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|y|^2} (4t)^{N/2} r^{-N/2}\, dy \\
&= (4\pi t)^{\frac{-Nr}{2}} (4t)^{N/2} r^{-N/2} \pi^{N/2} \\
&= (4\pi t)^{\frac{-Nr}{2}} (4\pi t)^{N/2} r^{-N/2}
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|S_t\|_{L^r} &= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}} (4\pi t)^{\frac{N}{2r}} r^{\frac{-N}{2r}} \\
&= (4\pi t)^{\frac{-N}{2} + \frac{N}{2r}} r^{\frac{-N}{2r}} \\
&= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(1-\frac{1}{r})} r^{\frac{-N}{2r}} \\
&\leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(1-\frac{1}{r})} \\
&= (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(t)\|_{L^q} = \|S_t * \phi\|_{L^q} \leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\phi\|_{L^p}.$$

$\square$

Agora, provaremos que a estimativa obtida na proposição anterior também vale para Ω arbitrário.

Teorema 16. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ como no Teorema 12 para Ω arbitrário. Consideremos $\phi \in L^2(\Omega)$ e tome $u(t) = T(t)\phi$. Se $\phi \in L^p(\Omega)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$, então $u(t) \in L^q(\Omega)$ para todo $p \leq q \leq \infty$ e*

$$||u(t)||_{L^q(\Omega)} \leq (4\pi t)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} ||\phi||_{L^p(\Omega)}$$

para todo $t > 0$.

Demonstração. Suponha que $p < \infty$. Utilizando argumento de densidade, somente precisamos provar o resultado para $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap L^p(\Omega)$. Defina $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N)$ por

$$\psi(x) = \begin{cases} |\phi(x)|, \text{ se } x \in \Omega \\ 0, \text{ se } x \notin \Omega, \end{cases}$$

e seja $v(t) = S_t * \psi$, onde S_t foi definido na Proposição 18.

Como $\psi \in H^1(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$, segue da Proposição 18 que $T(t)\psi = S_t * \psi = v(t)$.

Além disso, pelo Teorema 12 tem-se que $v \in C([0,\infty); H^1(\mathbb{R}^N)) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(\mathbb{R}^N))$ e $v_t - \triangle v = 0$ em $H^{-1}(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, $v(t) \geq 0$. Logo, se definirmos $w(t) = v(t)|_\Omega$, então $w \in C([0,\infty); H^1(\Omega) \cap C^1([0,\infty); H^{-1}(\Omega))$, $w_t - \triangle w = 0$ em $H^{-1}(\Omega)$ e $w(t) \geq 0$.

Agora, definimos $z_1(t) = u(t) - w(t)$ e $z_2(t) = -u(t) - w(t)$. Verifica-se, que z_1 e z_2 satisfazem a hipótese do Teorema 15 (tome $v = |u|$).

Portanto, $z_1(t), z_2(t) \leq 0$, o que implica que $|u(t)| \leq w(t)$ q.s. em Ω para todo $t \geq 0$.

Consequentemente, $\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|w(t)\|_{L^q(\Omega)} \leq \|v(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}$.

Finalmente, aplicando a Proposição 18 para $v(t)$, obtemos o resultado.

Para o caso em que $p = \infty$, basta aplicar o resultado para p finito e $q = \infty$, e em seguida fazer $p \uparrow \infty$. $\square$

Observação 17. *Segue do Teorema 16 que para Ω qualquer, $T(t)$ é contínua $L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$, para todo $t > 0$ e todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ com $p < \infty$.*

Corolário 17. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ como no Teorema 12, $\phi \in L^2(\Omega)$ e seja $u(t) = T(t)\phi$. Se $\phi \in L^p(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, então $u \in C([0,\infty); L^p(\Omega))$.*

Demonstração. Primeiro suponha que $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Assuma que ϕ tem suporte compacto na bola aberta de $\mathbb{R}^N$ com centro 0 e raio $R < \infty$, e defina $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ por $w(x) = \|\phi\|_\infty e^{\sqrt{1+R^2}} e^{-\sqrt{1+|x|^2}}$.

Verifica-se que $\triangle w \leq w$. Logo, se definirmos $z(t,x) = e^t w(x)$, então $z_t - \triangle z \geq 0$.

Assim, se aplicarmos o Teorema 15 para $u_1 = u - z|_\Omega$ e $u_2 = -u - z|_\Omega$ (tome $v = |u|$), então obtemos $|u(t)| \leq z(t)$.

Portanto, dado $T > 0$, temos $|u(t,x)| \leq e^T w(x)$ q.s. em Ω para todo $t \in [0,T]$.

Sendo $u(t)$ contínua em $L^2(\Omega)$ e aplicando o Teorema da Convergência Dominada tem-se, a continuidade em $L^p(\Omega)$.

Agora, suponha que $\phi \in L^p(\Omega)$. Sendo $\mathcal{D}(\Omega)$ denso em $L^P(\Omega)$, existe uma sequência $(\phi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\|\phi_n - \phi\|_{L^p} \to 0$.

Pelo Teorema 16 (com $p = q$) tem-se,

$$\begin{aligned} \|T(t)(\phi_n - \phi)\|_{L^p} &\leq \|\phi_n - \phi\|_{L^p} \\ \sup_{0<t\leq T} \|T(t)(\phi_n) - T(\phi)\|_{L^p} &\leq \|\phi_n - \phi\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Daí,

$$T(t)\phi_n \longrightarrow T(t)\phi \quad \text{em} \quad C([0,T]; L^p(\Omega)).$$

Portanto, $t \mapsto T(t)\phi \in C([0,\infty); L^p(\Omega))$. $\square$

Proposição 19. *Seja $(T(t))_{t\geq 0}$ como no Teorema 12. Suponha que $\phi \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ para algum $1 \leq p < \infty$, e seja $u(t) = T(t)\phi$. Então as seguintes afirmações são válidas:*

(i) $u \in C((0,\infty); L^\infty(\Omega))$

(ii) Além disso, se $\triangle^k u(t) \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ então $\triangle^m u \in C^\infty((0,\infty); L^\infty(\Omega))$.

Demonstração. Fixe $\varepsilon > 0$ e considere $t_0, t \geq \varepsilon$.

Temos que $u(t) - u(t_0) = T(\varepsilon)(u(t-\varepsilon) - u(t_0 - \varepsilon))$.

Aplicando o Teorema 16,

$$\|u(t) - u(t_0)\|_{L^\infty} \leq (4\pi\varepsilon)^{-N/2p} \|u(t-\varepsilon) - u(t_0 - \varepsilon)\|_{L^p}.$$

Como $u \in C([0,\infty); L^p(\Omega))$, segue que $u \in C([\varepsilon,\infty); L^\infty(\Omega))$. E para ε suficientemente pequeno, o resultado (i) segue.

Fixemos $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 11 tem-se

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} \triangle^m u(t+\varepsilon) &= (-1)^n (-\triangle)^n \triangle^m u(t+\varepsilon) \\ &= \triangle^{n+m} u(t+\varepsilon) \\ &= \triangle^{n+m} T(t+\varepsilon)\phi \\ &= \triangle^{n+m} T(t) u(\varepsilon) \\ &= T(t) \triangle^{n+m} u(\varepsilon) \end{aligned}$$

Como $\triangle^{n+m} u(\varepsilon) \in L^p(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, pela primeira parte da demonstração tem-se

$$t \mapsto T(t)\triangle^{n+m} u(\varepsilon) \in C((\varepsilon,\infty); L^\infty(\Omega)).$$

Consequentemente, $\triangle^m u \in C^n((\varepsilon,\infty); L^\infty(\Omega))$. O resultado segue, pois ε, m e n são arbitrários. $\square$

Definição 14. *Seja* $|\Omega| < \infty$. *Definimos*

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^2 \ : \ u \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |u|^2 = 1 \right\}.$$

Teorema 17. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$. *Seja* $\lambda_1 > 0$, *e considere* $(T(t))_{t\geq 0}$ *como no Teorema 12. Então,* $\|T(t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq e^{-\lambda_1 t}$ *para todo* $t \geq 0$.

Demonstração. Sejam $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $u(t) = T(t)\phi$.

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 = 2\langle u(t), u_t(t)\rangle_{H_0^1, H^{-1}} = 2\langle u(t), \triangle u(t)\rangle_{H_0^1, H^{-1}} = -2\|\nabla u(t)\|_{L^2}^2 \tag{5.4}$$

Suponha que $u(t) \in H_0^1(\Omega)$ e defina $v = \dfrac{u(t)}{\|u(t)\|_{L^2}}$.

Por definição de λ_1 tem-se,

$$\lambda_1 \leq \int_\Omega |\nabla v|^2\, dx = \int_\Omega |\nabla(u(t)/\|u(t)\|_{L^2})|^2\, dx = \frac{1}{\|u(t)\|_{L^2}} \int_\Omega |\nabla u(t)|^2$$

Portanto,

$$\lambda_1 \|u(t)\|_{L^2}^2 \leq \|\nabla u(t)\|_{L^2}^2. \tag{5.5}$$

Por (5.4) e (5.5) temos

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq -2\lambda_1 \|u(t)\|_{L^2}^2.$$

Multiplicando ambos os lados por $e^{2\lambda_1 t}$ tem-se,

$$\frac{d}{dt}\Big(\|u(t)\|_{L^2}^2 \cdot e^{2\lambda_1 t}\Big) = \frac{d}{dt}\|u(t)\|_{L^2}^2 \cdot e^{2\lambda_1 t} + 2\lambda_1 \|u(t)\|_{L^2}^2 \cdot e^{2\lambda_1 t} \leq 0.$$

Agora, integrando entre 0 e t, nós obtemos

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 \cdot e^{2\lambda_1 t} - \|\phi\|_{L^2}^2 \leq 0.$$

Portanto, $\|u(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{-2\lambda_1 t}\|\phi\|_{L^2}^2$.

O resultado para $\phi \in L^2(\Omega)$ segue por argumentos de densidade. $\square$

Teorema 18. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$ *e* $0 < p < q \leq \infty$. *Então,* $\|f\|_{L^p} \leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^q}$.

Corolário 18. *Suponha que* $|\Omega| < \infty$. *Seja* $\lambda_1 > 0$, *e considere* $(T(t))_{t\geq 0}$ *como no Teorema 12. Para cada* $1 \leq p \leq \infty$, *existe uma constante* C_p *tal que* $\|T(t)\phi\|_{L^p} \leq C_p e^{-\lambda_1 t}\|\phi\|_{L^p}$, *para todo* $t \geq 0$ *e todo* $\phi \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Suponhamos que $p < \infty$. Por argumentos de densidade, precisamos somente provar o resultado para $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Fixemos $t_0 > 0$.

Para $t \leq t_0$, segue da desigualdade $e^{-\lambda_1 t_0} \leq e^{-\lambda_1 t}$ que

$$\|T(t)\phi\|_{L^p} \leq \|\phi\|_{L^p} = e^{\lambda_1 t_0}e^{-\lambda_1 t_0}\|\phi\|_{L^p} \leq e^{\lambda_1 t_0}e^{-\lambda_1 t}\|\phi\|_{L^p}.$$

Agora, seja $t \geq t_0$.

Se $p > 2$, segue de $T(t)\phi = T(t_0)T(t-t_0)\phi$ e dos Teoremas 16, 17 e 18 que

$$\begin{aligned}
\|T(t)\phi\|_{L^p} &\leq (4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}\|T(t-t_0)\phi\|_{L^2} \\
&\leq (4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}e^{-\lambda_1(t-t_0)}\|\phi\|_{L^2} \\
&= (4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}\|\phi\|_{L^2} \\
&\leq (4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}|\Omega|^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\|\phi\|_{L^p} \\
&= \left((4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}}|\Omega|\right)^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}\|\phi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $p < 2$, então

$$\begin{aligned}
\|T(t)\phi\|_{L^p} &\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|T(t)\phi\|_{L^2} \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}\|T(t_0)\phi\|_{L^2} \qquad (\because T(t)\phi = T(t-t_0)T(t_0)\phi) \\
&\leq |\Omega|^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}(4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}\|\phi\|_{L^p} \\
&= \left((4\pi t_0)^{\frac{-N}{2}}|\Omega|\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}e^{-\lambda_1 t}e^{\lambda_1 t_0}\|\phi\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

O resultado segue tomando $t_0 = \dfrac{|\Omega|^{2/N}}{4\pi}$.

Para o caso em que $p = \infty$, basta aplicar o resultado para p finito, e em seguida fazer $p \uparrow \infty$.

$\square$

Quando Ω é um conjunto aberto limitado, podemos expressar a solução da equação do calor como uma série infinita, cujo termo geral é dado pela base em $L^2(\Omega)$ dado pelos autovetores do operador $-\triangle$ em $H_0^1(\Omega)$.

Teorema 19. *Existe uma base de Hilbert* $(\phi_n)_n$ *de* $L^2(\Omega)$ *e uma sequência* (λ_n) *de reais positivos com* $\lambda_n \to \infty$ *tais que*

$$\phi_n \in H_0^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega), \quad -\triangle\phi_n = \lambda_n\phi_n$$

Proposição 20. *Seja* $(\lambda_n)_n$ *a família de autovalores de* $-\triangle$ *em* $H_0^1(\Omega)$*, seja* $(\phi_n)_n$ *uma base de Hilbert de* $L^2(\Omega)$ *formada por autovetores, e considere* $(T(t))_{t\geq 0}$ *como no Teorema 12. Dado* $\phi \in L^2(\Omega)$*, seja* $a_n = (\phi, \phi_n)_{L^2}$ *para todo* $n \geq 1$*, tal que* $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n$*, e considere* $u(t) = T(t)\phi$*.*
Então,

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n t} \phi_n, \quad \forall t \geq 0.$$

Demonstração. Consideremos um inteiro $k \geq 1$. Dada uma família $(a_n)_{1\leq n\leq k}$, seja $\phi = \sum_{n=1}^{k} a_n \phi_n$ e definamos

$$u(t) = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n t} \phi_n,$$

para $t \geq 0$.

Como $(\phi_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$, segue que $u \in C^\infty([0,\infty), H_0^1(\Omega))$ e que $u(0) = \phi$.

Além disso,

$$\frac{du}{dt} = -\sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n t} \lambda_n \phi_n = \sum_{n=1}^{k} a_n e^{-\lambda_n t} \triangle \phi_n = \triangle u,$$

e logo $u(t) = T(t)\phi$ pelo Teorema 12.

Sendo o conjunto

$$\bigcup_{k\geq 1} \left\{ \sum_{n=1}^{k} a_n \phi_n ; (a_n)_{1\leq n\leq k} \subset \mathbb{R}^k \right\}$$

denso em $L^2(\Omega)$, obtemos o resultado com $a_n = (\phi, \phi_n)_{L^2}$. □

Veja a demonstração em [**spivak1990joy**].

Bibliografia

[1] Adams. *Sobolev Spaces*. Elsevier, 2003.

[2] Axler, S. , Ribet. *A Short Course on Operator Semigroups*. Springer, 2005.

[3] Brézis, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2011.

[4] Cazenave, T., Haraux, A. *An Introduction to Semilinear Evolution Equations*. Oxford, 1998.

[5] Evans, L.C. *Partial differential equations*. A.M.S., 1997.

[6] Folland, G.B. *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*. John Wiley, New York, 1984.

[7] Goldstein J. A. *Semigroups of Linear Operators and Applications*. Oxford University Press, 1985.

[8] Kesavan S. *Topics in Functional Analysis and Applications*. New Age International, 2003.

[9] Konrad Schmüdgen. *Unbounded Self-adjoint Operators on Hilbert Space*. Springer, 2011.

[10] Medeiros, L.A. , Milla Miranda, M. *Espaços de Sobolev: Iniciação aos Problemas Elíticos não Homogeneos*. UFRJ, 2000.

[11] Pazy, A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Springer, 1983.